

## 内 容 提 要

本书是继初等微积分之后包括大学数学分析内容在内的一本教程，其特点是渗透了现代数学分析的观点和方法。本书阐述了实数和一元微积分的理论，并在此基础上抽象出距离空间及其映射的现代分析的基本概念；以距离空间的观点阐述了多元微积分理论，使数学分析的经典内容与现代分析相衔接；论述了常微分方程解的存在唯一性定理、级数理论、黎曼—斯蒂阶 斯 积 分 理 论、凸函数的基本性质；给出了现代分析中阿采拉定理、斯桃茵—外尔斯特拉斯定理及 $R_N$ 中一般的斯托克斯定理。

本书叙述简明并配有较多理论性习题，可作为理工科大学数学分析的教学参考书，也可作为中学教师及需要现代数学分析基础知识的读者进修用书。

# 前 言

本书主要依据美国加利福尼亚大学教授 M·H·protter, C·B·Morrey 合著《A First course in Real Analysis》, 并结合我国数学分析教学实际编译而成的。这是继初等微积分之后的大学数学分析教程, 其特点是以现代分析的观点与方法阐述  $\mathbf{R}_N$  中微积分理论, 使分析的基础与现代分析相衔接。

本书共十五章。第一章以公理法讲述实数理论, 为分析的代数运算、极限、连续性概念提供逻辑基础。第二章至第五章, 作为初等微积分的总结和分析的基础, 包括了  $\mathbf{R}_1$  中连续、极限和微积分理论。导数是以算子的观点定义的, 积分中介绍了约当测度, 并将测度与积分联系了起来。

现代分析发展的关键是抽象出距离空间的概念。第六章引入了距离空间, 以  $\mathbf{R}_N$ 、 $C[a, b]$  等为典型讲述了点集拓扑的基础知识。基于紧性集将连续函数的性质一般化, 还将逐次逼近法上升为完备空间中的压缩映象不动点定理, 用以证明隐函数、常微分方程解的存在唯一性。第七、八章以距离空间的观点为指导, 简捷地将  $\mathbf{R}_1$  的微积分理论发展为  $\mathbf{R}_N$  的微积分理论。介绍级数理论的第九、十两章中, 一致收敛性概念也被推广到距离空间, 同时以抽象测度的思想提出无序和的概念, 统一处理多重级数的收敛性。第十一、十二章推广黎曼积分。广义积分理论的重点是积分号下求导数。把黎曼

积分推广为黎曼—斯蒂阶斯积分，不仅对学习概率论是必要的，而且为把约当测度、黎曼积分发展为勒贝格测度与积分，进而为抽象测度理论打好基础。第十三章介绍距离空间的函数理论，讲述了现代分析中很有用的阿采拉定理，泰兹延拓定理及斯桃茵—外尔斯特拉斯定理。

鉴于凸分析对现代应用数学(如最优化理论)的重要作用，专设第十四章介绍凸集、凸函数的最初等的基本结果。

最后一章研究特殊的距离空间之间的映象— $R_N$ 的场理论。先以拓扑学的观点论述了曲线、曲面的表示。尔后把通常场论三公式作为微积分基本定理在二维、三维的推广，在引入了外微分运算及外微分形式之后，最终将它们概括为 $R_N$ 中一般的斯托克斯定理。该定理在微分几何及现代物理中是非常重要的。

本书各章节后面配有总计上千道习题，这是本书的有机部分。

编译者认为以现代分析观点处理 $R_N$ 中微积分的这样简明的教程，符合改革数学分析使之现代化的要求。张学铭教授对此给予热情地指教与鼓励，在此致以真诚的谢意。

希望这本书能为数学分析或高等数学的理工科师生提供参考，对学过初等微积分又需要现代分析的中学数学教师和工程技术人员能有所帮助，这是编译者的良好意愿。但由于自己水平有限，书中存有不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

# 目 录

<b>第一章 实数系</b> .....	1
§ 1.1 域的公理系 .....	1
§ 1.2 自然数、序列、数系的扩充 .....	10
§ 1.3 序公理与不等式 .....	16
§ 1.4 数学归纳法, 自然数的定义 .....	24
<b>第二章 连续性和极限</b> .....	32
§ 2.1 连续性 .....	32
§ 2.2 极限定理 .....	38
§ 2.3 单边极限——相对于集的连续性 .....	46
§ 2.4 趋向无穷处的极限, 无穷极限 .....	52
§ 2.5 序列的极限, 连续性公理 .....	60
<b>第三章 <math>R_1</math> 上函数的基本性质</b> .....	68
§ 3.1 介值定理 .....	68
§ 3.2 最小上界, 最大下界 .....	71
§ 3.3 波尔查诺—外尔斯特拉斯定理 .....	79
§ 3.4 有界性及极值性定理 .....	82
§ 3.5 一致连续性 .....	84
§ 3.6 哥西序列与哥西准则 .....	88
§ 3.7 汉茵—波赖尔与勒贝格定理 .....	90
<b>第四章 微分学的基本理论</b> .....	99
§ 4.1 $R_1$ 上函数的微分 .....	99
§ 4.2 反函数 .....	113



<b>第五章 积分学的基本理论</b>	<b>118</b>
§ 5.1 达布积分	118
§ 5.2 黎曼积分	136
§ 5.3 对数函数与指数函数	144
§ 5.4 约当测度	151
<b>第六章 距离空间和映象</b>	<b>160</b>
§ 6.1 许瓦兹不等式与三角形不等式, 距离空间的概念	160
§ 6.2 点集拓扑基础	167
§ 6.3 可列集	177
§ 6.4 紧集	183
§ 6.5 紧集上的函数	191
§ 6.6 连通性	194
§ 6.7 距离空间之间的映象	199
§ 6.8 压缩映象定理	209
<b>第七章 <math>R_N</math>内的微分</b>	<b>216</b>
§ 7.1 偏导数	216
§ 7.2 高阶偏导数和台劳定理	223
§ 7.3 多变量函数的微分	239
§ 7.4 单一方程的隐函数定理	245
§ 7.5 关于方程组的隐函数定理	254
§ 7.6 条件极值与拉格朗日乘数法	271
<b>第八章 <math>R_N</math>内的积分</b>	<b>280</b>
§ 8.1 $R_N$ 内的体积	280
§ 8.2 $R_N$ 内的达布积分	283
§ 8.3 $R_N$ 内的黎曼积分	291
§ 8.4 象集的体积及变量替换	301
<b>第九章 无穷序列与无穷级数</b>	<b>319</b>
§ 9.1 基础的定理	319

§ 9·2	一般项级数, 幂级数	326
§ 9·3	一致收敛性	335
§ 9·4	级数的一致收敛性, 幂级数的一致收敛性	345
§ 9·5	无序和	364
§ 9·6	无序和的比较判别法, 一致收敛性	379
§ 9·7	多重序列与多重级数	386
<b>第十章</b>	<b>伏里叶级数</b>	<b>399</b>
§ 10·1	展开公式	399
§ 10·2	伏里叶正弦与余弦级数, 区间的改变	407
§ 10·3	收敛性定理	415
<b>第十一章</b>	<b>积分所定义的函数</b>	<b>432</b>
§ 11·1	积分所定义函数的导数	432
§ 11·2	广义积分	440
§ 11·3	广义积分所定义的函数, $\Gamma$ 函数	449
§ 11·4	微分方程解的存在唯一性定理	461
<b>第十二章</b>	<b>有界变差函数与黎曼—斯蒂阶斯积分</b>	<b>469</b>
§ 12·1	有界变差函数	469
§ 12·2	黎曼—斯蒂阶斯积分	483
<b>第十三章</b>	<b>距离空间上的函数</b>	<b>507</b>
§ 13·1	完备的距离空间	507
§ 13·2	阿采拉定理, 连续函数的延拓	519
§ 13·3	斯桃茵—外尔斯特拉斯逼近定理	535
<b>第十四章</b>	<b>凸集与凸函数</b>	<b>552</b>
§ 14·1	凸集	552
§ 14·2	凸函数	557
<b>第十五章</b>	<b>场理论、格林定理和斯托克斯定理</b>	<b>569</b>
§ 15·1	$R_1$ 上的矢函数, 弧, 运动三面形	569
§ 15·2	矢函数与 $R_N$ 上的场	583

§ 15·3	线积分	602
§ 15·4	格林定理	618
§ 15·5	$R_3$ 内的曲面及其参数表示式	632
§ 15·6	曲面的面积及曲面积分	641
§ 15·7	可定向曲面	650
§ 15·8	斯托克斯定理	662
§ 15·9	发散量定理	676
§ 15·10	外微分与一般的斯托克斯定理	687
<b>附 录</b>		701
1	绝对值	701
2	实数的 $p$ 进制小数表示	704
3	$E_N$ 内的矢	710

# 第一章 实数系

## § 1.1 域的公理系

本节提出的域公理系，是微积分中代数运算的逻辑基础。任意对象所组成的集合，当它满足下列 $A_1—A_5$ 、 $M_1—M_5$ 及 $D$ 共十一条公理时，称这个集合为域；域中的元素称为“数”。

### 加法与减法公理 ( $A_1—A_5$ )

$A_1$  封闭性。若 $a, b$ 是数，有且仅有一个数称为 $a$ 与 $b$ 的和，记为 $a + b$ 。

$A_2$  交换律。对于任意两个数 $a, b$ ，都有

$$a + b = b + a.$$

$A_3$  结合律。对任意数 $a, b$ 和 $c$ ，有

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

$A_4$  零的存在性。有且仅有一数 $0$ ，称为零，对任意数 $a$ ，满足

$$a + 0 = a.$$

$A_4$ 中可以不要仅有一个数 $0$ ，其唯一性容易证明。事实上，设 $0$ 和 $0'$ 都是这样的数，那么便有 $0 + 0' = 0$ 及 $0' + 0 = 0'$ 。根据 $A_2$ 有 $0 + 0' = 0' + 0$ ，即 $0 = 0'$ 。这说明当零存在便是唯一的。

$A_5$  负数存在性。 $a$ 是任意数，有且仅有一数 $x$ ，满足

$$a + x = 0.$$

这个数 $x$ 称为 $a$ 的负数（或称 $a$ 的相反数），表示为 $-a$ 。

如同 $A_4$ ，类似地可证， $A_5$ 中唯一性要求是不必要的。

**定理1·1** 若 $a, b$ 是数，那么有且仅有一个数 $x$ 满足  
 $a + x = b$ ；数 $x = b + (-a)$ 。

**证明** 应当证明：（i） $x = b + (-a)$  满足 $a + x = b$ ；  
 （ii）没有其他数能满足这一等式。

为证（i），使用 $A_2, A_3, A_4$ ，有

$$\begin{aligned} a + x &= a + [b + (-a)] = a + [(-a) + b] \\ &= [a + (-a)] + b = 0 + b = b. \end{aligned}$$

于是（i）成立。

在  $a + x = b$  两端加  $(-a)$ ，得  
 $(a + x) + (-a) = b + (-a)$ 。

而左端

$$\begin{aligned} (a + x) + (-a) &= a + [x + (-a)] \\ &= a + [(-a) + x] = [a + (-a)] + x \\ &= 0 + x = x. \end{aligned}$$

可见 $x = b + (-a)$ ，这便证明了解的唯一性。

数 $b + (-a)$ 也记成 $b - a$ 。

有了上述两个数的加法定义，可用结合律来定义三个、四个以及任何有限个数的加法。由 $A_3$ ， $(a + b) + c$ 与 $a + (b + c)$ 相等，定义 $a + b + c$ 为这一共同值。

**引理1·1** 若 $a, b$ 和 $c$ 是任意的三个数，  
 那么

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + c + b = b + a + c = b + c + a \\ &= c + a + b = c + b + a. \end{aligned}$$

请读者据  $A_2$ 、 $A_3$  详细地写出引理1·1的证明。

**引理1·2** 若  $a$ ,  $b$ ,  $c$  和  $d$  是任意数, 那么

$$(a + c) + (b + d) = (a + b) + (c + d).$$

**证明** 由引理1·1及  $A_3$ , 有

$$\begin{aligned}(a + c) + (b + d) &= [(a + c) + b] + d \\&= (a + c + b) + d = (a + b + c) + d \\&= [(a + b) + c] + d = (a + b) + (c + d).\end{aligned}$$

**定理1·2**

(i) 若  $a$  是一数, 那么  $-(-a) = a$ .

(ii) 若  $a$ ,  $b$  是数, 那么

$$-(a + b) = (-a) + (-b).$$

**证明** (i) 由  $-a$  的定义, 有

$$(-a) + [-(-a)] = 0 \quad \text{及}$$

$$(-a) + a = a + (-a) = 0.$$

4, 指出  $(-a)$  是唯一的, 因此  $a = -(-a)$ .

(ii) 据负数定义, 应有

$$(a + b) + [-(a + b)] = 0.$$

再用引理1·2, 有

$$\begin{aligned}(a + b) + [(-a) + (-b)] \\&= [a + (-a)] + [b + (-b)] \\&= 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

由  $A_5$  一个数仅有一个相反数, 得出 (ii) 成立。

定理1·2可以叙述为: (i)  $(-a)$  的相反数是  $a$ ;

(ii) 和的相反数等于相反数的和。

**乘法与除法公理 ( $M_1$ — $M_5$ )**

$M_1$  封闭性. 若 $a, b$ 是数, 有且仅有一个数称为 $a$ 与 $b$ 的积, 表示为 $ab$  (或 $a \times b$ 或 $a \cdot b$ ).

$M_2$  交换律. 对任意的两个数 $a$ 与 $b$ , 有

$$ba = ab.$$

$M_3$  结合律. 对任意的 $a, b, c$ , 有

$$(ab)c = a(bc).$$

$M_4$  单位的存在性. 有且仅有一个不等于零的数 $u$ , 对任意数 $a$ 都有  $au = a$ 成立, 这个数 $u$ 称为单位, 照习惯表示为 $1$ .

$M_5$  倒数的存在性. 对每个不为零的数 $a$ , 有且仅有一数 $x$ 满足  $ax = 1$ . 这个数 $x$ 称为 $a$ 的倒数 (或 $a$ 的逆), 表示为 $a^{-1}$  (或 $1/a$ ).

注 公理 $M_1-M_5$ 与公理 $A_1-A_5$ 是相“平行”的, 相当于以乘法代替加法, 但 $M_5$ 与 $A_5$ 并不恰好相当,  $M_5$ 还要求 $a \neq 0$ . 其原因由下面定理 1.3 指出: 任意数与 $0$ 的积等于 $0$ , 就是零不能做除数.

### 特殊的公理D

$D$  分配律. 对于任意的数 $a, b, c$ , 有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

注 在每一逻辑系统之中, 必然有不定义的概念——原始概念. 例如欧几里德平面几何里的点、直线就是不定义的原始概念. 当然, 对这两个概念可以直观地给以描述, 但在几何学的理论结构中它是不能下定义的, 它们的性质是由公理系来给出的. 在域的公理系当中, “数”是不定义的原始概念. 我们可以用实数来解释, 也可以用有理数或者复数来解释. 事实上有理数系、实数系、复数系还有若干数系 (可以是有限个数组成) 都满足域公理, 实数系只是满足域公理系的诸数系其中的一个. 满足公理系统的集合称为这一公理系统的一个解释, 实数系是域公理系统的一个解释.

如果要求仅以实数系为其解释的公理系, 还需在域公理之外再增加新的公理, 这将在 § 1.3 及 § 2.1 中完成.

**定理1.3** 若 $a$ 是任意数, 那么  $a \cdot 0 = 0$ .

**证明** 设  $b$ 是任一数, 那么 $b + 0 = b$ , 所以  $a(b + 0) = ab$ , 由分配律D, 有

$$(ab) + (a \cdot 0) = (ab)$$

由 $A_4$ , 有  $a \cdot 0 = 0$ .

**定理1.4** 若 $a$ 、 $b$ 是数, 且 $a \neq 0$ 时, 那么有且仅有一个数 $x$ , 满足 $ax = b$ , 数 $x = ba^{-1}$ .

欲证定理1.4, 只要把定理1.1证明中的“加”换为“乘”,  $0$ 换为 $1$ ,  $-a$ 换为 $a^{-1}$ 即得.

注“当且仅当”是数学中常用的术语. 设 $A$ 与 $B$ 是两个命题. “当 $B$ 真,  $A$ 真”意味着 $B$ 真蕴含 $A$ 真; “ $A$ 真仅当 $B$ 真”意味着 $A$ 真蕴含 $B$ 真; “ $A$ 真当且仅当 $B$ 真”这意味着双重含意:  $A$ 真蕴含 $B$ 真和 $B$ 真蕴含 $A$ 真. 今后用符号 $\Leftrightarrow$ 表示“当且仅当”并记为

$$A \Leftrightarrow B.$$

“当且仅当”也常说成“充分与必要”或“等价于”.

### 定理1.5

(i)  $ab = 0$  当且仅当 $a, b$ 至少有一为零.

(ii)  $a \neq 0$  及 $b \neq 0$  当且仅当 $ab \neq 0$ .

**证明** (i), (ii) 都要证明当且仅当两个方面.

对于 (i), 注意若 $a, b$ 至少有一为零, 那么由定理1.3应有 $ab = 0$ . 另一方面, 若 $ab = 0$ , 那么有 $a = 0$ 或 $a \neq 0$ 两种情况. 当 $a = 0$ 时, 结果成立; 当 $a \neq 0$ 时, 那么

$$b = 1 \cdot b = (a^{-1}a) \cdot b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0.$$

这时有 $b = 0$ , 结果成立. 综合两方面, (i) 得证.

对于 (ii), 首先假定 $a \neq 0, b \neq 0$ , 应用 (i)可知 $ab \neq 0$ . 否则 $a, b$ 至少有一为零与假定矛盾. 另一方面, 设 $ab \neq 0$ , 那么 $a \neq 0$ 与 $b \neq 0$ 成立. 否则由定理1.3将有 $ab = 0$ ,



这与 $ab \neq 0$ 矛盾。

把 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 这共同值作为 $abc$ 的定义。读者容易证得与引理1.1及引理1.2相似的下列引理。

**引理1.3** 若 $a, b, c$ 是数, 那么

$$abc = acb = bac = bca = cab = cba.$$

**引理1.4** 若 $a, b, c, d$ 是数, 那么

$$(ac)(bd) = (ab)(cd).$$

**定理1.6**

(i) 若 $a \neq 0$ , 那么 $a^{-1} \neq 0$ 且 $(a^{-1})^{-1} = a$ .

(ii) 若 $a \neq 0, b \neq 0$ , 那么 $(ab)^{-1} = (a^{-1})(b^{-1})$ .

这一定理的证明与定理1.2的证明一样, 只要以乘法代加法, 以1代0,  $a^{-1}, b^{-1}$ 分别代 $(-a), (-b)$ 即可。注意若 $a \neq 0, aa^{-1} = 1 \neq 0$ , 由定理1.5的(ii)便得 $a^{-1} \neq 0$ 。

**定理1.7** 若 $a, b$ 是数(可以是正的、负的或是零), 那么

(i)  $a(-b) = -(ab)$ 。

(ii)  $(-a)b = -(ab)$ 。

(iii)  $(-a)(-b) = ab$ 。

**证明** (i) 因为 $b + (-b) = 0$ , 由分配律有

$$a[b + (-b)] = ab + a(-b) = 0$$

另一方面 $ab + [-(ab)] = 0$ , 由公理 $A_5$ 有

$$a(-b) = -(ab)。$$

(ii) 可由(i)交换 $a, b$ 得到。至于(iii), 由(i), (ii), 得

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)]。$$

再由定理1.2的(i)得

$$-[-(ab)] = (ab)$$

即  $(-a)(-b) = ab$ , (iii) 成立.

**推论**  $(-1)a = -a$ .

现在根据上述公理及定理来证明代数中学过的诸分数律.

注 对于  $ab^{-1}$  引进以下符号:

$$ab^{-1} = \frac{a}{b} = a/b = a \div b$$

这些表示相除的符号称之为分数. 分数的分子与分母按通常定义. 以零为分母的分数没有意义.

### 定理1.8

(i) 对于每个数  $a$  有等式  $a/1 = a$ .

(ii) 若  $a \neq 0$ , 那么  $a/a = 1$ .

**证明** (i) 我们有

$$a/1 = (a \cdot 1^{-1}) = (a \cdot 1^{-1}) \cdot 1 = a(1^{-1} \cdot 1) = a \cdot 1 = a.$$

(ii) 若  $a \neq 0$ , 按定义  $a/a = aa^{-1} = 1$ .

**定理1.9** 若  $a, b, c, d$  是数且  $b \neq 0, d \neq 0$ , 那么

$$bd \neq 0 \text{ 且 } \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}.$$

**证明** 从定理1.5得出  $bd \neq 0$ , 由关于分数的注释及引理1.4与定理1.6的 (ii), 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) &= (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1}) = (ac) \cdot (b^{-1}d^{-1}) \\ &= (ac)(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}. \end{aligned}$$

下列五个定理的证明都留给读者去完成.

**定理1.10** 若  $b \neq 0, c \neq 0$ , 那么

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

**定理1·11** 若  $c \neq 0$ ，那么

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

**定理1·12** 若  $b \neq 0$ ，那么  $-b \neq 0$  且

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

**定理1·13** 若  $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ ，那么  $(c/d) \neq 0$ ，且

$$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right).$$

**定理1·14** 若  $b \neq 0, d \neq 0$ ，那么

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

## 习 题

1. 证明公理  $A_5$  中要求满足  $a+x=0$  的数  $x$  的唯一性是不必要的，即  $a+x=0$  的解  $x$  是唯一的。
2. 证明引理1·1。
3. 根据公理  $A_1-A_5$  证明：

$$(a+c) + (b+d) = (a+d) + (b+c).$$

要求注明证明过程的每一步骤的理由。

4. 证明定理1·4。

5. 证明引理1.3.

6. 证明引理1.4.

7. 证明定理1.6.

8. 证明  $a - (b + c) = (a - b) - c$   
及  $a - (b - c) = (a - b) + c.$

要求注明证明的每一步骤的理由.

9. 证明  $a(b + c + d) = ab + ac + ad$ , 且注明每一步骤的理由.

10. 规定  $a + b + c + d$  的意义是  $(a + b + c) + d$ , 证明  
 $a + b + c + d = (a + b) + (c + d).$

11. 按第10题的规定, 证明:

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

12. 证明定理1.10.

13. 证明定理1.11.

14. 证明定理1.12.

15. 证明定理1.13. [提示: 用定理1.10]

16. 证明定理1.14.

17. 若  $b \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $f \neq 0$ , 证明

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right) = \frac{ace}{bdf}.$$

18. 若  $d \neq 0$ , 证明:  $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + b + c}{d}.$

19. 若  $b \neq 0$ ,  $d \neq 0$ ,  $f \neq 0$ , 证明

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}.$$

## § 1.2 自然数、序列、数系的扩充

域公理系提供了加、减、乘、除四则运算法则。但这一公理系还不能区别或者说还未讨论数之间的大小。如果一个域包含了自然数，可以按传统的方法，把自然数及其相反数以及 $A_4$ 公理中的零称之为整数，然后把有理数定义为整数的商（或比）。这就是说一个包含自然数的域就会包含有理数。为了建立实数系与域之间的关系，应从讨论自然数开始。

直观地，全部自然数可以从1着手，而后是 $1+1$ ， $(1+1)+1$ ， $[(1+1)+1]+1\cdots\cdots$ ，这样来构成。我们称 $1+1$ 为2； $(1+1)+1$ 称为3，如此得到所有自然数的集。当然，可以给出更合逻辑要求的抽象的自然数定义，我们将在§ 1.4中用归纳法原理给出。

为运用熟知的自然数的一般性质及域公理系给出三个数及多于三个数的和、积及其运算法则，先复习序列的定义。

**定义** 序列是以自然数集为定义域的函数。当定义域为有限个自然数的集时，则称这函数为有限序列；否则称为无限序列。一般函数的定义域里的元素是不论什么顺序的，而序列的定义域具有自然数的顺序。例如序列定义域由 $1, 2, \cdots, n$ 组成，值域中相应的数叫做序列的项，可按自然数的顺序写出来。若以 $a$ 表序列，序列的项表示为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 或 $a_{(1)}, a_{(2)}, \cdots, a_{(n)}$ 。元素 $a_i$ 或 $a_{(i)}$ 称为序列的第 $i$ 项。若序列 $a$ 的定义域是所有自然数的集，把 $a$ 表示为

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \text{ 或 } \{a_n\}.$$

**有限序列的和及积用归纳法定义.**下面各命题将在 § 1.4 根据归纳法原理给出证明.

**命题1.1** 若  $a_1, a_2 \cdots a_n$  是给定的有限序列, 那么存在唯一的序列  $b_1, b_2, \cdots b_n$ , 具有性质:

$$b_1 = a_1, \quad b_{i+1} = b_i + a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots n-1, n > 1).$$

**命题1.2** 若  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是给定的有限序列, 那么存在唯一的有限序列  $c_1, c_2, \cdots, c_n$ , 具有性质:

$$c_1 = a_1, \quad c_{i+1} = c_i \cdot a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots n-1, n > 1).$$

元素  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  是序列  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  的顺次的和; 而  $c_1, c_2, \cdots, c_n$  是序列  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  的顺次的积. 其中

$$b_3 = b_2 + a_3 = (a_1 + a_2) + a_3,$$

$$b_4 = b_3 + a_4 = [(a_1 + a_2) + a_3] + a_4;$$

$$c_3 = c_2 a_3 = (a_1 a_2) a_3,$$

$$c_4 = c_3 a_4 = [(a_1 a_2) a_3] a_4,$$

等. 因为序列  $b_1, b_2, \cdots, b_n$  与  $c_1, c_2, \cdots, c_n$  是唯一确定的, 所以

**定义** 对自然数  $n \geq 1$ ,  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  的和及积定义为  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_n$  及  $a_1 a_2 \cdots a_n = c_n$ . 用记法

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \prod_{i=1}^n a_i = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

$\Sigma$  与  $\Pi$  分别是和与积的简短记号. 读  $\sum_{i=1}^n$  为“ $i$  从 1 到  $n$  的和”.

读“ $\prod_{i=1}^n$  为  $i$  从 1 到  $n$  的积”.

基于这些定义与上面的诸命题, 不难证明以下的结果.

**命题1.3** 若  $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}$  是一序列, 那么

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \quad \text{及} \quad \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \cdot a_{n+1}.$$

下面的命题可用数学归纳法证明。

**命题1.4** 若  $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$  是一序列, 那么

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i,$$

$$\prod_{i=1}^{m+n} a_i = \left( \prod_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=m+1}^{m+n} a_i \right).$$

下一命题是读者在初等代数中熟悉的一般的结合律, 它也可以用归纳法证明。

**命题1.5** 一有限序列的和, 可由这序列分为更短的若干序列的和相加而得到。一有限序列的积, 可由这序列分为更短的若干序列的积相乘而得到。

命题1.6是交换律公理  $A_2$ 、 $M_2$  的一般化, 命题1.7、命题1.8是分配律公理  $D$  的一般化。这些命题都可用归纳法证明。

**命题1.6** 有限序列的和及积均与其项的顺序无关。

**命题1.7** 若  $a$  是一数,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是一序列, 那么

$$\begin{aligned} a(b_1 + b_2 + \dots + b_n) &= (b_1 + b_2 + \dots + b_n)a \\ &= ab_1 + ab_2 + \dots + ab_n. \end{aligned}$$

**命题1.8** 两个有限序列的和相乘之积等于一序列的每

一项与另一序列各项相乘积的和，如

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3.$$

形如  $a + (-b) + (-c) + d + (-e)$  的和，基于  $x - y = x + (-y)$  的定义及定理1.2的 (ii)，可以简记为  $a - b - c + d - e$ 。同理可以得出通常的有限项的加法及减法法则。借助于乘法的符号律及推广的分配律可以得出代数和的积的法则。例如

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(b_1 - b_2 - b_3) \\ &= a_1(b_1 - b_2 - b_3) - a_2(b_1 - b_2 - b_3) \\ &= a_1b_1 - a_1b_2 - a_1b_3 - a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3. \end{aligned}$$

符号  $x^n$  ( $n$  是自然数) 的定义是  $n$  个  $x$  的积。读者可从域公理及上面的定理导出关于幂的积与商的指数相加减的法则。

十进制记数法基于如下的自然数表示定理：若  $n$  是一个自然数，那么对  $n$  有且仅有表示式

$$n = d_0(10)^K + d_1(10)^{K-1} + \cdots + d_{K-1}(10) + d_K$$

$K$  是自然数或零， $d_i$  为  $0, 1, 2, \dots, 9$  中的某一数，且  $d_0 \neq 0$ 。  $0, 1, 2, \dots, 9$  称为十进制数的数字。有了这样的表示，自然数的算术运算法则可从  $x$  的多项式相应的运算法则导出，这里  $x = 10$ 。

**定义** 一实数是整数，当且仅当它是零或是自然数或是自然数的相反数。一实数  $r$  称为有理数当且仅当存在整数  $p, q$



$(q \neq 0)$ , 使  $\bar{r} = \frac{p}{q}$ . 一个实数它不是有理数就称为无理数.

根据上面关于加、减、乘、除运算法则的定理、命题, 容易得出有限个整数的和及积仍是整数; 有限个有理数的和、积、商仍是有理数.

最后再次强调指出: 域公理系蕴含了关于加、减、乘、除运算法则的定理. 而域的元素实质并未描述. 例如上述公理系不能保证域中有平方等于2的数 (参看本书附录2). 事实上, 只以“有理数”来解释域中的数而不论及别的数, 所有域公理都被满足. 有理数构成一个域, 如果要求域还包括如  $\sqrt{2}$  这样的无理数, 则还应添加新的公理. 一个包含自然数的域必然包含所有有理数. 其实还能构造出仅含有有限个元素的域. 显然有限域不能包括所有自然数. 例如由 0、1、2、3、4 五个元素组成的系, 其加法、乘法的值分别如下表所示:

加 法						乘 法					
+	0	1	2	3	4	×	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0	1	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1	2	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2	3	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3	4	0	4	3	2	1

容易验证这个系满足域公理.

## 习 题

1. 对于含有五项的序列证明命题1.1及命题1.2.

2. 若 $a_1, a_2, \dots, a_5$ 是一序列, 证明:  $\prod_{i=1}^5 a_i = 0$ 当且仅当

序列至少有一项是零.

3. 证明命题1.3.

4. 用命题1.4证明命题1.5的下列特殊情况:

设给定序列 $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_p$ ,

那么

$$\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i + \sum_{i=n+1}^p a_i.$$

5. 对于含有4项的序列证明命题1.6.

6. (a) 指出建立公式,  $(a+b)^5 = \sum_{i=0}^5 \frac{5!}{i!(5-i)!} a^{5-i} b^i$ , 要

用哪些命题.

(b) 指出建立一般二项式展开公式:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} b^i, \text{ 要用哪些命题. 假}$$

定公式对 $n-1$ 时成立.

(c) 写出  $(a+b+c)^n$  的展开公式.

7. 设由0, 1两元素组成的集, 其加法, 乘法为:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

证明这一集按上述加法、乘法是一个域。

8. 形如 $a+b\sqrt{5}$ 的数,  $a, b$ 为有理数, 证明按通常的加法、乘法, 一切数 $a+b\sqrt{5}$ 的集构成一个域。
9. 研究一切形如 $a+b\sqrt{6}$ 的数,  $a, b$ 是有理数, 这个集是否满足域公理系?
10. 设 $a, b$ 是实数, 证明 $a+bi$ 组成的复数系是个域。

### § 1.3 序公理与不等式

除了实数系还有若干数系满足域公理系。为了把实数系区别开来, 还要增加描述实数系的域性质之外的公理, 其中之一是区别正负数的不等式公理, 也叫序公理。

序公理 (不等式公理) 数系中存在一个称为正数的集, 满足 (i) 数系中每一数 $a$ 有且仅有为正、为零或 $-a$ 为正这三种情况之一成立。 (ii) 有限个正数的和及积都为正数。

把序公理加到域公理系, 这时只有具有直线顺序的数系才能满足公理系, 所谓直线顺序是指能使数与直线上的点保持顺序相对应。有理数系、实数系满足域公理及序公理, 而复数系不满足序公理。

**定义** 满足域公理系及序公理的数系称为有序域。有序域中一个数 $a$ 是负数当且仅当 $-a$ 是正数。若 $a$ 和 $b$ 是数, 称 $a > b$  (读为 $a$ 大于 $b$ ), 当且仅当 $a - b$ 是正数。称 $a < b$  (读为 $a$ 小于 $b$ ), 当且仅当 $a - b$ 是负数。

#### 定理1.15

- (i)  $a > 0 \iff a$ 是正的;
- (ii)  $a < 0 \iff a$ 是负的;

$$(iii) a > 0 \iff -a < 0;$$

$$(iv) a < 0 \iff -a > 0;$$

(v)  $a, b$  是数, 那么以下三种情况有且仅有一种成立:  $a > b$ , 或  $a = b$ , 或  $a < b$ ;

$$(vi) a < b \iff b > a.$$

**定理1.16** 若  $a, b, c$  是数, 且  $a > b$ , 那么

$$a + c > b + c \quad \text{及} \quad a - c > b - c.$$

**证明** 因为  $a > b$ , 由定义及定理1.15的(i)得  $a - b > 0$ .

因此

$$(a + c) - (b + c) = a - b > 0 \quad \text{及} \quad (a - c) - (b - c) = a - b > 0. \quad \text{有} \quad a + c > b + c \quad \text{及} \quad a - c > b - c.$$

**定理1.17**

(i) 若  $a > 0$  及  $b < 0$ , 那么  $ab < 0$ .

(ii) 若  $a < 0$  及  $b < 0$ , 那么  $ab > 0$ .

(iii)  $1 > 0$

**定理1.18**

(i)  $a, b$  均为正或均为负, 当且仅当  $ab > 0$ ;  $a$  与  $b$  反号, 当且仅当  $ab < 0$ .

(ii) 若  $a \neq 0, b \neq 0$ , 那么  $ab$  与  $\frac{a}{b}$  同号.

**定理1.19**

(i) 若  $a > b, c > 0$ , 那么  $ac > bc$  及  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ .

(ii) 若  $a > b, c < 0$ , 那么  $ac < bc$  及  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ .

(iii) 若 $a, b$ 同号且 $a > b$ , 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

**定理1.20** 若 $a > b$ 及 $b > c$ , 那么 $a > c$ .

采用一水平轴上的点来表示实数可使代数问题获得几何解释。于轴上取一适当的点为原点, 原点表示数零, 原点右边的点表示正数, 左边的点表示负数(图1.1).



图 1.1

每一实数对

应直线上的一个点; 反过来, 直线上的每个点对应一个实数。

这样 $a < b$ 也可读为 $a$ 在 $b$ 之左。用几何的观点来看不等式, 往往有助于问题的解决。若 $a, b$

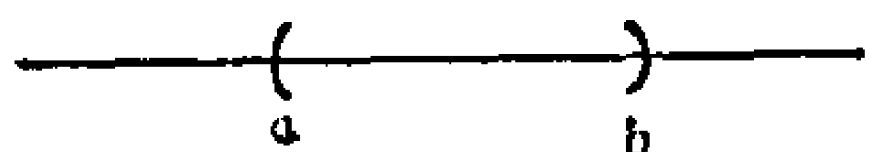


图 1.2

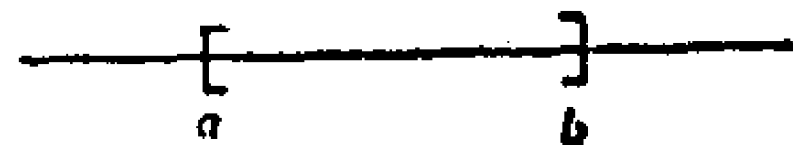
是两个数且 $a < b$  (图1.2), 从

$a$ 到 $b$ 的开区间是大于 $a$ 小于 $b$ 的一切数的集, 即 $a, b$ 之间的一切数的集。数 $x$ 在 $a, b$ 之间是指 $x > a$ 与 $x < b$ 都成立。简记为

$$a < x < b$$

从 $a$ 到 $b$ 的闭区间由 $a, b$ 之间的所有数连同 $a$ 与 $b$ 所构成的集

(图1.3). 若数 $x$ 不小于 $a$ 记为 $x \geq a$ ,



读作“ $x$ 大于等于 $a$ ”。 $x$ 不大于 $b$ 记为

图 1.3

$x \leq b$ , 读作“ $x$ 小于等于 $b$ ”。从 $a$ 到 $b$ 的闭区间简记为

$$a \leq x \leq b.$$

一区间包含端点 $b$  (或 $a$ ) 但不包含端点 $a$  (或 $b$ ) 称之为左 (或右) 的半开区间, 简记为

$$a < x \leq b \quad (a \leq x < b).$$

用圆括号及方括号表示区间:

$(a, b)$  表示开区间  $a < x < b$ ,

$[a, b]$  表示闭区间  $a \leq x \leq b$ ,

$(a, b]$  表示左半开区间  $a < x \leq b$ ,

$[a, b)$  表示右半开区间  $a \leq x < b$ .

把区间概念推广使之包括无界的情况：把所有大于  $a$  的数集用双重不等式  $a < x < \infty$  来记，并以  $(a, \infty)$  表示。这里“ $\infty$ ”读作“正无穷”，注意“ $\infty$ ”不是数，只是一个表示符号。类似地  $[a, \infty)$ ， $(-\infty, b)$ ， $(-\infty, b]$  分别表示满足  $a \leq x$ ， $x < b$ ， $x \leq b$  的所有数的集，也分别用双重不等式  $a \leq x < \infty$ ， $-\infty < x < b$ ， $-\infty < x \leq b$  来记（图1.4）。

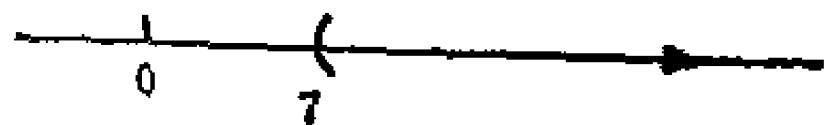


图 1.4

在实数系当中，方程  $3x + 7 = 19$  有唯一的解  $x = 4$ 。二次方程  $x^2 - x - 2 = 0$  有两个解， $x = -1, 2$ 。三角方程  $\sin x = \frac{1}{2}$  的解有  $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \dots$  等无限多个解。不等式  $x^2 \leq 2$  的解为区间  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$  的一切数。通常把使含有  $x$  的等式或不等式成立的一切数的数集叫做解集。例如，不等式

$$3x - 7 < 8$$

的解集为小于 5 的数集，即区间  $(-\infty, 5)$ 。为确定解集，据有序域的各条公理及定理，并采用  $\Longleftrightarrow$  符号，求解步骤如下：

$$3x - 7 < 8 \Longleftrightarrow 3x < 15 \quad (\text{两端加 } 7),$$

$$3x < 15 \Longleftrightarrow x < 5 \quad (\text{两端除以 } 3),$$

解集是区间  $(-\infty, 5)$ 。

**例1** 求不等式  $-7 - 3x < 5x + 29$  的解。

**解**

$$-7 - 3x < 5x + 29 \Longleftrightarrow -36 < 8x \quad (\text{两端加 } 3x - 29)$$

$$\Longleftrightarrow 8x > -36 \quad (\text{定理1.15之(vi)})$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{2}$$

解集是区间  $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$ .

注 为了方便, 介绍一下集的有关概念及符号, 这些概念将贯穿于全书. 一般地说, 一个集是指某种对象的全体. 这些对象具有某种特征 (数、点、线等), 该特征使我们知道对象是否属于给定的集. 若  $S$  是集,  $p$  是集中的对象, 称  $p$  为  $S$  的元素, 记为  $p \in S$ , 读作  $p$  属于  $S$ . 若  $S_1$  与  $S_2$  是两个集, 由至少属于两个集之一的所有元素组成的集称为  $S_1$  与  $S_2$  的并集, 记为  $S_1 \cup S_2$ . 同时属于两个集的元素组成的集称为  $S_1$  与  $S_2$  的交集, 记为  $S_1 \cap S_2$ . 如图 1.5 所示,  $S_1$  画以水平线,  $S_2$  画以垂直线, 那么  $S_1 \cup S_2$  由画线的范围表示; 而  $S_1 \cap S_2$  是画双重线的范围表示. 同样,  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ,  $n$  个集的并集是由至少属于诸  $S_i$  之

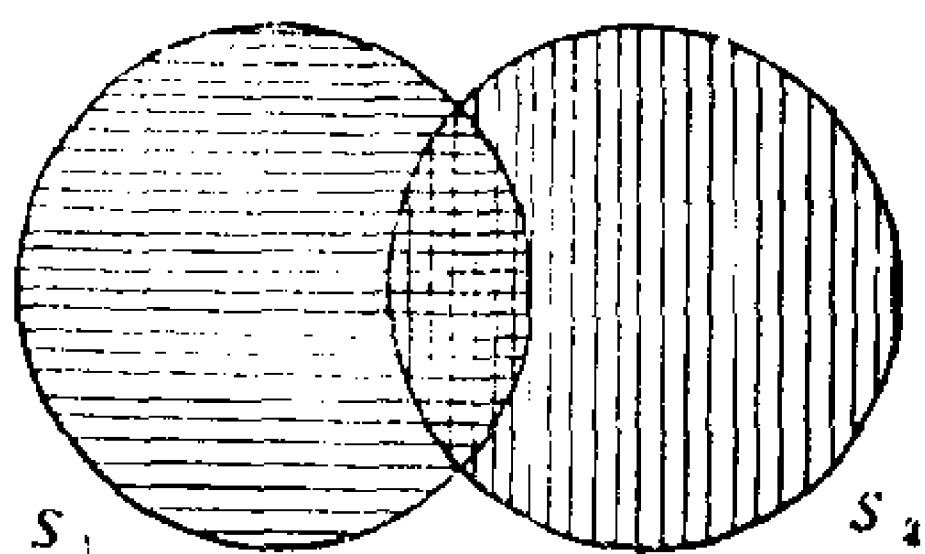


图 1.5

一的所有元素组成的集记为  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ , 简记为  $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ . 同时属于  $n$

个集的所有元素的集称为  $n$  个集的交集, 记为  $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$  或简记为  $\bigcap_{i=1}^n S_i$ .

可能出现  $S_1$  与  $S_2$  没有公共元素的情况. 这时它们的交集是空的, 称为空集, 空集是不含元素的集, 记为  $\phi$ .

常常以集的元素性质作为集的标志. 例如, 偶数的集可以表示成:

$$\{x; x = 2n, n \text{ 是整数} \}.$$

表示法的括号中之最左边的  $x$  为集的一般元素, 冒号右边指出元素的特征. 例如介于 0 与 1 之间的有理数的集表示成:

$$\{x; x \in (0, 1) \text{ 且 } x \text{ 是有理数} \}.$$

如果一个集只含有几个元素, 可以把元素写在括号内. 如由  $-2, 0, 1$  组成的集表示或  $\{-2, 0, 1\}$ . 一个集可

用几个性质为标志，若集的元素同时具有性质A，B与C，可以表示这个集为：

$$\{p: p \text{ 有性质 } A, B \text{ 与 } C\} .$$

区间也可这样表示，例如

$$(0, 2) = \{x: 0 < x < 2\}, \quad [2, 14) = \{t: 2 \leq t < 14\} .$$

用于说明集元素性质时，“与”及“或”各具有专门的意义。一个由具有性质A“或”性质B的元素组成的集是具有性质A的元素的集和具有性质B的元素的集的并集。可以象征地记为：

$\{x: x \text{ 有性质 } A \text{ 或性质 } B\} = \{x: x \text{ 有性质 } A\} \cup \{x: x \text{ 有性质 } B\}$ 。一个由具有性质A“与”性质B的元素组成的集是具有性质A的集与具有性质B的集的交集。即

$$\{x: x \text{ 有性质 } A \text{ 与性质 } B\} = \{x: x \text{ 有性质 } A\} \cap \{x: x \text{ 有性质 } B\} .$$

设A，B是两个集，若每一A的元素是B的元素，我们说A是B的子集，记为 $A \subset B$ 。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 便等价于 $A = B$ 。

**例2** 解不等式： $\frac{3}{x} < 5 \quad (x \neq 0)$ 。

**解** 既然x可正可负，把问题分为两种情况：(i) x为正，(ii) x为负。要求的解集可记为 $S_1$ 与 $S_2$ 的并

$$S_1 = \{x: \frac{3}{x} < 5 \text{ 与 } x > 0\}, \quad S_2 = \{x: \frac{3}{x} < 5 \text{ 与 } x < 0\} .$$

当  $x \in S_1 \iff 3 < 5x \text{ 与 } x > 0,$

$$\iff x > \frac{3}{5} \text{ 与 } x > 0,$$



$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{5}.$$

当  $x \in S_2 \Leftrightarrow 3 > 5x$  与  $x < 0$ ,

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{5} \text{ 与 } x < 0,$$

$$\Leftrightarrow x < 0.$$

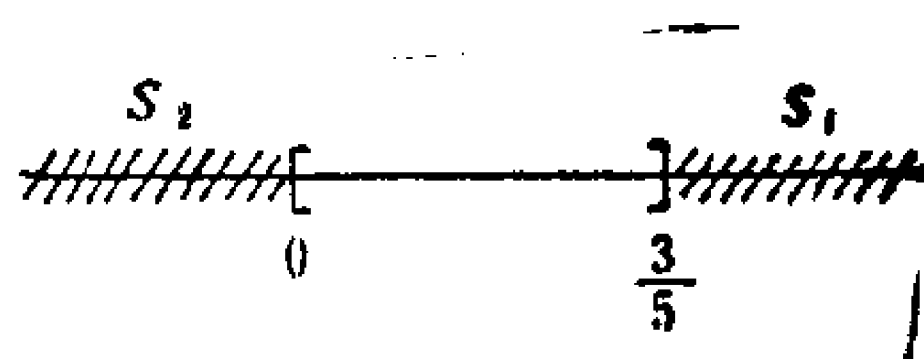


图 1.6

于是解集为:

$$S_1 \cup S_2 = \left(\frac{3}{5}, \infty\right) \cup (-\infty, 0) \text{ (图1.6)}.$$

**例3** 解不等式:  $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \quad (x \neq -2).$

**解** 如同例2, 解集是  $S_1 \cup S_2$ , 这里

$$S_1 = \left\{ x: \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \text{ 与 } x+2 > 0 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ x: \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \text{ 与 } x+2 < 0 \right\}.$$

$$x \in S_1, \quad \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2x-3) < x+2 \text{ 与 } x+2 > 0,$$

$$\Leftrightarrow 5x < 11 \text{ 与 } x+2 > 0,$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{11}{5} \text{ 与 } x > -2$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-2, \frac{11}{5}\right).$$

$$x \in S_2, \quad \frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(2x-3) > x+2 \text{ 与 } x+2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 5x > 11 \quad \text{与} \quad x + 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{11}{5} \quad \text{与} \quad x < -2.$$

因为不存在 $x$ 同时满足  $x > \frac{11}{5}$  与  $x < -2$ , 集 $S_2$ 为空集。解集为

$$S_1 = \left( -2, \frac{11}{5} \right) \quad (\text{图1.7}).$$

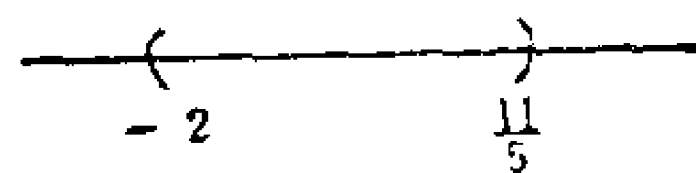


图 1.7

如果读者不熟悉绝对值的概念和包含绝对值的不等式及方程的解法, 可参看书末之附录1.

## 习 题

1. 考察由 $a + b\sqrt{7}$ 组成的域, 这里 $a, b$ 是有理数, 这个域是否满足序公理? 证明你的回答。
2. 研究 $ai\sqrt{7}$  ( $a$ 为实数,  $i = \sqrt{-1}$ )组成的集, 证明可以定义集的元素顺序使之满足序公理. 这样的集称为序集, 这个序集是否构成域?
3. 设 $a, b$ 是有理数, 证明所有形如 $a + bi$ 的复数的集满足域公理系。
4. 解下列不等式并于数轴上画出解集示意图:

$$(i) 2x - 2 < 27 + 4x; \quad (ii) 5(x - 1) > 12 - (17 - 3x);$$

$$(iii) \frac{2x + 1}{8} < \frac{3x - 4}{3};$$

$$(iv) \frac{x + 10}{6} + 1 - \frac{x}{4} > \frac{4 - 5x}{6} - 1.$$

5. 求联立不等式的解 (其解集是各不等式解集的交集):

$$(i) \quad 2x - 3 < 3x - 2, \quad 4x + 1 < 2x + 3;$$

$$(ii) \quad 3x + 5 > x + 1, \quad 4x - 3 < x + 6;$$

$$(iii) \quad 4 - 2x < 1 + 5x, \quad 3x + 2 < x - 7.$$

6. 求不等式的解集:

$$(i) \quad \frac{x-2}{x} < 3; \quad (ii) \quad \frac{x+2}{x-1} < 4;$$

$$(iii) \quad \frac{x}{2-x} < 2; \quad (vi) \quad \frac{x+2}{x-3} < -2;$$

7. 证明定理1.17.

8. 证明定理1.18.

9. 证明定理1.19.

10. 证明定理1.20.

11. 应用本节定理证明: 若  $a > b$ ,  $c > d$ , 那么

$$a + c > b + d.$$

12. 应用本节定理证明:

(i) 若  $a > b > 0$ ,  $c > d > 0$ , 那么  $ac > bd$ .

(ii) 若  $a < b < 0$ ,  $c < d < 0$ , 那么  $ac < bd$ .

## § 1.4 数学归纳法, 自然数的定义

数学归纳法能够作为有序域公理系的结果被导出. 由于数学归纳原理以自然数定义为基础, 因此把两者放到一起来研究.

**定义** 一数集 $S$ 称为是归纳的，当且仅当

(a)  $1 \in S$ ; (b) 如果 $x \in S$ ，则 $(x+1) \in S$ 。

自然数系，整数系，有理数系，实数系都是归纳集。0与10之间的实数只满足(a)不满足(b)，它不是归纳集。有限个实数的集不满足(b)，不可能是归纳集。

自然数系以它是最“小”的实数的归纳集为特征，可用这一特征来作为自然数的逻辑定义。

**定义** 一个实数称为自然数，当且仅当它属于每一个实数的归纳集。所有自然数的集用符号 $N$ 表示。

**定理1·21** 自然数的集 $N$ 是一归纳集。

**证明** 我们应当证明 $N$ 满足归纳集定义中的性质(a)与(b)。凡归纳集按(a)应含有元素1，因此有 $1 \in N$ 。现设 $K \in N$ 。那么由自然数的定义， $K$ 属于每一归纳集 $S$ 。而对归纳集 $S$ ，当 $K \in S$ 便有 $(K+1) \in S$ 。于是 $K+1$ 属于每一归纳集，因而 $(K+1)$ 是自然数，即 $(K+1) \in N$ 。因此 $N$ 具有性质(a)与(b)， $N$ 是归纳集。

**定理1·22(数学归纳法原理)** 若 $S$ 是由自然数组成的归纳集，那么 $S = N$ 。

**证明** 因为 $S$ 是归纳集，由 $N$ 的定义，有 $N \subset S$ 。另一方面 $S$ 由自然数组成，又有 $S \subset N$ ，所以 $N = S$ 。

通常数学归纳法是这样叙述的：如果和自然数 $n$ 有关的命题：(i)当 $n=1$ 时成立，(ii)假定 $n=K$ 成立，则对 $n=K+1$ 成立。那么命题对一切自然数成立。容易明白定理1·22与上述叙述形式只是表面上不同而已。现在举例说明如何应用数学归纳原理。

**例1** 证明对每一自然数 $n$ ，有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.1)$$

**解** 设 $S$ 是使公式(1.1)成立的自然数 $n$ 的集. 证明 $S$ 是归纳集.

(a) 因为公式(1.1)对 $n=1$ 成立. 所以 $1 \in S$ .

(b) 设 $K \in S$ , 那么公式(1.1)对 $n=K$ 成立. 两端加 $K+1$ , 有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + K + (K+1) &= \frac{K(K+1)}{2} + (K+1) \\ &= \frac{(K+1)(K+2)}{2}, \end{aligned}$$

公式对 $n=K+1$ 成立. 于是 $(K+1) \in S$ .

综合(a)与(b),  $S$ 是由自然数组成的归纳集, 由定理1.22,  $S = \mathbf{N}$ . 即公式对所有自然数成立.

**例2** 证明对 $n > 3$ 的自然数 $n$ , 有

$$n! > 2^n \quad (\text{这里 } n! \text{ 表示 } 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n).$$

**解** 设 $S$ 是 $n > 3$ 且 $n! > 2^n$ 成立的自然数及1, 2, 3所组成的集. 证明 $S$ 是归纳集.

(a) 由 $S$ 的定义 $1 \in S$ .

(b) 设 $K \in S$ . 即 $K=1, 2, 3$ , 或 $K > 3$ 且 $K! > 2^K$ .

若 $K=1$ ,  $K+1=2 \in S$ ; 若 $K=2$ ,  $K+1=3 \in S$ ; 若 $K=3$ , 那么 $K+1=4$ , 因为 $4! = 24$ ,  $2^4 = 16$ ,  $4! > 2^4$ , 所以 $4 \in S$ .

若 $K > 3$ 且 $K! < 2^K$ , 显然 $K+1 > 3$ 且

$$(K+1)! = (K+1) \cdot (K!) > (K+1) \cdot 2^K > 3 \cdot 2^K > 2^{K+1}.$$

于是 $(K+1) \in S$ . 因此 $S$ 是归纳集. 由定理1.22,  $S = \mathbf{N}$ . 这样证明了当 $n$ 为大于3的自然数时, 便有 $n! > 2^n$ .

注 例2的 $n! > 2^n$ 在 $n=1, 2, 3$ 时并不成立, 必须直接定义 $n=1, 2, 3$ 属于集 $S$ . 遇到象例2这样的问题, 可把定理1.22作如下的修正: 称一实数集 $S$ 具有修正的归纳性质, 如果 (1)  $S$ 有一最小数; (2) 当 $x \in S$ 时有 $(x+1) \in S$ . 定理1.22成为: 若 $S$ 是具有修正的归纳性质的自然数的集, 那么 $S$ 包含大于 $S$ 内最小自然数的所有的自然数.

可以用数学归纳法证明 § 1.2 中的命题1.1、命题1.2、命题1.4等, 我们把它们重述为如下的定理1.23, 1.24及1.25. 后两定理的证明留给读者.

**定理1.23** 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是给定的有限序列, 那么, 存在唯一的序列 $b_1, b_2, \dots, b_n$ , 具有性质:

$$b_1 = a_1 \quad (1.2)$$

$$b_{i+1} = b_i + a_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-1, \text{当 } n>1) \quad (1.3)$$

**证明** 设 $S$ 为使定理成立的一切自然数 $n$ 的集. 我们证明 $S$ 是归纳集. 因为 $b_1 = a_1, 1 \in S$ . 设 $a_1, a_2, \dots, a_K, a_{K+1}$ 是给定的且 $K \in S$ . 那么有唯一的序列 $b_1, b_2, \dots, b_K$ 满足 $b_1 = a_1$ , 及当 $K>1$ 时,  $b_{i+1} = b_i + a_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, (K-1))$ ; 当 $K=1$ 时,  $b_1 = a_1$ . 定义 $b_{K+1} = b_K + a_{K+1}$ . 于是序列 $b_1, b_2, \dots, b_K, b_{K+1}$ 满足定理的等式 (1.2) 和 (1.3), 还应证明这样序列是唯一的. 设 $b'_1, b'_2, \dots, b'_K, b'_{K+1}$ 是具有同样性质的另一序列. 因为 $K \in S$ , 当 $i=1, 2, \dots, K$ 时有 $b'_i = b_i$ , 而

$$b'_{K+1} = b'_K + a_{K+1} = b_K + a_{K+1} = b_{K+1}.$$

于是 $(K+1) \in S$ . 因此集 $S$ 是归纳的, 由定理1.22  $S = \mathbb{N}$ , 即定理对一切自然数成立.

**定理1.24** 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是给定的有限序列, 那么, 存在唯一的序列 $C_1, C_2, \dots, C_n$ , 满足

$$c_1 = a_1$$

$$c_{i+1} = c_i \cdot a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, \text{ 当 } n > 1) .$$

**定理1·25** 若 $a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+n}$ 是有限序列, 那么

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{m+n} a_i = \left( \prod_{i=1}^m a_i \right) \cdot \left( \prod_{i=m+1}^{m+n} a_i \right).$$

直观地, 大家知道自然数集 $\mathbf{N}$ 就是正整数集。自然数是正数的事实可从序公理及 $\mathbf{N}$ 的定义导出。下一定理的证明请读者完成。

**定理1·26** 自然数是正数。

下面三个定理指出自然数集是有序的, 对加法及乘法运算是封闭的 (即满足公理 $A_1$ 与 $M_1$ ) 。

**定理1·27** 若 $m, n$ 是自然数, 那么或者 $n \leq m$ 或者有一自然数 $p$ 使 $n = m + p$ 成立。

**定理1·28** 若 $m, n$ 是自然数, 那么 $m + n$ 是自然数。

**定理1·29** 若 $m, n$ 是自然数, 那么 $m \cdot n$ 是自然数。

这三个定理的证明都留给读者。定理1·27说明自然数集是有序集。下面定理指出自然数集的序还有更好的性质——良序性。

**定理1·30** (良序性定理) 任意的一个非空自然数集 $T$ 含有最小数。

**证明** 设 $K$ 是 $T$ 的数, 定义一个由自然数组成的集 $S = \{p: p \in T \text{ 与 } p \leq K\}$ 。那么 $S \subset \{1, 2, \dots, K-1, K\}$ 。

这说明 $S$ 是有限个自然数的集， $S$ 有最小的元素，表示为 $s$ 。现在我们来证明 $s$ 是 $T$ 的最小元素。首先因为 $s \in S$ 及 $S \subset T$ ，所以 $s \in T$ 。设 $t \in T$ 且 $t \neq s$ 。当 $t > K$ ，由 $K \geq s$ 得 $t > s$ 。另一方面，当 $t \leq K$ ，那么 $t \in S$ ， $s$ 是 $S$ 的最小数且 $s \neq t$ ，因为必有 $s < t$ 。总之 $s$ 是 $T$ 的最小数。

§1.1、§1.3的域公理及序公理虽然给出了实数运算及不等式关系的逻辑基础，但这一公理系并不以实数系为唯一的解释。有理数系与实数系都是有序域。要得到以实数系为唯一解释的公理系还要增加新的公理。所要增加的新公理是描写实数系连续性的连续性公理，将在§2.5中来完成这一工作。

## 习 题

1. 用数学归纳法证明下列公式：

$$(i) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$(ii) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;$$

$$(iii) \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

$$(iv) \sum_{i=1}^n i(i+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);$$

$$(v) \sum_{i=1}^n i(i+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7);$$



$$(v\ i) \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. 设  $p, q, r$  是自然数且满足  $p+q < p+r$ . 证明

$$q < r.$$

3. 设  $p, q, r$  是自然数且满足  $pq < pr$ . 证明

$$q < r$$

4. (i) 证明正有理数集是归纳集.

(ii) 设  $a, b$  是自然数, 一切  $a + b\sqrt{5}$  组成的集是归纳集吗?

(iii) 所有复数的集是归纳集吗?

5. 用数学归纳法证明下列等式.

(i)  $a, d$  是实数,

$$\sum_{i=1}^n [a + (i-1)d] = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d],$$

$$(i\ i) \sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

(iii)  $(1+a)^n > 1+na$ ,  $a$  为实数  $a \geq 0$ ,  $n$  为自然数.

$$(i\ v) \sum_{i=1}^n 3^{2i-1} = \frac{1}{8} \cdot 3(9^n - 1).$$

6. 证明定理 1.24.

7. 证明定理 1.25.

8. 证明定理 1.26.

9. 证明定数 1.27. [提示: 设  $m$  是固定的自然数, 定义  $S$  是使

定理成立的所有自然数的集. ]

10. 证明定理1.28. [提示: 使用定理1.27]

11. 证明定理1.29.

12. 用归纳法证明 § 1.2 的命题1.5.

13. 用归纳法证明 § 1.2 的命题1.6.

14. 证明下列命题: 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  及  $b_1, b_2, \dots, b_n$  是两有限序列且对  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $b_i \neq 0$ , 那么

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdots \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{b_1 b_2 \cdots b_n}.$$

## 第二章 连续性和极限

### § 2.1 连 续 性

反映客观世界当中变量依赖关系的函数概念是分析数学的基本概念。

全体实数的集以 $R_1$ 表示。全体二个实数的序组(简称序偶)的集以 $R_2$ 表示。全体三个实数的序组的集以 $R_3$ 表示, 全体 $N$ 个实数的序组的集以 $R_N$ 表示。

**定义** 称 $R_2$ 中的一个集 $\{(x, y); x \in D \subset R_1, y \in S \subset R_1\}$ 为 $R_1$ 到 $R_1$ 的关系。关系的序偶 $(x, y)$ 的第一个元 $x$ 组成的集 $D$ 称为关系的定义域; 第二个元 $y$ 的集 $S$ 称为关系的值域。如果 $R_1$ 到 $R_1$ 的关系 $f$ 不含有第一元相同的两个序偶, 称 $f$ 为从 $R_1$ 到 $R_1$ 的函数。表示为 $f: R_1 \rightarrow R_1$ 。若 $D$ 是 $f$ 的定义域,  $S$ 是 $f$ 的值域, 也用 $f: D \rightarrow S$ 表示函数。函数也称映射, 映射是函数的同义语。一个函数是这样的关系: 对关系定义域的每一 $x$ 有唯一的 $y$ 属于关系的值域, 这样的序偶 $(x, y)$ 组成函数。有时将函数表示为 $f: x \rightarrow y$ 或 $y = f(x)$ , 或 $x \rightarrow f(x)$ 。

在初等微积分里。所研究的函数绝大多数是用简单公式表示的函数, 这种函数几乎恒为可以求导的, 导数不存在的点仅是个别的点, 例如函数 $\frac{1+x^2}{x}$ ,  $\operatorname{ctg} x$ ,  $\sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$

点不存在导数。这种函数的图象都是光滑的曲线。现实要求

我们研究更广的函数类。为此，引入连续函数的概念。

**定义** 设 $f$ 是以 $D \subset \mathbf{R}_1$ 为定义域的函数。称 $f$ 在 $a$ 点连续，当且仅当(i)点 $a$ 属于包含在 $D$ 内的一开区间 $I$ 内；(ii)对每一正数 $\varepsilon$ 存在一正数 $\delta$ 使当 $|x-a| < \delta$ ，有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 。若 $f$ 在集 $S$ 的每一点连续，称 $f$ 在 $S$ 上连续。在定义域上连续的函数称为连续函数。

在一点连续的几何意义如图2·1所示。不等式

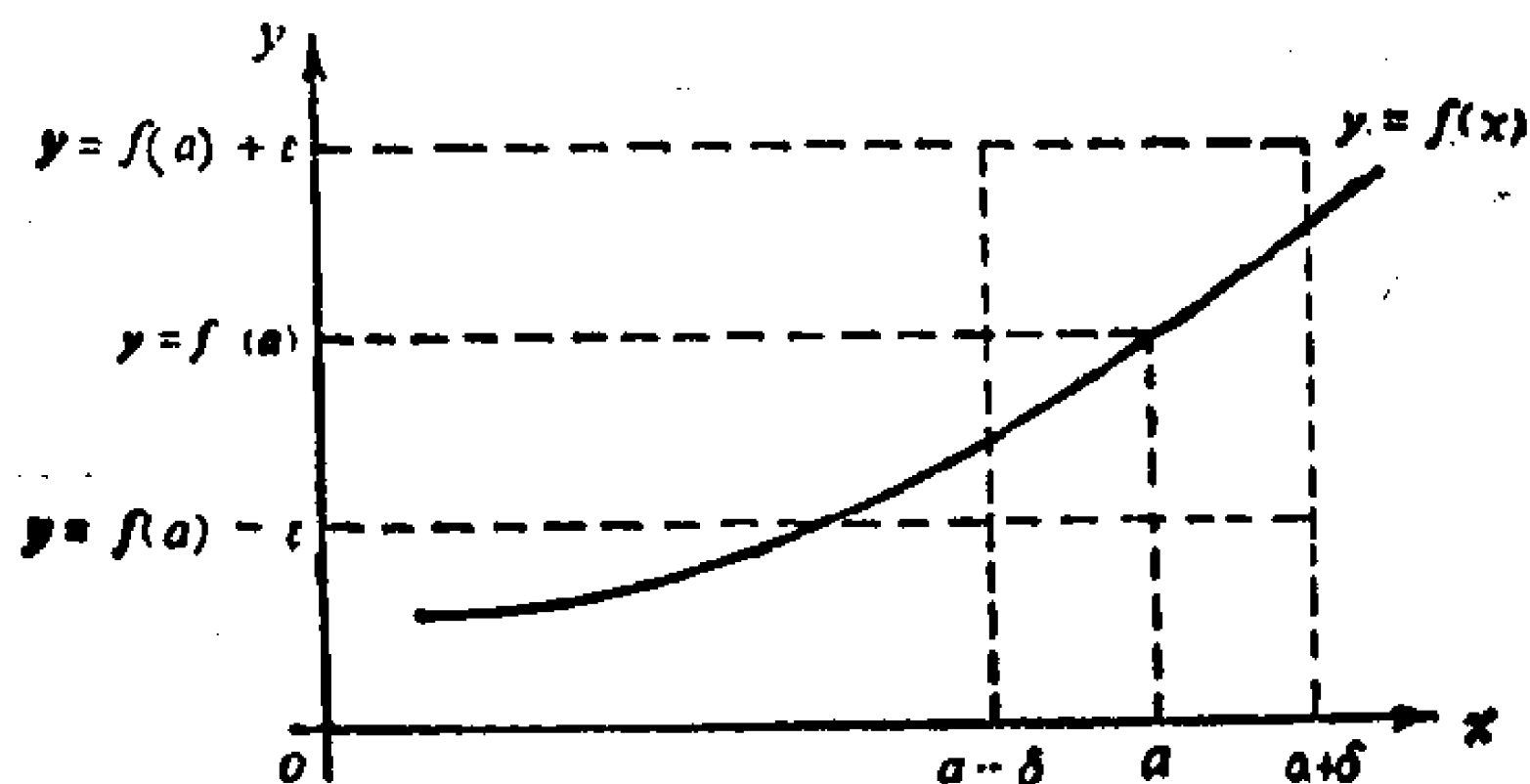


图 2·1

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  与双重不等式

$$- \varepsilon < f(x) - f(a) < \varepsilon \text{ 或 } f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$$

等价。同样地， $|x-a| < \delta$  等价于

$$a - \delta < x < a + \delta.$$

于平面直角坐标系中画出： $x = a - \delta$ ,  $x = a + \delta$ ,  $y = f(a) - \varepsilon$  及  $y = f(a) + \varepsilon$  等四条直线。这四条直线确定一个以点 $(a, f(a))$ 为中心的矩形。 $f$ 在 $a$ 点连续的几何解释是对每一 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使 $(a - \delta, a + \delta)$ 区间内的一切 $x$ ， $f$ 的图象保留在这一矩形范围之内。

按定义直接证明函数的连续性，一般说是很困难的。这样的证明要对每一正数 $\varepsilon$ 都找到相应的 $\delta$ ，并证明 $f$ 图象的相

应部分落在所述的矩形里。如果函数 $f$ 以充分简单的公式给出时，对于 $\varepsilon$ 有可能求出相应 $\delta$ 的表示式。下面举例说明求相应 $\delta$ 的方法。

**例1** 给定函数 $f: x \rightarrow \frac{1}{x+1}$ ,  $x \neq -1, a=1, \varepsilon=0.1$ , 求使当 $|x-1| < \delta$ , 有 $|f(x)-f(1)| < 0.1$ 的 $\delta$ 。

**解** 画出 $f$ 的草图并注意当 $x > -1$ 时函数是递减的 (图2.2),  $f(1) = \frac{1}{2}$ , 从方程 $f(x)-f(1) = 0.1$ 及方程 $f(x)-f(1)$

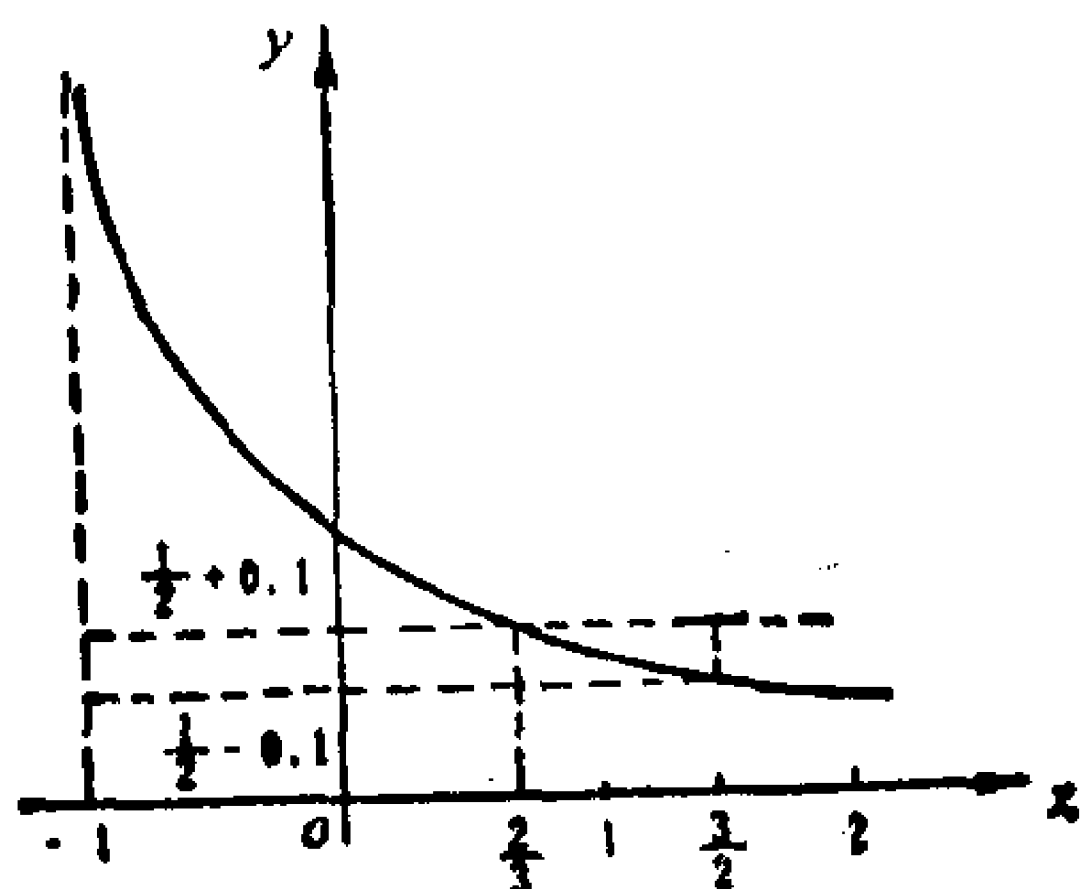


图 2.2

$= -0.1$ 分别求解 $x$ :

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = 0.1 \iff x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = -0.1 \iff x = \frac{3}{2}$$

因为 $f$ 在 $x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 内是递减的, 显然 $f$ 的图象位于由

直线 $x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} - 0.1, y = \frac{1}{2} + 0.1$ 构成的矩形内。

应当选取 $a = 1$ 点到 $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$ 两点距离较小的 $\frac{1}{3}$ 为相应于 $\varepsilon =$

$0.1$ 的 $\delta$ , 即 $\delta = \frac{1}{3}$ . 重要的一点是, 对给定的 $\varepsilon$ 得到了某一相

应的 $\delta$ , 那么比这一 $\delta$ 更小的值仍然适合于同一 $\varepsilon$ 的要求。如

本例中相应于 $\varepsilon = 0.1$ 的 $\delta$ 可取为 $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{10}$ 等比 $\frac{1}{3}$ 小的任何一个正数。

## 例2 给定函数

$$f: x \rightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}, & x \geq 0 \quad x \neq 4, \\ 4 & x = 4. \end{cases}$$

若取 $\varepsilon = 0.01$ , 求使当 $|x-4| < \delta$ , 有 $|f(x) - f(4)| < 0.01$ 的 $\delta$ .

解 当 $x \neq 4$ ,

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x}+2$$

$f$ 的图象如图2.3.  $f$ 是一增函数. 解方程

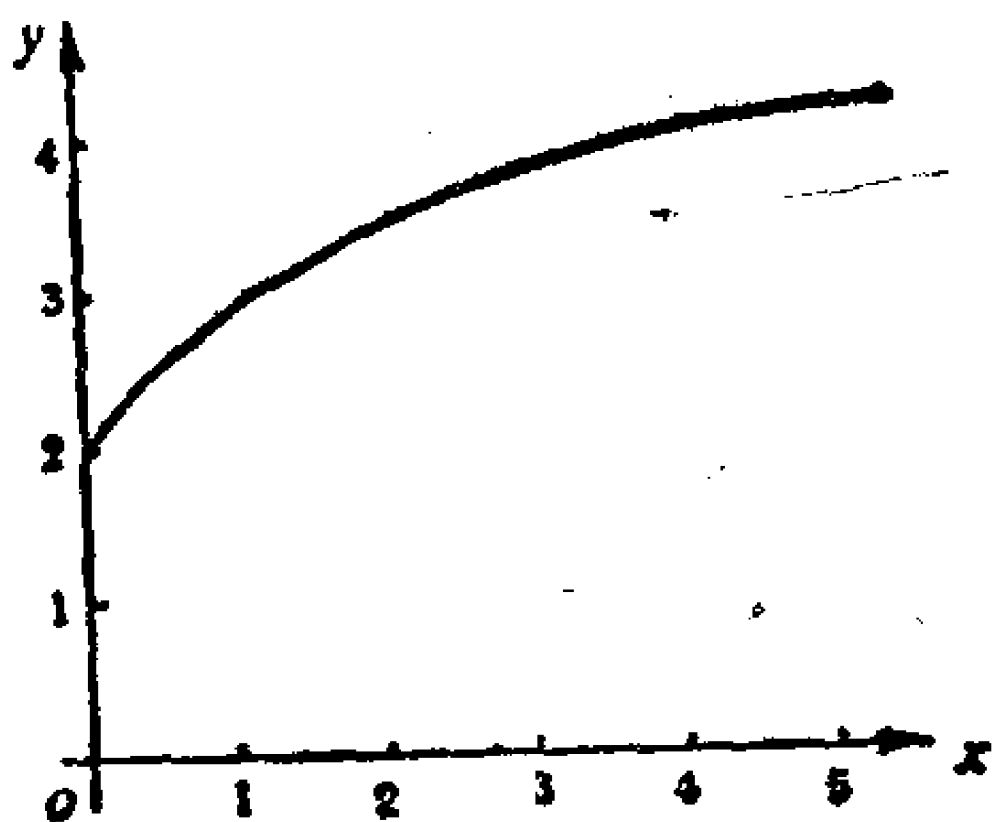


图 2.3

$$f(x) - f(4) = 0.01 \quad \text{及} \quad f(x) - f(4) = -0.01.$$

$$\sqrt{x} + 2 - 4 = 0.01 \iff \sqrt{x} = 2 + 0.01 \iff x = 4.0401.$$

$$\sqrt{x} + 2 - 4 = -0.01 \iff \sqrt{x} = 2 - 0.01 \iff x = 3.9601.$$

因 $f$ 是递增的, 当 $x \in (3.9601, 4.0401)$ , 有 $|f(x) - f(4)| < 0.01$ . 取 $\delta = \min((4 - 3.9601), (4.0401 - 4)) = 0.0399$ , 当 $|x - 4| < \delta$ , 便有 $|f(x) - f(a)| < 0.01$ .

常常遇到函数的定义域 $D$ 是 $\mathbf{R}_1$ 中的区间除去区间内的一点或一端点的情况. 例如函数 $x \rightarrow -\frac{x^2 + 1}{x}$ , 除 $x = 0$ 点外处处

有定义.  $\log x$ 对所有 $x > 0$ 有定义, 但对 $x = 0$ 无定义.  $\operatorname{ctg} x$

对不包含 $K\pi$  ( $K$ 表示整数) 的区间有定义. 函数 $\frac{x^3 + 8}{x + 2}$  对

$x = -2$ 无定义. 一般的, 函数是两多项式的商, 那么定义域要除去分母等于零的点.

讨论在除去的这种区间内的点或区间端点附近函数的变化情况, 需要引进函数极限的概念.

**定义** 设 $f$ 是从定义域 $D \subset \mathbf{R}_1$ 到 $\mathbf{R}_1$ 的函数,  $a, L$ 是实数. 称在 $x$ 趋向于 $a$ 时 $f$ 趋向于极限 $L$ , 当且仅当(i)存在包含 $a$ 点的开区间 $I$ ,  $I$ 可能除去 $a$ 点之外包含于 $D$ 内. (ii)对每一正数 $\varepsilon$ 存在一个正数 $\delta$ 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

记为: 当 $x \rightarrow a, f(x) \rightarrow L$ ; 当以 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 表示 $L$ , 也常写成

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

注 (i)  $f$  在  $a$  点连续当且仅当  $a \in D$  并且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . (ii) 极限定义中

$0 < |x - a| < \delta$  与连续性定义中  $|x - a| < \delta$  不同, 前者排除了  $x = a$ , 即极限定义中  $f$  可以在  $a$  点没有定义.

## 习 题

设下列 1—8 题中, 给定的函数在  $a$  点连续, 按连续性定义对给定之  $\varepsilon$  求相应的  $\delta$ , 并画出图形.

1.  $f(x) = 2x + 5, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.01;$

2.  $f(x) = 1 - 3x, \quad a = 2, \quad \varepsilon = 0.01;$

3.  $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 2, \quad \varepsilon = 0.01;$

4.  $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.01;$

5.  $f(x) = 1 + x^2, \quad a = 2, \quad \varepsilon = 0.01;$

6.  $f(x) = x^3 - 4, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.5;$

7.  $f(x) = x^3 + 3x, \quad a = 1, \quad \varepsilon = 0.5;$

8.  $f(x) = \sqrt{2x + 1}, \quad a = 4, \quad \varepsilon = 0.1.$

设下列 9—17 题中, 给定函数在包含  $a$  点的区间内除了  $a$  点外有定义. 对给定  $L$  和  $\varepsilon$ , 求使当  $0 < |x - a| < \delta$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$  成立的  $\delta$ , 并画出草图.

9.  $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad a = -3, \quad L = -6, \quad \varepsilon = 0.005;$

10.  $f(x) = \frac{\sqrt{2x} - 2}{x - 2}, \quad a = 2, \quad L = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon = 0.01;$



$$11. f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad a = 2, \quad L = 4, \quad \varepsilon = 0.01$$

$$12. f(x) = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}, \quad a = 9, \quad L = 6, \quad \varepsilon = 0.1;$$

$$13. f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad a = 2, \quad L = 12, \quad \varepsilon = 0.5;$$

$$14. f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}, \quad a = -1, \quad L = 12, \quad \varepsilon = 0.5;$$

$$15. f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}, \quad a = 1, \quad L = 3, \quad \varepsilon = 0.1;$$

$$16. f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0, \quad L = 1, \quad \varepsilon = 0.1;$$

$$17. f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad a = 0, \quad L = 1, \quad \varepsilon = 0.1.$$

$$18. \text{证明 } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \text{ 不存在.}$$

19. 函数  $f(x) = x \operatorname{ctg} x$  在  $x = 0$  点无定义, 能否补充  $f$  于  $x = 0$  点的定义, 使  $f(x)$  成为连续函数?

## § 2.2 极限定理

极限定理是证明微积分定理的基础.

**定理 2.1 (极限的唯一性)** 设  $f$  是  $R_1 \rightarrow R_1$  的函数, 当

$x \rightarrow a$ ,  $f(x) \rightarrow L$  及  $f(x) \rightarrow M$ , 那么  $L = M$ .

**证明** 假定  $L \neq M$  将导致矛盾. 取  $\varepsilon = \frac{1}{2} |L - M|$ . 依极限定义, 对这一正数  $\varepsilon$ , 存在一个  $\delta_1 > 0$  使当  $0 < |x - a| < \delta_1$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$  成立. 同样, 存在  $\delta_2 > 0$ , 使当  $0 < |x - a| < \delta_2$  有  $|f(x) - M| < \varepsilon$  成立. 如图 2.4 所示取  $x_0$ , 满足  $0 < |x_0 - a| < \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ . 记

$$L - M = (L - f(x_0)) + (f(x_0) - M).$$

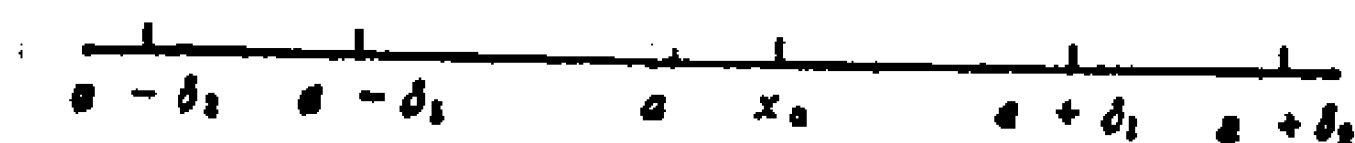


图 4.2

于是

$$\begin{aligned} |L - M| &\leq |L - f(x_0)| + |f(x_0) - M| < \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon = 2 \cdot \left( \frac{1}{2} |L - M| \right) = |L - M|, \end{aligned}$$

出现  $|L - M| < |L - M|$  的矛盾.

**定理 2.2 (常数的极限)** 设  $c$  是常数, 对  $\mathbb{R}_1$  的一切  $x$ ,  $f(x) = c$ . 那么, 对每一数  $a$  有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$$

**证明** 对每一正数  $\varepsilon$ , 取  $\delta = 1$ , 便有

$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ , 对  $|x - a| < \delta$  的  $x$  成立.

**定理 2.3 (明显的极限)** 设  $f(x) = x$ , 对每一数  $a$ , 都有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a.$$

**证明** 因为  $f(x) - a = x - a$ , 对每一  $\varepsilon > 0$  取  $\delta = \varepsilon$ , 显然当  $0 < |x - a| < \delta$ , 有  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ .

**定理2.4 (相等函数的极限)** 设  $f$  与  $g$  都是定义域包含集  $S = \{x: 0 < |x - a| < r, r \text{ 为一正数}\}$  的函数, 且当  $x \in S$  时,  $f(x) = g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ . 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

**证明** 因  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ , 对每一  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使当  $0 < |x - a| < \delta$  有  $|g(x) - L| < \varepsilon$ . 如有必要可以减小  $\delta$ , 使  $\delta < r$ . 由  $x \in S$ ,  $f(x) = g(x)$ . 因此, 当  $0 < |x - a| < \delta$  便有  $|f(x) - L| = |g(x) - L| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

**注** 定理2.4中的  $f$  与  $g$  在集  $S$  之外可以不相等;  $f$  或  $g$  也都允许在  $x = a$  无定义.

**定理2.5 (和的极限)** 设  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ . 定义  $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$ . 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2.$$

**证明** 设  $\varepsilon > 0$  是给定的, 那么对  $\frac{\varepsilon}{2}$ , 存在正数  $\delta_1$  与  $\delta_2$ , 使当  $0 < |x - a| < \delta_1$  有  $|f_1(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; 及当  $0 < |x - a| < \delta_2$  有  $|f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 取一比  $\delta_1, \delta_2$  都小的  $\delta > 0$ , 那么, 当  $0 < |x - a| < \delta$  时便有

$$\begin{aligned} |g(x) - (L_1 + L_2)| &= |f_1(x) - L_1 + f_2(x) - L_2| \\ &\leq |f_1(x) - L_1| + |f_2(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

于是  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$

推论 设  $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x) = l_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 定义

$$g(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

那么  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \sum_{i=1}^n L_i$ .

推论可象定理那样直接证明或用定理及归纳法证明, 把它留给读者.

**定理2.6 (积的极限)** 设  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = L_1$  及  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = L_2$ . 定义  $g(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ . 那么  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$ .

**证明** 为了估计  $|g(x) - L_1 L_2|$ , 由等式

$$g(x) - L_1 L_2 = L_2(f_1(x) - L_1) + f_1(x)(f_2(x) - L_2).$$

取绝对值得不等式

$$|g(x) - L_1 L_2| \leq |L_2| \cdot |f_1(x) - L_1| + |f_1(x)| |f_2(x) - L_2|.$$

由假设, 对正数  $\varepsilon_1$  及  $\varepsilon_2$ , 存在相应的正数  $\delta_1$  及  $\delta_2$ , 使

$$\text{当 } 0 < |x - a| < \delta_1, \quad |f_1(x) - L_1| < \varepsilon_1. \quad (2.1)$$

$$\text{当 } 0 < |x - a| < \delta_2, \quad |f_2(x) - L_2| < \varepsilon_2. \quad (2.2)$$

此时  $|f_1(x)| = |f_1(x) - L_1 + L_1|$

$$\leq |f_1(x) - L_1| + |L_1| < |L_1| + \varepsilon_1.$$

把  $|L_1| + \varepsilon_1$  用  $M$  来记.

现在对于给定  $\varepsilon > 0$ , 为了找到相应的  $\delta$ , 使当  $0 < |x - a| < \delta$  有  $|g(x) - L_1 L_2| < \varepsilon$ , 选取 (2.1) 及 (2.2) 中的

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2|L_2| + 1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2M},$$

并记  $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ . 当  $0 < |x - a| < \delta$  有

$$|g(x) - L_1 L_2| \leq |L_2| |f_1(x) - L_1| + |f_1(x)| |f_2(x) - L_2|$$

$$< |L_2| \cdot \frac{\varepsilon}{2|L_2| + 1} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

于是  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$ .

**推论** 设当  $x \rightarrow a, f_i(x) \rightarrow L_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 且

$$g(x) = \prod_{i=1}^n g_i(x), \quad \text{那么} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \prod_{i=1}^n L_i.$$

设函数  $g: D_1 \rightarrow S_1, f: D_2 \rightarrow S_2$  且  $S_1 \subset D_2$ , 那么由  $x \rightarrow f[g(x)]$  所给出的  $D_1$  上的函数  $h$  称为  $f$  与  $g$  的复合函数, 记为  $h = f \circ g$  或  $h(x) = f[g(x)]$ .

**定理 2.7 (复合函数的极限)** 设  $h$  是  $f$  与  $g$  的复合函数, 且  $x \rightarrow a, g(x) \rightarrow L$ , 而  $f$  在  $L$  点连续, 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = f(L).$$

**证明** 因为  $f$  在  $L$  点连续, 对每一  $\varepsilon > 0$ , 存在一  $\delta_1 > 0$  使当  $|t - L| < \delta_1$  有

$$|f(t) - f(L)| < \varepsilon.$$

而由  $x \rightarrow a, g(x) \rightarrow L$ , 对  $\varepsilon' = \delta_1 > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使当

$0 < |x - a| < \delta$  有

$$|g(x) - L| < \varepsilon' = \delta_1.$$

进而有

$$|h(x) - f(L)| = |f[g(x)] - f(L)| < \varepsilon.$$

注 定理2.7要求 $f$ 在 $L$ 点连续,不能减弱为 $\lim_{t \rightarrow L} f(t)$ 存在.本节的习题8就是

例证.

**推论** 若 $g$ 在 $a$ 点连续且 $g(a) = L$ ,  $f$ 在 $L$ 点连续,那么复合函数 $h(x) = f[g(x)]$ 在 $a$ 点连续.

通常把推论叙述成:连续函数的复合函数是连续函数.

**定理2.9 (商的极限)** 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 及 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

且 $M \neq 0$ . 定义 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 那么 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \frac{L}{M}$ .

**证明** 只需证明 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ , 然后应用定理2.6便得本

定理的结论. 对于 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$ , 可以按极限定义完成证明.

下面用另一方法, 即通过证明函数:  $t \rightarrow \frac{1}{t}, t \neq 0$  连续, 把

$$\frac{1}{g(x)} \text{ 看作 } \frac{1}{t} \text{ 与 } g(x) \text{ 的复合函数应用定理2.8得到 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

现在证明函数 $t \rightarrow \frac{1}{t}$ 在 $a \neq 0$ 点连续. 对给定 $\varepsilon > 0$ , 由

$$\left| \frac{1}{t} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|t-a|}{|t \cdot a|}, \text{ 取 } \delta = \min \left\{ \frac{|a|}{2}, \frac{1}{2} a^2 \varepsilon \right\}, \text{ 当 } 0 <$$

$$|t-a| < \delta, \text{ 有 } \left| \frac{1}{t} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|t-a|}{|t \cdot a|} < \frac{2|t-a|}{|a|^2} < \frac{2}{|a|^2} \cdot$$

$$\frac{a^2}{2} \varepsilon = \varepsilon.$$

**定理2.9(不等式的极限)** 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , 且在包含  $a$  的某区间内 ( $a$  点可能除外)  $f(x) \leq g(x)$ , 那么  $L \leq M$ .

**证明** 假定  $L > M$  将导致矛盾. 取  $\varepsilon = \frac{L-M}{2} > 0$ , 由极限定义存在正数  $\delta_1, \delta_2$ , 使当  $0 < |x-a| < \delta_1, |f(x)-L| < \varepsilon$ ; 当  $0 < |x-a| < \delta_2, |g(x)-M| < \varepsilon$ . 选取比  $\delta_1$  与  $\delta_2$  都小的正数  $\delta$ , 且使  $\delta$  小到使  $0 < |x-a| < \delta$  的  $x$  有  $f(x) \leq g(x)$  成立. 对这样的  $x$ , 有

$$M - \varepsilon < g(x) < M + \varepsilon \quad \text{及} \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon.$$

因为  $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$ ,  $M + \varepsilon = L - \varepsilon$ , 导致

$$g(x) < M + \varepsilon = L - \varepsilon < f(x)$$

的矛盾.

**注** 定理2.9中的  $f, g$  在  $x=a$  点可以没有定义. 如果  $f$  与  $g$  在  $a$  点连续, 由定理断定  $f(a) \leq g(a)$ . 如果定理中  $f(x) \leq g(x)$  换成  $f(x) < g(x)$ , 但却不能断定  $L < M$ . 例如在  $-1 < x < 1, x \neq 0$  内有  $f(x) = x^2 < g(x) = x^2$ , 可是  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ .

**定理2.10(两边夹定理)** 设  $K$  是一正数, 给定函数  $f, g$  及  $h$  在  $0 < |x-a| < k$  上有定义. 若对这样的  $x$  有  $f(x) \leq g(x)$

$\leq h(x)$ , 并且  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ . 那么,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

**证明** 由  $x \rightarrow a$ ,  $f(x)$ ,  $h(x)$  都以  $L$  为极限的假设, 对任给  $\varepsilon > 0$ , 存在小于  $K$  的正数  $\delta_1, \delta_2$ , 使当  $0 < |x - a| < \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ , 有  $|f(x) - L| < \varepsilon$  与  $|h(x) - L| < \varepsilon$ , 也即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{及} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon.$$

由  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , 对满足  $0 < |x - a| < \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$  的  $x$ , 有

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

也即  $|g(x) - L| < \varepsilon$ . 于是  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ .

## 习 题

1. 综合运用定理 2.2, 2.3, 2.5, 2.6, 证明对任意  $a$

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} (cx + d) = ca + d.$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} (cx^2 + dx + e) = ca^2 + da + e.$$

2. 设  $n$  次多项式  $p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ , 用归纳法证明  $\lim_{x \rightarrow a} p_n(x) = p_n(a)$ .

3. 设  $p_n(x)$ ,  $q_m(x)$  分别是  $n$  次、 $m$  次多项式, 运用习题 2 的结果及定理 2.8 证明: 当  $a$  不是  $q_m(x)$  的根时,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p_n(x)}{q_m(x)} = \frac{p_n(a)}{q_m(a)}.$$

\*4. 设  $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$  是趋向  $a$  的点列,  $f$  与  $g$  在  $0 < |x - a| < K$  内有定义且  $f(x_n) = g(x_n)$ . 如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , 是否有

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$



5. 自然数 $n \geq 3$ , 运用定理2.10证明 $\lim_{x \rightarrow a} x^n = 0$ .

6. 直接按极限定义证明定理2.5推论.

7. 证明定理2.6的推论.

\*8. 设 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$ ,  $x \neq 0$ . 画出 $f$ 的草图.

(i) 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ;

(ii) 定义 $g(x) \equiv f(x)$ . 显然地, 当 $x_n = \pm \frac{1}{n\pi}$ ,  $n = 1, 2,$

$\dots$ ,  $g(x) = 0$ . 由此断定对 $x = x_n$ ,  $f[g(x)]$ 没有定义.

(iii) 用 (ii) 的结果证明 $h(x) = f[g(x)]$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限不存在.(请读者把 (iii) 与定理2.7相对照)

(iv) 如果定义

$$F(x) = \begin{cases} x \sin x, & -\pi \leq x \leq \pi, x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

用定理2.7证明 $\lim_{x \rightarrow 0} F[g(x)] = 0$ .

9. 设 $f, g$ 是连续函数, 定义 $F(x) = \max[f(x), g(x)]$ , 证明 $F$ 是连续函数.

10. 证明定理2.8.

11. 设 $n$ 为自然数,  $a > 0$ , 证明 $G(x) = \sqrt[n]{x}$ 在 $a$ 点连续.(关于对数函数、指数函数的严格定义将在§5.3中给出.)

### § 2.3 单边极限——相对于集的连续性

函数 $f: x \rightarrow \sqrt{x}$ 对 $x > 0$ 的点有定义并且连续. 因为函

数对 $x < 0$ 没有定义,在 $x = 0$ 点 $f$ 不满足 § 2.1 中的连续性定义.很明显,当 $x$ 通过正数趋向于零仍然有 $f(x) \rightarrow f(0)$ .为了使连续性概念包括象上述函数在定义域之端点的情况,我们推广连续性的定义.为此,需要引进单边极限概念.

**定义** 设 $f$ 是以 $D$ 为定义域的函数,  $a \in \mathbb{R}_+$ , 称当 $x$ 从 $a$ 的右边趋向于 $a$ ,  $f$ 趋向于 $L$ , 当且仅当 (i) 存在一个以 $a$ 点为左端点的开区间 $I \subset D$ . (ii) 对每一 $\varepsilon > 0$ , 存在 $\delta > 0$ 使当 $0 < x - a < \delta$ , 有

$$|f(x) - L| < \varepsilon.$$

当此记为: 当 $x \rightarrow a^+$ ,  $f(x) \rightarrow L$  或  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ . 称 $f(x)$ 在 $x = a$ 点的右极限为 $L$ .

同样地, 把定义中的“右”换成“左”, 把 $0 < x - a < \delta$ 换成 $0 < a - x < \delta$  就是 $f(x)$ 在 $x = a$ 点的左极限定义. 记为: 当 $x \rightarrow a^-$ ,  $f(x) \rightarrow L$  或  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ . 函数的左、右极限统称为单边极限.

注 既然 $0 < |x - a| < \delta$  和  $0 < x - a < \delta$  与  $0 < a - x < \delta$  两者相等价, 那么 § 2.2 证明的关于极限的所有定理对于左、右单边极限都有相应的定理成立, 只须把定理叙述中的“极限”换成“单边极限”.

由单边极限概念来定义单边连续性.

**定义** 函数 $f$ 在 $a$ 点右(左)连续当且仅当 $a$ 属于定义域且

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)).$$

若函数 $f$ 的定义域是有限区间 $a \leq x \leq b$ , 当 $x$ 是 $(a, b)$ 内的点,  $f$ 在 $x$ 点有极限, 当且仅当 $f$ 在 $x$ 点有相同的左、右极限;

$f$ 在 $x$ 点连续, 当且仅当 $f$ 在 $x$ 点左、右连续. 在 $[a, b]$ 的左端点只能讨论右极限, 右端点只能讨论左极限. 相应地在左端点 $a$ 讨论右连续性, 在右端点 $b$ 讨论左连续性. 如函数 $f: x \rightarrow \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , 在 $x = 0$ 点右连续, 在 $x = 1$ 点左连续, 在 $(0, 1)$ 的每一点连续(注意是双边的!), 说 $f$ 在 $[0, 1]$ 上连续.

在区间端点函数的单边连续性, 限制 $x$ 在定义域里变化的这种观点能够用来进一步推广连续性概念.

**定义** 设函数 $f$ 的定义域 $D \subset \mathbb{R}_1$ ,  $a \in \mathbb{R}_1$ , 称函数 $f$ 在 $a$ 点关于 $D$ 连续, 当且仅当(i)  $a \in D$ , (ii) 对每一 $\varepsilon > 0$ , 存在 $\delta > 0$ , 当 $x \in D$ 且 $|x - a| < \delta$ , 有

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

如果 $f$ 在 $D$ 的每一点关于 $D$ 连续称 $f$ 在 $D$ 上连续.

注 (i)今后我们常省略定义中的“关于 $D$ ”的副词, 这是因为在上下文中 $D$ 往往是已知的.(ii)当存在区间 $I$ ,  $a \in I \subset D$ , 那么现在的定义与§2.1的定义相重合.(iii)当 $a$ 是区间 $I$ 的左端点,  $a \in D$ , 现在的定义与右连续性重合. 定义域是闭区间 $a \leq x \leq b$ ,  $f$ 在 $D$ 上连续就是指 $f$ 在 $(a, b)$ 的每一点连续, 在 $a$ 点右连续, 在 $b$ 点左连续.

**定义** 称 $a \in D$ 为 $D$ 的孤立点, 当且仅当存在开区间 $I$ , 使 $I \cap D = \{a\}$ ,  $\{a\}$ 表示仅有单一元素 $a$ 组成的集.

设 $a$ 是函数 $f$ 的定义域 $D$ 中的孤立点, 那么 $f$ 在 $a$ 点关于 $D$ 是连续的. 事实上,  $a$ 是 $D$ 的孤立点, 存在包含 $a$ 的开区间 $I$ ,  $I \cap D = \{a\}$ . 选取 $\delta$ 小于 $a$ 点到 $I$ 的端点的距离中较小者, 那么 $x \in D$ 而又满足 $|x - a| < \delta$ 的 $x$ 仅有 $x = a$ 点. 这时 $|f(x) - f(a)|$ 成为 $|f(a) - f(a)| = 0$ . 因此,  $f$ 在 $a$ 点连续!

函数在定义域 $D$ 的孤立点 $a$ 处其图象是 $\mathbb{R}_2$ 平面上的孤立

点 $(a, f(a))$ ,  $f$ 的图象在这里不再是“连续”的曲线。由此可见连续性概念已被推广成相当一般化的概念了, 仅在定义域是区间的特殊情况下, 连续函数的图象才有“连续不断”的形象。

借助于连续性的一般定义。可以证明函数  $g: x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  ( $n$ 为自然数) 在其定义域上连续。

**定理2.12** 设函数  $g: x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  当  $n$  为正偶数时,  $g$  在  $[0, \infty)$  上连续; 当  $n$  为正奇数时,  $g$  在  $(-\infty, \infty)$  上连续。

**证明** 上节之习题11证明了对自然数  $n$  当  $x > 0$  时,  $g$  在  $x$  点连续。对  $x \geq 0$  及任意的  $\varepsilon > 0$ , 当  $|x - 0| < \varepsilon$  有  $|\sqrt[n]{x} - 0| < \varepsilon$ 。于是  $g$  在  $x = 0$  点右连续。若  $n$  为奇数, 那么  $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ , 因此  $g$  在  $0$  点也是左连续的, 从而  $g$  在  $(-\infty, \infty)$  上连续。

有时讨论单边极限比讨论双边极限来得简便些。

例 设函数  $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 2, \\ \frac{\sqrt{3(x^4 - 16)}}{\sqrt{2(x^3 - 8)}}, & 2 < x \leq 5. \end{cases}$  研究在  $x = 2$

函数是否连续?

**解** 因为  $f$  的定义域  $D$  是闭区间  $[-1, 5]$ , 而  $2 \in (-1, 5)$ , 因此要研究  $f$  在  $x = 2$  的双边连续性。根据定理2.3,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 = f(2)$ , 函数在  $x = 2$  点左连续。

现在再来研究  $f(x)$  在  $x \rightarrow 2^+$  时右极限是否存在。首先对

$x > 2$ ,  $\frac{3(x^4 - 16)}{2(x^3 - 8)} = \frac{3(x + 2)(x^2 + 4)}{2(x^2 + 2x + 4)}$ 。应用极限定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 3(x+2)(x^2+4) = 3 \cdot 4 \cdot (4+4) = 96.$$

同理,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x^2+2x+4) = 2 \cdot (4+4+4) = 24.$

再应用商的极限及由  $t \rightarrow \sqrt{t}$  对  $t > 0$  连续及复合函数的极限定理得到

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}} = \sqrt{\frac{96}{24}} = \sqrt{4} = 2 = f(2).$$

函数在  $x=2$  点左连续也右连续, 所以  $f$  在  $x=2$  点连续.

## 习 题

对习题1—12, 讨论给定函数在给定点  $a$  是否连续. 若  $f$  在  $a$  点不连续则进一步讨论是左不连续还是右不连续:

$$1. f(x) = \begin{cases} x-4, & -1 < x \leq 2 \\ x^2-6, & 2 < x < 5, \end{cases} \quad a=2;$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^4-1} & 1 < x < 2 \\ x^2+3x-2 & 2 \leq x < 5 \end{cases} \quad a=2;$$

$$3. f: x \rightarrow \frac{x}{|x|}, \quad a=0;$$

$$4. f: x \rightarrow |x-1|, \quad a=1;$$

$$5. f: x \rightarrow x \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad a = 0;$$

$$6. f(x) = \left(\frac{x^2 - 27}{x^2 + 2x + 1}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad a = 3;$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x+5}{3x-2}\right)^{\frac{1}{2}} & -1 < x < 2 \\ 2x-1 & 2 \leq x < 4, \end{cases} \quad a = 2;$$

$$8. f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{2}} & 1 < x < 2 \\ \frac{x^2}{2} & 2 \leq x < 5, \end{cases} \quad a = 2;$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & x \neq 2 \\ 4 & x = 2, \end{cases} \quad a = 3;$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x^2-9 & 2 < x < 3 \\ \frac{x^2-9}{x^2+1} & 3 \leq x < 4, \end{cases} \quad a = 3;$$

$$11. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \quad a = 0;$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \quad a = 0;$$

13. 设  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $g(x) = \frac{\pi}{2} - x$ . 研究

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f[g(x)]$$

当  $a = \frac{\pi}{4}$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = 0$  得出什么结论?

14. 对左极限叙述并证明如定理2.4的相等函数的极限定理.

15. 对右极限叙述并证明如定理2.5和的极限定理.

16. 对右极限叙述并证明如定理2.10的两边夹定理.

## § 2.4 趋向无穷处的极限, 无穷极限

研究函数  $f: x \rightarrow \frac{x}{x+1}$   $x \neq -1$ , 它的图象如图2.5所示.

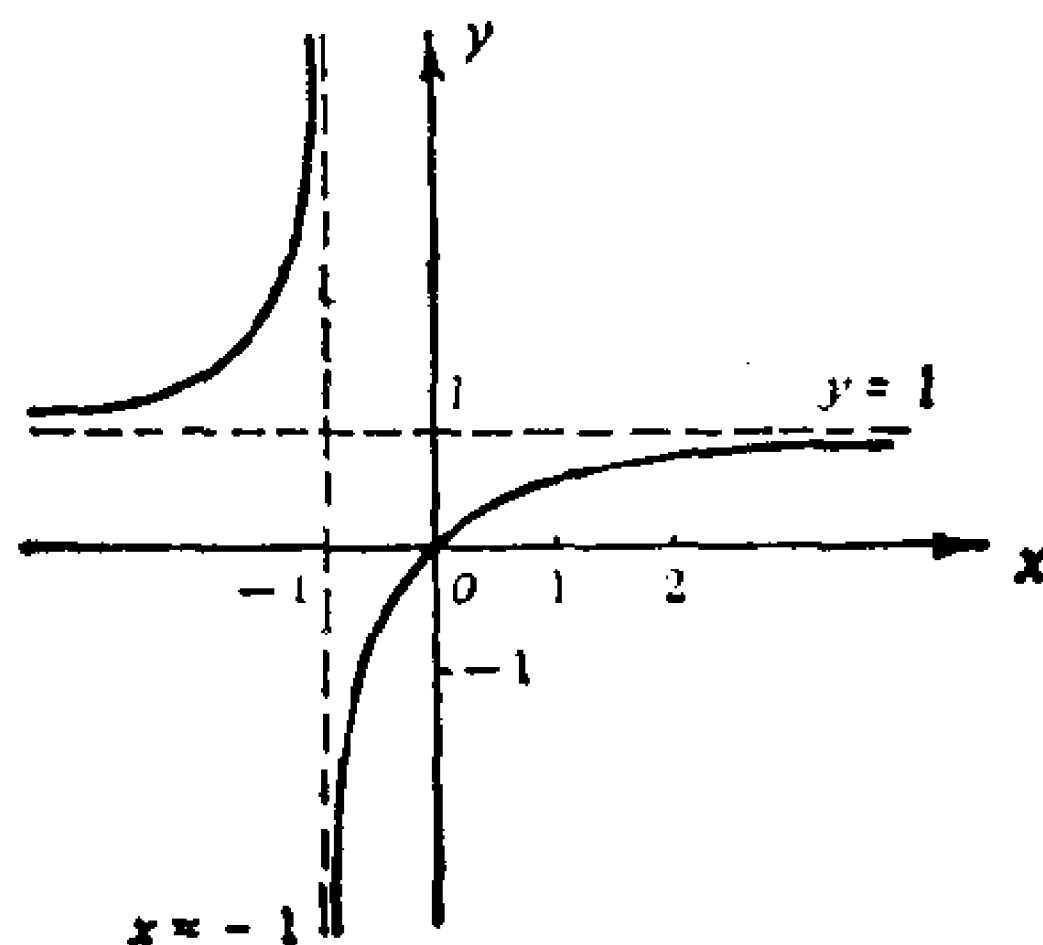


图 2.5

从图形上看出，当 $x$ 递增通过正数无限增大或递减通过负数无限减小， $f(x)$ 随之趋向于1。

**定义** 如果 $x$ 递增通过大于某数的所有实数，就称 $x$ 趋向于正无穷，记为 $x \rightarrow +\infty$ ；如果 $x$ 递减通过小于某数的所有实数，就称 $x$ 趋向于负无穷，记为 $x \rightarrow -\infty$ ；如果 $|x| \rightarrow +\infty$ 就称 $x$ 趋向于无穷，记为 $x \rightarrow \infty$ 。

**定义** 称当 $x \rightarrow \infty$ 时  $f(x) \rightarrow L$ ，当且仅当对每一  $\varepsilon > 0$ ，存在  $A > 0$ ，使对  $f$  定义域中满足  $|x| > A$  的一切  $x$ ，都有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ，也记为  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ 。

称当 $x \rightarrow +\infty$ 时  $f(x) \rightarrow L$ ，当且仅当对每一  $\varepsilon > 0$ ，存在  $A > 0$ ，使对  $f$  定义域中满足  $x > A$  的一切  $x$ ，都有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ，也记为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 。

称当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $f(x) \rightarrow L$ ，当且仅当对每一  $\varepsilon > 0$ ，存在  $A > 0$ ，使对  $f$  定义域中满足  $x < -A$  的一切  $x$ ，有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ ，也记为  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ 。

§ 2.2内关于极限的许多定理，对 $x$ 趋向于 $\infty$ ，趋向于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 有类似的结果。其叙述和证明只需以 $x \rightarrow \infty$ ， $x \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 分别代替 $x \rightarrow a$ 便得，只有定理2.3和定理2.7例外。定理2.3在 $x \rightarrow \infty$ 时采取下列形式：

**定理2.13** (明显极限) 若  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ )，那么

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

下一定理代替关于复合函数的定理2.7。

**定理2.14** (复合函数的极限) 设  $f, g$  为  $R_1$  到  $R_1$  的函



数。且 $f$ 在 $L$ 点连续，当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $g(x) \rightarrow L$ 。那么

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f[g(x)] = f(L).$$

**注** (i) 定理2.14也可对 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 来叙述。同样，§2.2内的每个定理都有分别相应于 $x \rightarrow +\infty$ ， $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow \infty$ 的定理。(ii) 定理2.13，2.14的证明可分别仿照定理2.3及定理2.7写出，我们把它们留给读者。

现在再来观察图2.5，当 $x \rightarrow -1^-$ ， $f = \frac{x}{x+1}$ 无限递增；当 $x \rightarrow$

$-1^+$ ， $f$ 无限递减。我们说 $x \rightarrow -1$ 时 $f$ 趋向于无穷极限。精确地叙述为如下定义：

**定义** 函数 $f$ 当 $x \rightarrow a$ 时成为无穷大，当且仅当对每个数 $A > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使 $f$ 定义域内满足 $0 < |x - a| < \delta$ 的一切 $x$ ，有 $|f(x)| > A$ 。记为 $x \rightarrow a$ ， $f(x) \rightarrow \infty$ ，也表示为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 。也称当 $x \rightarrow a$ 时， $f$ 趋向于无穷极限。

把 $x \rightarrow a$ 换成 $x \rightarrow a^-$  ( $x \rightarrow a^+$ ) 得到 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$  ( $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ ) 的定义。

把 $|f(x)| > A$ 换成 $f(x) > A$ 或 $f(x) < -A$ 便得

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ 以及 } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ 的定义。}$$

§2.2中的极限定理对无穷极限大都有类似的定理。但是，“ $\infty$ ” “ $+\infty$ ” “ $-\infty$ ”表示函数相应的状态，它们并不是数，数的通常代数运算法则对“无穷”不适用，因此关于无穷极限的定理条件与§2.2极限定理有所不同，要注意

下述定理中的新条件。

**定理2·15** (极限的唯一性) 设函数  $f$  当  $x \rightarrow a$ ,  $f(x) \rightarrow \infty$ , 那么当  $x \rightarrow a$  时  $f$  不能趋向于某一有限极限。

**证明** 用反证法。设  $x \rightarrow a$  时还有  $f \rightarrow L$ ,  $L$  是一有限数, 将导致矛盾。既然  $f \rightarrow L$  由定义取  $\varepsilon = 1$ , 存在  $\delta > 0$ , 使当  $f$  定义域内满足  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$ , 有  $|f(x) - L| < 1$ , 即  $-1 + L < f(x) < 1 + L$ 。由此对这样的  $x$ ,

$$-1 - |L| \leq -1 + L < f(x) < 1 + L \leq 1 + |L|$$

成立。从而导出  $|f(x)| < 1 + |L|$ 。而由  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , 对  $A > 1 + |L|$  存在比  $\delta$  小的  $\delta_1 > 0$ , 使对  $f$  定义域中满足  $0 < |x - a| < \delta_1$  的一切  $x$ , 有  $|f(x)| > A > 1 + |L|$ 。导致  $1 + |L| > 1 + |L|$  的矛盾。

**定理2·16** (复合函数的极限) 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow \infty} f[g(x)] = L$ 。

定理2·16的证明留给读者。定理中的  $\infty$  可换成  $+\infty$ ,  $-\infty$ , 也可以  $a^-$ ,  $a^+$  代替  $a$ , 还可以把  $L$  换成  $\infty$ ,  $+\infty$ ,  $-\infty$ 。但是, 所有这些定理都应保证复合函数  $f[g(x)]$  确有定义才行。例如下面定理:

**定理2·17** 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = a$ , 且设有一正数  $M$ , 当  $x < -M$  时有  $g(x) \neq a$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f[g(x)] = \infty$ 。

注 如果有  $g(x) = a$ ,  $f[g(x)]$  可能没有定义。例如  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $g(x) = -\frac{1}{x} \sin x, x \neq 0$ , 这里  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 。由于当

$x = -n\pi$  时,  $g(x) = 0$  使复合函数  $f[g(x)] = \frac{x}{\sin x}$  没有定义, 于是

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f[g(x)] = \infty$  不成立!

**例1** 设  $f: x \rightarrow \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ , 判断当  $x \rightarrow 0$  时,  $f$  是否趋向于极限.

**解** 当  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ ,  $f(x_n) = 2n\pi, n = 1, 2, \dots$ ;

当  $x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ ,  $f(x'_n) = 0, n = 1, 2, \dots$ . 因此当  $x \rightarrow 0$ ,  $f$  不

存在极限(图2·6).

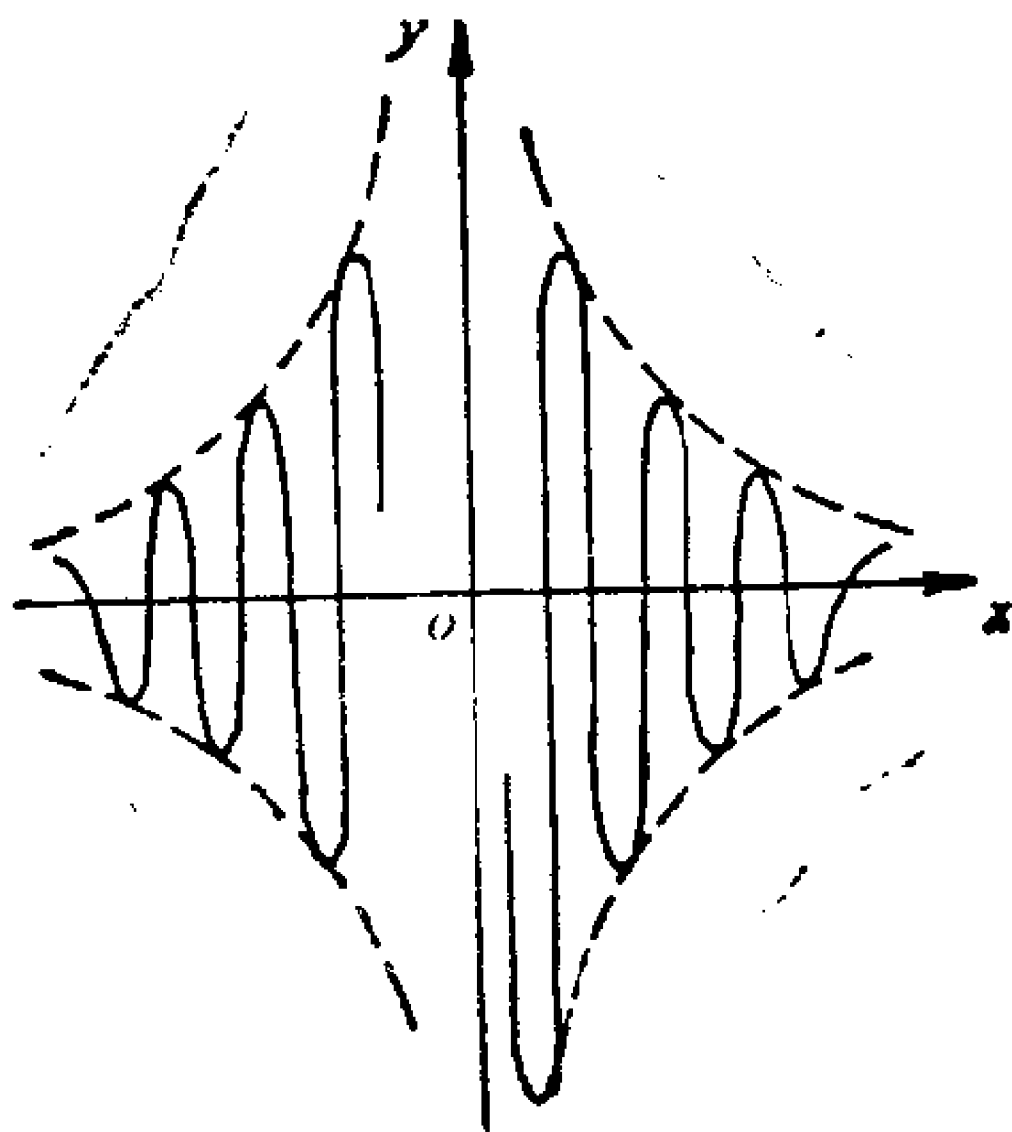


图 2·6

**例2** 设  $f: x \rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2x + 3}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ , 要

求叙述每一步骤的理由.

解 当 $x < 0$ , 将函数表示式的分子、分母同除以 $x$ 得

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{1 + 2\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2}}}{2 + 3\frac{1}{x}},$$

应用常量的极限、明显的极限及和、积的极限定理有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 1 + 2\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \\ &= 1 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

同理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 + 3\frac{1}{x} \right) = 2$ . 应用复合函数定理, 求得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + 2\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1. \text{ 最后由商的极限定理}$$

$$\text{便得: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

当 $x < 0$ , 将函数表示式分子、分母同除以 $x$ 得  $f(x) =$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2x + 3} = \frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2 + 3\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{1 + 2\frac{1}{x} + 4\frac{1}{x^2}}}{2 + 3\frac{1}{x}}$$

如 $x > 0$ 时同样的讨论可得:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}.$

当函数有无穷极限或作分母的函数以零为极限时，和、积、商定理要特别补充条件才能成立。下面以商的极限定理为例说明之。

**定理2.18** 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ( $L \neq 0$ ),  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ . 当存

在正数  $\delta$ , 使  $0 < |x - a| < \delta$  的  $x$  有  $g(x) \neq 0$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

证明留给读者。

注 (i) 为了  $\frac{f}{g}$  在  $0 < |x - a| < \delta$  内有定义，定理中假定在  $a$  点 邻近  $g(x) \neq 0$  是不能少的。(ii) 数  $L$  换成  $\infty$  定理也成立。也可研究单边极限。如果  $f \rightarrow +\infty$ ,  $g \rightarrow 0^+$ , 有  $\frac{f}{g} \rightarrow +\infty$ 。

对于两函数和的极限，若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ ,

那么 $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \infty$ 。当  $f, g$  都趋向无穷，不能冒然下结论，需进一步讨论  $f(x) + g(x)$  是否有极限以及极限是什么。这是因为“ $\infty$ ”不能和数一样对待。但是可以有  $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ , 及  $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$  的“法则”；而  $(+\infty) - (+\infty)$ ,  $(-\infty) - (-\infty)$ ,  $(+\infty) + (-\infty)$ ,  $(\infty) \pm (\infty)$  均无意义。

对于积的极限，若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $L \neq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ , 有 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \infty$ 。但当  $L = 0$  时，应进一步讨论  $fg$  才可能作出结论。

## 习 题

习题 1—10, 求函数的极限或无穷极限。

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + 4};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 3};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 6}{x^2 + 7};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2});$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2});$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x};$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^{\frac{3}{2}}};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}};$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$$

11. 证明定理 2·13.

12. 证明定理 2·14.

13. 叙述并证明定理 2·15 以  $x \rightarrow a^+$  代替  $x \rightarrow a$  的定理.

14. 证明定理 2·17.

15. 分别举出  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow -\infty$  的  $f, g$ .

使满足

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty.$$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = A$ ,  $A$  为任给实数.

16. 确定  $p$  的值, 使下列极限存在:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \sin \frac{1}{x}; (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \sin \frac{1}{x}; (c) \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^p \sin \frac{1}{x}.$$

17. 证明定理 2.18.

## § 2.5 序列的极限, 连续性公理

无限序列是以自然数集为定义域的函数, 它可以记为  $\{x_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 简称为序列  $x_n$ . 当  $n$  依次取自然数  $1, 2, \dots$  变化, 也记为  $n \rightarrow +\infty$ , 对  $n$  取自然数趋向于  $+\infty$ , 习惯上省去正号记成  $n \rightarrow \infty$ . 相应地,  $x_n$  在  $n \rightarrow \infty$  时可能趋向或不趋向于极限, 当  $x_n$  趋向于极限时它也有 § 2.2 中所述的极限定理.

**定义** 设序列  $\{x_n\}$ , 当且仅当存在数  $L$ , 对每一  $\varepsilon > 0$ , 存在一自然数  $N$ , 使当  $n > N$  有

$$|x_n - L| < \varepsilon.$$

称  $n \rightarrow \infty$  时序列  $\{x_n\}$  趋向于极限  $L$ , 记为  $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow L$  或

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ . 类似地, 当且仅当对每个  $A > 0$ , 存在自然数  $N$ ,

使当  $n > N$  有

$$|x_n| > A \quad (x_n > A \text{ 或 } x_n < -A)$$

称  $n \rightarrow \infty$  时序列  $x_n$  趋向于无穷大 (正无穷大, 负无穷大),

记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty (+\infty, -\infty)$ .

读者可以叙述与证明关于序列的如 § 2.2 中那样的极限

**定理.** 作为例子, 把明显极限定理及和的极限定理叙述如下.

**定理2.19**

(a) (明显极限)  $n \rightarrow \infty, \frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

(b) (和的极限) 设  $n \rightarrow \infty$  时,  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$ . 那么

$$x_n + y_n \rightarrow a + b \quad (n \rightarrow \infty).$$

关于复合函数的定理2.7变形为

**定理2.20** 设  $f$  在  $a$  点连续, 当  $n \rightarrow \infty, x_n \rightarrow a$ . 那么存在一自然数  $N$ , 使当  $n > N$  时,  $f(x_n)$  有定义, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

研究函数在其定义域内的特殊序列的状态, 对于判断函数的性质有重要意义.

**例** 讨论函数  $f: x \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  在  $x = 0$  点是否存在极限?

**解** 选取序列  $x_n = \frac{1}{n\pi}, y_n = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}, z_n =$

$\frac{1}{\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi}$ , 显然  $x_n, y_n, z_n$  当  $n \rightarrow \infty$  时都趋向于零, 而



$$f(x_n) = n\pi \sin n\pi = 0$$

$$f(y_n) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$f(z_n) = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi \sin\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi = -\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时  $f(x_n) \rightarrow 0$ ,  $f(y_n) \rightarrow +\infty$ ,  $f(z_n) \rightarrow -\infty$ .

据极限唯一性定理, 断定  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

这一例子启发我们寻求函数极限与序列极限的关系。如下重要定理是定理2.20的推广.

**定理2.20** 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow a$  时,  $f(x) \rightarrow L$ , 当且仅当对  $0 < |x - a| < k$  ( $k$  是某一正数) 中的任何一个趋向  $a$  的序列  $x_n$  ( $x_n \neq a$ ), 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

**证明** (i) 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ . 对每一  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使当

$$0 < |x - a| < \delta, \text{ 有 } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

现设  $\{x_n\}$ ,  $x_n \neq a$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时  $x_n \rightarrow a$ . 对上述  $\delta > 0$ , 存在  $N$ , 使当  $n > N$ , 有  $0 < |x_n - a| < \delta$ . 因而

$$|f(x_n) - L| < \varepsilon,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

(ii) 设对任何一  $\{x_n\}$   $x_n \neq a, x_n \rightarrow a$  都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

$= L$ . 假定  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  不成立. 那么存在某个正数  $\varepsilon_0$ , 不论  $\delta$  如何选取, 在  $0 < |x - a| < \delta$  中总有  $x_0$ , 使  $|f(x_0) - L| \geq \varepsilon_0$ . 取  $\delta_n = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ . 相应地  $0 < |x - a| < \delta_n$  中有使  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$  的  $x_n$ . 显然序列  $x_n \neq a$  且  $x_n \rightarrow a$ . 按所设条件  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , 这便导致与  $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$  相矛盾.

现在按照序列极限的观点来完成实数公理系统的讨论. § 1.1 的十一条域公理再加上 § 1.3 的序公理, 还不是以实数系为唯一解释的公理系. 例如有理数系也满足这十二条公理. 这十二条公理的系还没有描述实数系不同于有理数系能够和直线上所有点一一对应的完备性质. 例如数轴上原点之右到原点距离为单位正方形对角线长的点, 其坐标是  $\sqrt{2}$ , 便不是有理数. (参看本书附录 2) 这说明有理点不能布满数轴, 即有理数系不完备. 此外, 还有一个困难: 若序列  $x_n$ , 对每一自然数  $n$  有  $x_n > n$ . 按极限定理应当有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

但确有满足上述十二条公理的有序域, 在这域中存在序列  $x_n > n, x_n \rightarrow +\infty$  却不成立 (这样的例子见本节的习题 8、9、10) .

如果在有序域的十二条公理系再加上下述连续性公理 (总计十三条), 那么实数系就是这一公理系的唯一的解释了\*.

---

\* 抽象地定义凡是满足所述的十三条公理的数系称为实数系  $R$ . 实数系也被称为连续的有序域. 我们说公理系以实数系  $R$  为唯一的解释的含义是: 如果另有一数系  $X$  也满足这十三条公理, 那么  $X$  与  $R$  之间存在同构对应, 即存在  $X$  与  $R$  之间的一一对应, 在这对应之下, 零元, 单位元彼此对应, 对应元素的和、积与元素的和、积相对应, 递增有上界序列的极限与对应序列的极限相对应.

**定理C (连续性公理)** 如果序列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , 对每一 $n$ 都满足(i)  $x_{n+1} \geq x_n$ ; (ii) 存在数 $M$ ,  $x_n \leq M$ , 那么存在一个数 $L \leq M$ ,  $x_n \leq L$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ .

公理C的直观形象如图2·7所示。在水平轴上表示 $x_n$ 的

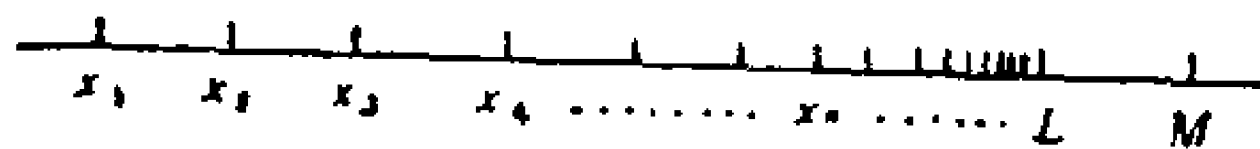


图 2·7

点随着 $n$ 增大向右移动, 但不能超过 $M$ , 那么必定在某一不超过 $M$ 的点 $L$ 左边聚集于 $L$ .

根据公理C可以建立下面结果.

### 定理2·21

(a) 不存在大于一切自然数的实数.

(b) 若对每一 $n$ ,  $x_n > n$ , 那么 $x_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

(c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**证明** (a) 令 $x_n = n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且设有实数 $M$ ,  $M \geq x_n$ . 按公理C, 存在数 $L \leq M$ , 使 $x_n \leq L$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ .

在极限定义中取 $\varepsilon = 1$ , 那么存在自然数 $N$ , 使当 $n > N$ 有

$$L - 1 < x_n < L + 1.$$

但是 $x_{N+1} = N + 1$ , 因而

$$L - 1 < N + 1 < L + 1.$$

因此 $N + 2 = x_{N+2} > L$ , 这与对一切 $n$ ,  $x_n \leq L$ 矛盾.

(b) 设 $M$ 是任意的正数. 由(a)存在自然数 $N$ 使 $N \geq M$ , 当 $n > N$ ,  $x_n > N \geq M$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

(c) 设  $\varepsilon$  是任给的正数, 存在自然数  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , 那么当

$n > N$  显然有  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

## 习 题

1. 设函数  $f: x \rightarrow x \cos x$ ,

(a) 求一序列  $\{x_n\}$  使  $x_n \rightarrow +\infty$  且  $f(x_n) \rightarrow 0$   
( $n \rightarrow \infty$ ).

(b) 求一序列  $\{y_n\}$  使  $y_n \rightarrow +\infty$  且  $f(y_n) \rightarrow +\infty$   
( $n \rightarrow \infty$ ).

(c) 求一序列  $\{z_n\}$  使  $z_n \rightarrow +\infty$  且  $f(z_n) \rightarrow -\infty$   
( $n \rightarrow \infty$ ).

2. 证明定理 2.20.

3. 设对每一  $n$ ,  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 且  $x_n \rightarrow L$ ,  $z_n \rightarrow L$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  
证明  $n \rightarrow \infty$ ,  $y_n \rightarrow L$ .

4. 计算下列极限或判断  $\infty$ ,  $+\infty$  或  $-\infty$ :

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{n^2 - 3n + 2}; \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n - 1}{2n^2 + n + 5};$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \frac{1}{n}}{2n^2 - 3n}; \quad (iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 4n - 1}}{\sqrt{n^2 + 4n - 2}}.$$

5. 若  $a > 1$ ,  $n$  为自然数, 证明  $a^n > 1 + n(a - 1)$ .

6. 若  $a > 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty$ .

7. 若  $|a| < 1$ , 证明

(i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} b(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = \frac{b}{1-a}$ .

[提示: 利用  $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{1-a^n}{1-a}$ .]

\*8. 研究既约分式  $\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m}{x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n}$  ( $m, n$

为非负整数) 组成的集  $Q$ . 若按通常分式相加、相乘定

义加法与乘法, 选  $\frac{0}{1}$  为“零”元,  $\frac{1}{1}$  为单位元. 证明

这一集合满足域公理.

\*9. 第8题中分式当  $a_0 > 0$  定义为正的. 证明  $Q$  满足序公理 I. 即  $Q$  是有序域.

\*10. 按习题8、9, 证明  $Q$  中存在“数”, 即  $Q$  的元素大于任

何自然数  $\frac{n}{1}$ . 这样的有序域  $Q$  称为非阿基米德有序域.

11. 证明不存在有理数, 它的平方等于2.

[提示: 用反证法, 设既约分数  $\frac{p}{q}$ ,  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ , 导出

矛盾]

\*12. 证明有理数系不满足公理 C.

[提示: 找一有理数序列  $\{x_n\}$ ,  $1 \leq x_n \leq 2$ ,  $x_n \leq x_{n+1}$ .

并且满足  $2 - x_n^2 \leq \frac{1}{10^n}$ ,  $x_n$  不存在有理数的极限]

13. 证明公理C可叙述为等价的形式: 如果序列  $\{x_n\}$  对每一  $n$  都满足 (i)  $x_{n+1} \leq x_n$  (ii) 存在数  $M$ ,  $x_n \geq M$ , 那么存在一数  $l \geq M$ ,  $x_n \geq l$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ .

## 第三章 $R_1$ 上函数的基本性质

### § 3.1 介值定理

微积分中许多定理的证明, 需要利用连续函数的基本性质. 本节的介值定理就是证明微、积分中值定理和微积分基本定理所必须的.

**定理3.1 (闭区间套定理)** 设闭区间序列

$$I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

对 $\forall n$  ( $\forall$ 表示“每一个”或“任意的”符号),  $I_{n+1} \subset I_n$ .

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 那么有且仅有一 $x_0$ 属于每一 $I_n$ .

**证明** 由 $\forall n$ ,  $I_{n+1} \subset I_n$ , 有 $a_n \leq a_{n+1}$ 及 $b_{n+1} \leq b_n$ . 因此数列 $\{a_n\}$ 不减且以 $b_1$ 为上界; 数列 $\{b_n\}$ 不增且以 $a_1$ 为下界 (图3.1). 根据连续性公理c, 存在数 $x_0$ 及 $x_0'$ , 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ ,  $a_n \leq x_0$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0'$ ,  $b_n \geq x_0'$ . 再由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 可得 $x_0 = x_0'$ , 所以

$$a_n \leq x_0 \leq b_n \quad (\text{对}\forall n\text{成立}).$$

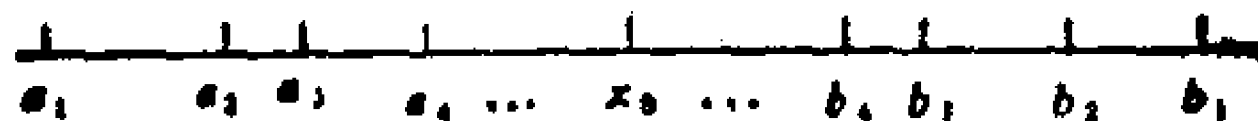


图 3.1

设还有一 $x_1$ 也属于每一 $I_n$ 且 $x_1 \neq x_0$ . 既然 $x_1, x_0$ 同时

属于每一 $I_n$ ，必定有  $|x_1 - x_0| \leq b_n - a_n$  对 $\forall n$ 成立。于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) \geq |x_1 - x_0|.$$

但由假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ ， $|x_1 - x_0| > 0$  导致 $0 \geq |x_1 - x_0|$

$> 0$  的矛盾。于是证明了仅有一个 $x_0$ 属于所有 $I_n$ 。

注 定理假设区间为闭区间的条件是不可少的，例如半开区间序列

$I_n = \{x : 0 < x \leq \frac{1}{n}\}$  满足  $I_{n+1} \subset I_n$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  的条件。 $I_n$  是套缩的，但它们没有公共点。事实上，设 $I_n$ 有公共点 $x_0$ ，一方面 $x_0 > 0$ ；另一方面 $x_0 \leq \frac{1}{n}$  对一切 $n$ 成立，又有 $x_0 \leq 0$ ，便导致矛盾。

现在建立本节的主要定理。

**定理3·2 (介值定理)** 设函数 $f$ 在 $[a, b]$ 上连续， $c \in R_1$ ， $f(a) < c$ ， $f(b) > c$ 。那么至少存在一个 $x_0$ ， $x_0 \in [a, b]$ ，使 $f(x_0) = c$ 。

注 图3·2，说明使 $f(x_0) = c$ 的 $x_0$ 可以多于一个。

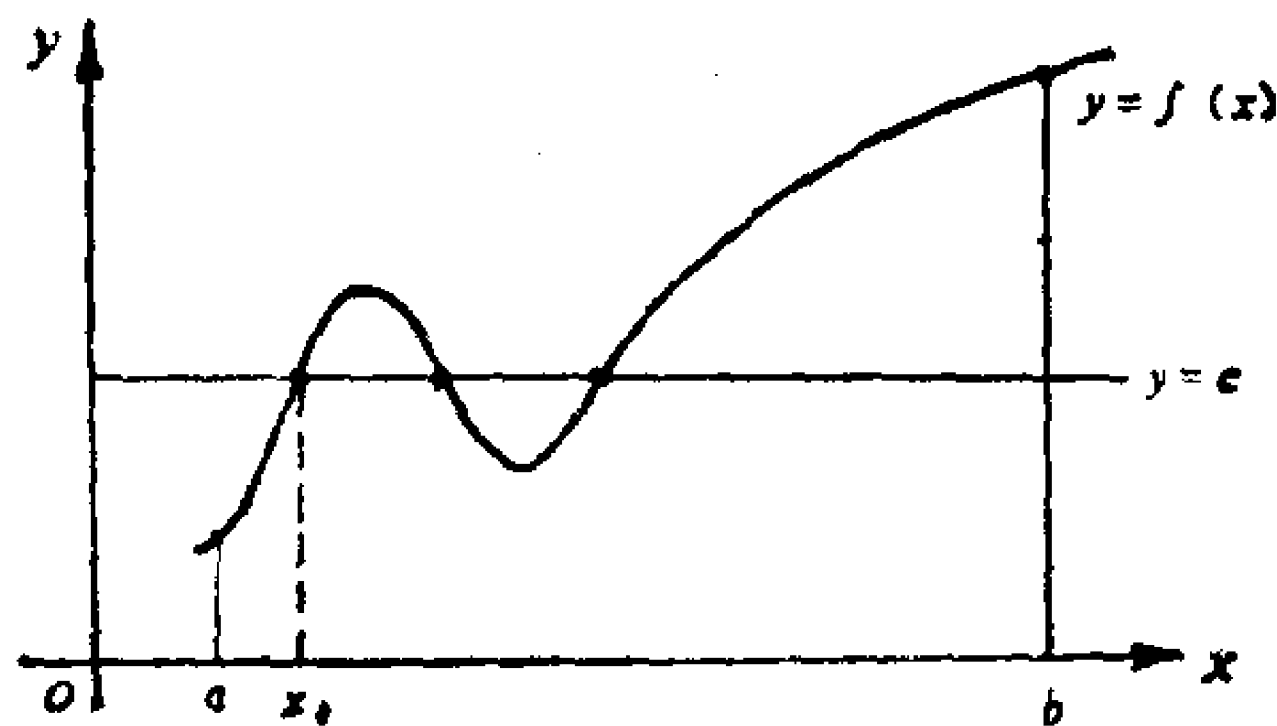


图 3·2

**证明** 令 $a_1 = a$ ， $b_1 = b$ 。 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right)$  等于 $c$ 、大于 $c$ 或小于 $c$ 三者有且仅有一成立。若 $f\left(\frac{a_1 + b_1}{2}\right) = c$ ，取 $x_0 =$



$\frac{a_1+b_1}{2}$  定理成立. 若  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) > c$ , 令  $a_2 = a_1$ ,

$b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ . 若  $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) < c$ , 令  $a_2 = \frac{a_1+a_2}{2}$ ,  $b_2 = b_1$ .

这样,  $f(a_2) < c$ ,  $f(b_2) > c$  成立. 再看  $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)$ ,

若  $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = c$ , 取  $x_0 = \frac{a_2+b_2}{2}$  定理成立. 若  $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

$> c$ , 令  $a_3 = a_2$ ,  $b_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ . 若  $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) < c$ , 令

$a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$ ,  $b_3 = b_2$ .

继续这样做下去, 或者在有限步求得  $x_0$ , 或者得到闭区间序列  $\{[a_n, b_n]\}$ , 后一区间是平分前一区间所得的两者之一的区间. 我们有

$$b_n - a_n = 2^{1-n} (b_1 - a_1),$$

且对  $\forall n$ , 有

$$f(a_n) < c, f(b_n) > c. \quad (3.1)$$

由闭区间套定理存在唯一  $x_0$ , 对  $\forall n$ ,  $x_0 \in [a_n, b_n]$  且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$$

由定理 2.20' 及  $f$  的连续性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

而由 (3.1) 及不等式的极限定理  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq c$  及  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq c$ , 得  $c \leq f(x_0) \leq c$ , 即  $f(x_0) = c$ .

## 习 题

1. 设函数  $f: x \rightarrow \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$

(a) 证明  $f$  在每一点  $x_0$  都不连续.

(b) 设  $g(x)$  是  $\mathbf{R}_1$  上连续函数, 当  $x$  为有理数时

$$g(x) = 1. \text{ 证明 } g(x) \equiv 1 \quad (\forall x \in \mathbf{R}_1).$$

2. 设  $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ,  $a_m \neq 0$ ,  $m$  为奇自然数.

(a) 用介值定理证明方程  $f(x) = 0$  至少有一个根.

(b) 证明  $f$  的值域是  $\mathbf{R}_1$ .

3. 设  $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  是偶次多项式.

且  $a_m a_0 < 0$ . 证明方程  $f(x) = 0$  至少有两个实根.

4. 函数称为递增的  $\iff$  若  $x_1 < x_2$  时有  $f(x_1) < f(x_2)$ . 设  $f$  是  $[a, b]$  上的递增函数,  $f$  具有介值性即介于  $f(a)$ ,  $f(b)$  之间的  $\forall c$ , 有  $x_0 \in [a, b]$  使  $f(x_0) = c$ . 证明  $f$  是  $[a, b]$  上连续函数.

## § 3.2 最小上界, 最大下界

本节证明有关实数系的一个与公理  $c$  相等价的基本原理.

**定义** 实数集  $S$  上界  $M \iff \forall x \in S, x \leq M$ , 也称集  $S$  以

$M$ 为上界。集 $S$ 有下界 $m \iff \forall x \in S, x \geq m$ ，也称集 $S$ 以 $m$ 为下界。集 $S$ 是有界的 $\iff S$ 既有上界又有下界。

设 $D$ 是函数 $f$ 的定义域， $S \subset D$ ，我们用 $f|_S$ 表示 $f$ 限制于集 $S$ 上的函数，即 $f|_S$ 的定义域是 $S$ ，对 $x \in S$ ， $f|_S(x) = f(x)$ 。

由上述定义立即导出

**定理3·3** 集 $S \subset \mathbb{R}_1$ 是有界的 $\iff \exists$ 数 $K, \forall x \in S, |x| \leq K$ 。函数 $f$ 在 $S$ 上有上界 $M \iff \forall x \in S, f(x) \leq M$ ；函数 $f$ 在 $S$ 上有下界 $m \iff \forall x \in S, f(x) \geq m$ 。函数 $f$ 在 $S$ 上有界 $\iff \exists K > 0, \forall x \in S, |f(x)| \leq K$ 。

$$\text{例如, } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad \text{在 } S = \{x : 0 \leq x \leq 1\} \text{ 上无界 (图3.3) .}$$

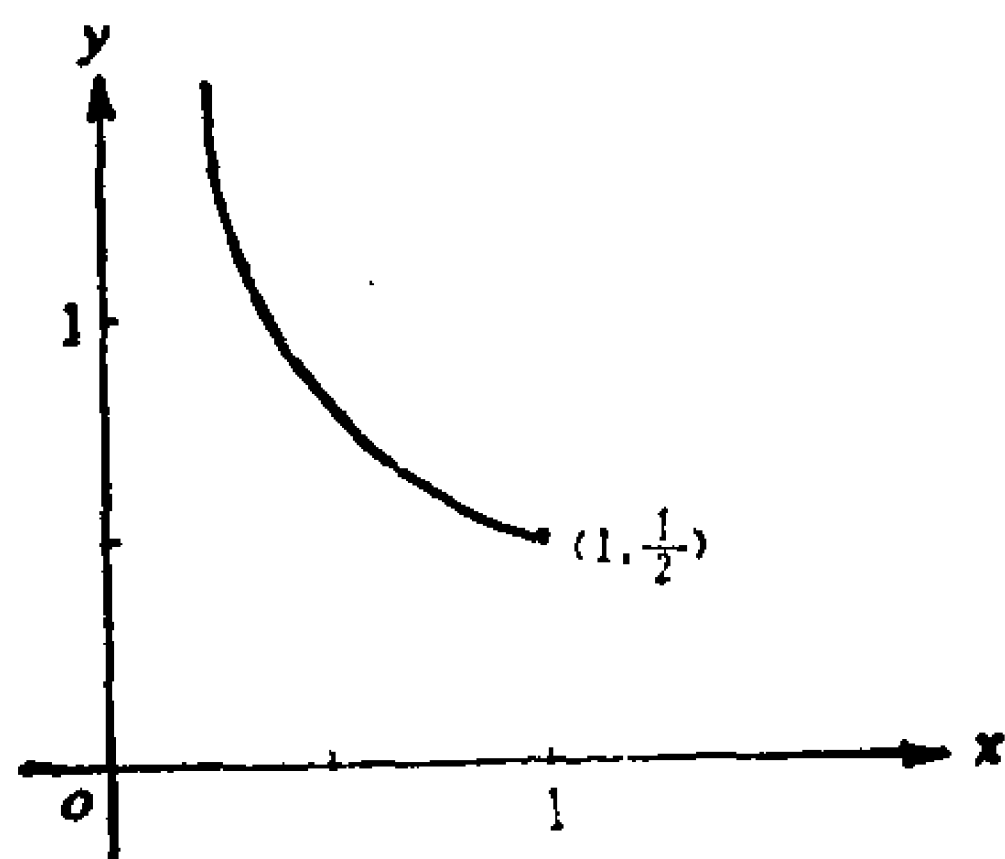


图 3·3

现在来证基本原理。

**定理3·4** 若 $\mathbb{R}_1$ 的子集 $S$ 非空且有上界 $M$ ，那么 $S$ 有最小上界 $U$ （即 $U$ 是 $S$ 的这样一个上界：当 $U' < U$ 时， $U'$ 不能是 $S$ 的上界）。若集 $S$ 非空且有下界 $m$ ，那么 $S$ 有最大下界 $L$ （即 $L$

是 $S$ 的这样的下界：当 $L' > L$ ， $L'$ 不能是 $S$ 的下界）。

**证明** 定理关于最大下界的论断可对集 $\{x, -x \in S\}$ 应用最小上界的论断得到。因此，我们仅需证明有上界 $M$ 的集 $S$ 存在最小上界 $U$ 。

如果上界 $M \in S$ ，取 $U = M$ 。这时，若 $U' < U$ ，由 $U \in S$ ， $U'$ 不能是 $S$ 的上界。 $U = M$ 便是 $S$ 的最小上界。

如果 $M \notin S$ 。设 $b_1 = M$ ，取 $a_1 \in S$ 。现在看 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 。(i)

若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 是上界且 $\frac{a_1 + b_1}{2} \in S$ ，取 $U = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 即可。(ii)

若 $\frac{a_1 + b_1}{2}$ 是上界不属于 $S$ ，令 $a_2 = a_1$ ， $b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ 。(iii)若

$\frac{a_1 + b_1}{2}$ 不是 $S$ 的上界，令 $a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ ， $b_2 = b_1$ 。继续这一作

法，或者在有限步(i)的情况出现，或者得到闭区间序列

$\{[a_n, b_n]\}$ ，对 $\forall n$ ，有

$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ 及

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) \quad (3.2)$$

因此对 $\forall n$ ， $\forall x \in S$ ，

$$b_n - a_n \leq 2^{1-n}(b_1 - a_1), \quad a_n \in S, \quad b_n > x. \quad (3.3)$$

由闭区间套定理3.1， $\exists$ 唯一的 $U$ 属于这所有的区间，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = U.$$

由 (3.3) 对  $\forall n, \forall x \in S, b_n > x$ . 由不等式极限定理, 有  $x \leq U$ , 即  $U$  为  $S$  的上界. 若  $U' < U$ , 令  $\varepsilon = U - U' > 0$ , 那么因为  $n \rightarrow \infty, a_n \rightarrow U, a_n \leq U, \exists N$ , 使  $n > N \Rightarrow U' = U - \varepsilon < a_n \leq U$ . 但  $a_n \in S, U'$  不能是  $S$  的上界. 所以  $U$  是  $S$  的最小上界



(图3.4).

图 3.4

**定义** 定理3.4中  $S$  的最小上界  $U$  也称为  $S$  的上确界, 表示为  $\text{l.u.b.} S$  或  $\sup S$ .

定理3.4中  $S$  的最大下界  $L$  也称为  $S$  的下确界, 表示为  $\text{g.l.b.} S$  或  $\inf S$ .

若用  $D(f), R(f)$  分别表示  $R_1$  上函数  $f$  的定义域, 值域,  $S \subset D(f)$ , 我们定义  $f$  在  $S$  上的上、下确界分别为

$$\text{l.u.b.}_S f = \sup_S f = \sup R(f|_S).$$

$$\text{g.l.b.}_S f = \inf_S f = \inf R(f|_S).$$

**推论** 若  $S$  含有最大数, 即  $\exists x_0 \in S$ , 对  $\forall x \in S$  有  $x_0 \geq x$ , 那么  $x_0 = \sup S$ . 若  $S$  不空,  $U = \sup S, U \in S$ . 那么  $\exists$  序列  $\{x_n\} \subset S, x_n \rightarrow U (n \rightarrow \infty)$ . 也即  $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S, x > U - \varepsilon$ . 相应的结果对  $\inf S$  也成立.

推论从定义及定理3.4的证明中得出.

借助于这一推论可以证明连续性公理c. 即在有序域公理系前提下, 连续性公理c与定理3.4彼此等价. 证明作为习题留给读者.

**定义** 以  $D(f)$  表示  $f$  的定义域, 称函数  $f$  在区间  $I \subset D(f)$

上递增  $\iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$  .  
 $f$  在  $I$  上不减  $\iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$  .  
 $f$  在  $I$  上递减  $\iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$  .  
 $f$  在  $I$  上不增  $\iff \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$  .  
 上述四种函数统称为单调函数.

单调函数不必是连续函数, 例如阶梯函数

$$f: x \longrightarrow n, \quad n-1 \leq x < n$$

$$n = 1, 2, \dots$$

其图象如图 3.5 所示. 单调函数可以是无界的. 例如  $f: x \rightarrow$

$$\frac{1}{1-x}, \text{ 在 } I = \{x: 0 \leq x <$$

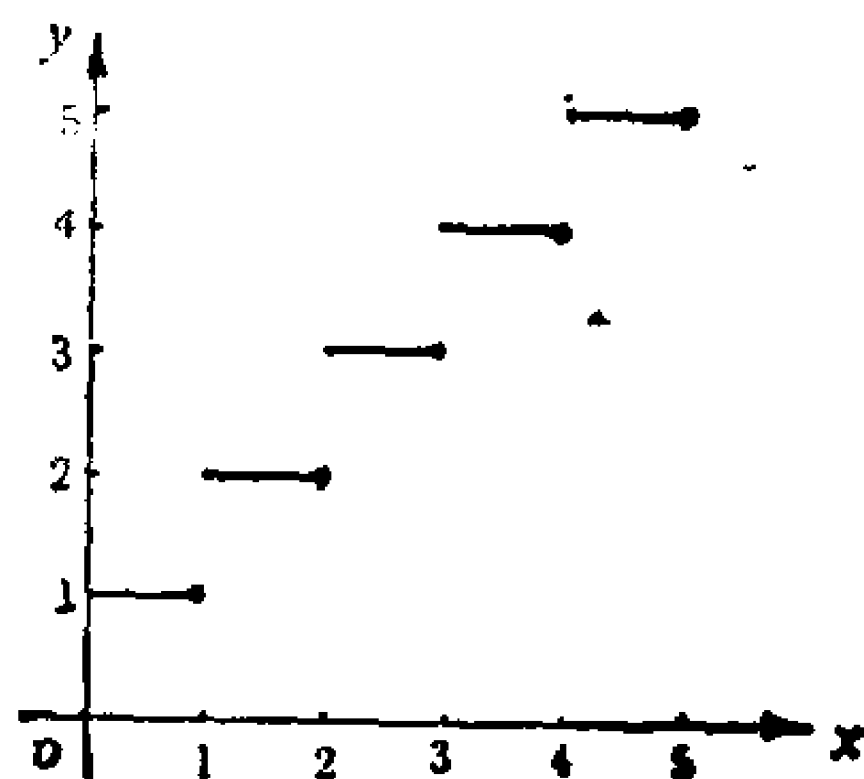


图 3.5

1} 上单调且无界.

下面关于单调函数单边极限存在性定理容易从定义及定理 3.4 导出. 它的证明留给读者.

**定理 3.5** 设  $f$  是区间  $I$  上单调且有界的函数. 那么  $f$  在  $I$  的每一点单边极限存在. 如果  $I$  是无限区间, 那么当  $x$  在相应方向趋向无穷时  $f$  的极限存在.

容易直观地想象到在区间上单增、连续函数  $f$  的值域  $R(f)$  是一个区间. 其实不必单调, 凡连续函数它的值域  $R(f)$  必是区间. 为了证明这一定理 3.7, 先来证明关于区间特征的定理.

**定理 3.6** 集  $S \subset \mathbb{R}_1$  是区间  $\iff$  (i)  $\exists x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$ ,  
 (ii) 对  $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \implies [x_1, x_2] \subset S$ .

**证明** 若  $S$  是一区间, 虽然  $S$  具有性质 (i) 与 (ii).

其逆，可分几种情况研究。

情况 1：S 有界。令  $a = \inf S$ ,  $b = \sup S$ 。设  $x \in (a, b)$  证明  $x \in S$ 。

因为  $a = \inf S$  及  $a < x$ ，据定理 3.4 推论，断定  $\exists x_1 \in S$ ,  $x_1 < x$ 。而由  $b = \sup S$  及  $x < b$ ，同理  $\exists x_2 \in S$ ,  $x_2 > x$ 。由 (ii)  $[x_1, x_2] \subset S$ 。而  $x \in [x_1, x_2]$ ，所以  $x \in S$ 。于是  $(a, b) \subset S$ 。这样一来，S 或为  $(a, b)$  或为以  $a, b$  为端点的闭区间、半开区间。

情况 2：S 无界。不妨设 S 有下界无上界，令  $a = \inf S$ ，那么  $S \subset [a, \infty)$ 。设  $x > a$ ，我们来证明  $x \in S$ 。按情况 1 的同样理由， $\exists x_1 \in S$ ,  $x_1 < x$ 。因为 S 无上界， $\exists x_2 \in S$ ,  $x_2 > x$ 。由 (ii)  $x \in (x_1, x_2) \subset S$ 。于是得到  $S = [a, \infty)$  或  $S = (a, \infty)$ 。

当 S 无下界有上界或无下界也无上界时，类似可证 S 是  $[-\infty, b]$  或  $(-\infty, b)$  及  $S = (-\infty, \infty)$ 。其证明请读者完成。

现在来证明改进了的介值定理。

**定理 3.7** 设  $f$  是定义在区间  $I$  上的不恒等于常数的连续函数，那么  $J = R(f)$  是一个区间。

**证明** 证明  $J$  具有区间的特征即定理 3.6 的 (i) 及 (ii) 的性质。

由  $f$  在  $I$  上不恒为常数，那么  $J$  至少含有两个点，性质 (i) 成立。现设  $y_1 < y_2$  且  $y_1, y_2 \in J$ ,  $\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I$ ,  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ ，不妨认为  $x_1 < x_2$ 。由  $f$  在  $[x_1, x_2]$  上连续，可以应用介值定理：对  $\forall c \in [y_1, y_2]$ ,  $\forall x_0 \in [x_1, x_2]$  使  $f(x_0) = c$ 。于是  $c \in J$ ，即  $J$  具有性质 (ii)。

注 定理3.7中, 当 $I=[a, b]$ ,  $J$ 不必是 $f(a), f(b)$ 所决定的区间. 图3.6所示 $[f(a), f(b)]$ 是 $J$ 的真子区间,  $[f(a), f(b)]$ 包含在 $J$ 内但不等于 $J$ . 注意 $I$ 有界 $J$ 无界,  $I$ 无界 $J$ 有界的情况都可能出现. 例如 $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ ,  $I = \{x: 0 < x < 1\}$  其  $J = (1, +\infty)$ .  $f: x \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$ ,  $I = \{x: -\infty \leq x \leq +\infty\}$  其  $J = (0, 1]$ .

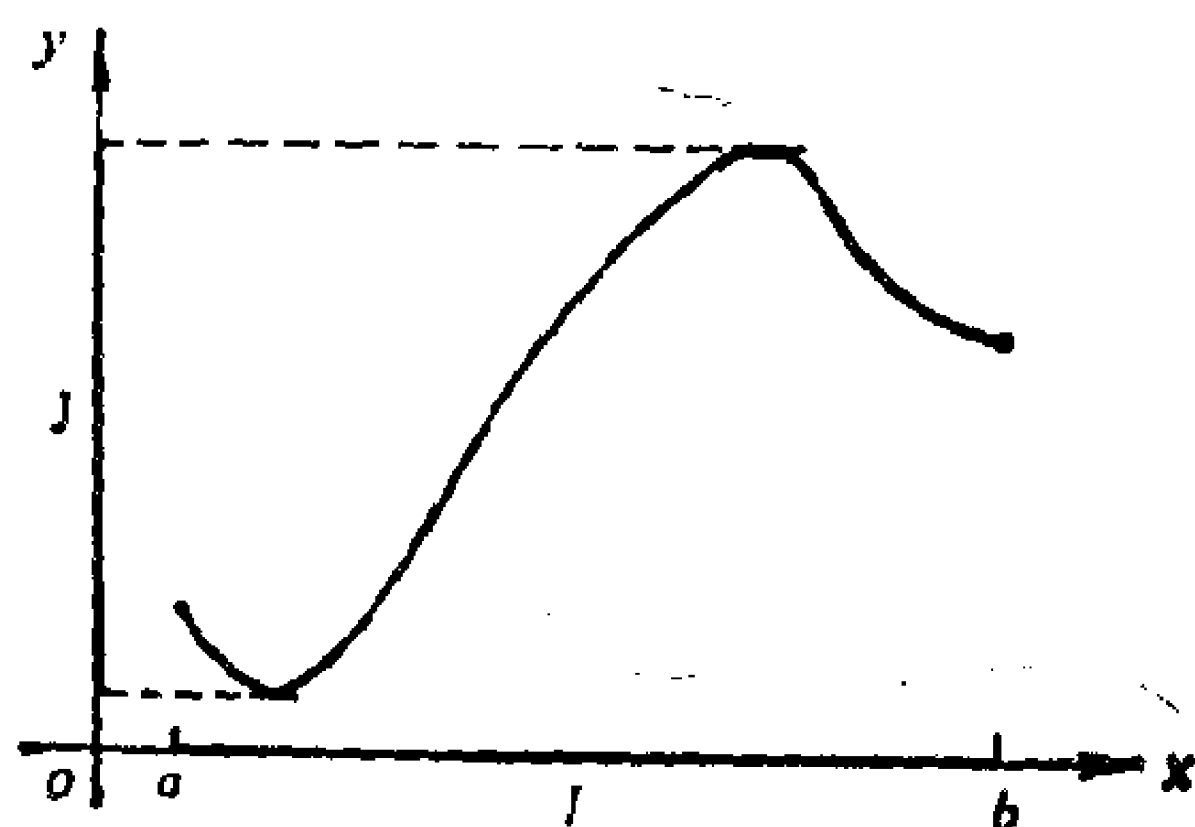


图 3.6

于 $[0, \infty)$ 上研究函数 $f: x \rightarrow x^n$  ( $n$ 为自然数). 因为 $f(0) = 0$ ,  $f(x)$ 递增, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 由定理3.7,  $f$ 的值域为 $[0, \infty)$ . 因此 $\forall x \geq 0$ ,  $\exists$ 数 $y \geq 0$ 使 $y^n = x$ . 当 $y' > y \Rightarrow y'^n > y^n = x$ ; 当 $y' \geq 0$ 且 $y' < y \Rightarrow (y')^n < y^n = x$ . 因此 $y^n = x$ 的解 $y$ 是唯一的. 把 $y^n = x$ 的解 $y$ 记为 $x^{\frac{1}{n}}$ , 函数 $x \rightarrow x^{\frac{1}{n}}$ ,  $x \in [0, \infty)$ . 按第二章的方法可以证明它是连续的 (也可参看定理4.17).

## 习 题

习题1—8求 $l \cdot u \cdot b \cdot S$ 与 $g \cdot l \cdot b \cdot S$ , 并指出它们是否属于 $S$ .

1.  $S = \{x: 0 < x \leq 3\}$

2.  $S = \{x: x^2 - 3 < 0\}$



$$3. S = \{x : x^2 - 2x - 3 < 0\} \quad 4. S = \{y : y = \frac{x}{x+1}, x \geq 0\}$$

$$5. S = \{S_n : S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}, n = 1, 2, \dots\}$$

$$6. S = \{S_n : S_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!}, n = 1, 2, \dots\}$$

$$7. S = \{x : 0 < x < 5, \cos x = 0\}$$

$$8. S = \{x : |x| < 10, \sin x = \frac{1}{2}\}$$

$$9. \text{ 设 } S = \left\{ S_n : S_n = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}, n = 1, 2, \dots \right\}, \text{ 证明 } 3 \text{ 是 } S$$

的一个上界数.

$$10. \text{ 设 } S_1 \subset S_2, \text{ 证明 } \inf S_2 \leq \inf S_1, \sup S_1 \leq \sup S_2.$$

$$*11. \text{ 设 } S_1, S_2, \dots, S_n, \dots \text{ 为给定的集. 定义 } B_i = \sup S_i, b_i = \inf S_i$$

(a) 证明若  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ , 那么

$$\sup S = \max(B_1, B_2, \dots, B_n),$$

$$\inf S = \min(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

(b) 若  $S$  是无限个集  $S_i$  的并  $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ , 确定

$\sup S$  与  $\{B_i\}$ ,  $\inf S$  与  $\{b_i\}$  之间的关系.

(c) 若  $S = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n$ , 且  $S \neq \varnothing$  求以  $\{b_i\}$ ,  $\{B_i\}$  表示  $\sup S$ ,  $\inf S$  的公式,

12. 用定理3·4的推论证明连续性公理c [提示: 设  $B = \sup \{x_n\}$ , 证明当  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \rightarrow B$ .]
13. 证明定理3·5.
14. 证明定理3·6中当S无上界也无下界时,  $S = (-\infty, \infty)$ .
15. 设给定集  $S_1 \subset \mathbb{R}_1$ ,  $S_2 \subset \mathbb{R}_1$ . 定义  $S = \{x: x = x_1 + x_2, x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$ , 用  $\sup S_i$ ,  $\inf S_i$  ( $i = 1, 2$ ) 表示  $\sup S$  及  $\inf S$ . 若  $-S_1 = \{x: -x \in S_1\}$ , 证明  $\sup(-S_1) = \inf S_1$ .
- 16. 设S是两两最多有一公共点的有限个闭区间  $I_1, I_2, \dots, I_n$  的并集. 设f定义域是S且在每一  $I_i$  上是单调的. 证明定理3·5对函数f成立. 举例说明S为无限多个闭区间的并时, S无界或S有界, 定理3·5的结果都可能不成立.

### § 3·3 波尔查诺—外尔斯特拉斯定理

设  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  (3·4)

是实数序列.  $x_1, x_3, x_5, \dots$  及  $x_2, x_5, x_8, x_{11}, \dots$  都是序列 (3·4) 的子序列. 一般地, 若  $k_1, k_2, k_3, \dots$  是自然数的递增序列, 称

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}, \dots$$

为 (3·4) 的子序列. 记  $y_1 = x_{k_1}, y_2 = x_{k_2}, \dots, y_n = x_{k_n}, \dots$ , 就可以避免双重下标,  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  是 (3·4) 的子列.

当序列 (3·4) 有极限L, 我们也说序列  $\{x_n\}$  收敛于L. 很明显, 序列 (3·4) 收敛, 它的任何一个子序列收敛于同一极限. 在分析中常常遇到从给定序列中挑收敛的子序列的

问题。例如序列

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -\frac{2}{3}, \dots, x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), \dots \quad (3.5)$$

的子序列

$$0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}, -\frac{6}{7}, \dots, -\frac{2k}{2k+1}, \dots,$$
$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2k-1}{2k}, \dots$$

是分别取 (3.5) 的奇数项及偶数项得到的。它们分别收敛于  $-1, 1$ , 但原序列 (3.5) 不收敛。给出一序列存在收敛子序列的条件的一个基本定理是本节的波尔查诺—外尔斯特拉斯定理。这一定理是我们证明连续函数重要性质定理等许多定理的工具, 并且从中发展出第六章距离空间中的列紧性概念。

**定理3.8 (波尔查诺—外尔斯特拉斯定理)** 有界的实数序列  $\{x_n\}$  包含有收敛子序列。

**证明** 用闭区间套定理从有界序列  $\{x_n\}$  中挑出一收敛子序列。不妨认为  $\{x_n\}$  含有无限多个点。

$\{x_n\}$  是有界的,  $\exists$  闭区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  包含  $\{x_n\}$  的所有点。以  $\frac{a+b}{2}$  分  $I$  为等长的两闭子区间。至少

有其中之一含有  $\{x_n\}$  的无限多个点。以  $I_1 = \{x : a_1 \leq x \leq b_1\}$  表示这一子区间, 并从  $I_1$  所含有的  $\{x_n\}$  的无限多个点

中选取一个  $x_{n_1}$ , 记为  $y_1 = x_{n_1}$ , 再以  $I_1$  的中点  $\frac{a_1+b_1}{2}$  分  $I_1$  为

等长的两闭子区间. 与前同样, 至少其中一个区间含有  $\{x_n\}$  的无限多个点, 以  $I_2 = \{x: a_2 \leq x \leq b_2\}$  表示这一子区间, 因  $I_2$  含有  $\{x_n\}$  的无限多个点, 能从中选取一  $x_{n_2}$ ,  $n_2 > n_1$ , 记为  $y_2 = x_{n_2}$ . 继续作下去得闭区间序列

$$I_k = \{x: a_k \leq x \leq b_k\}, \quad k = 2, 3, \dots, n \dots,$$

及  $\{x_n\}$  的子列  $y_k = x_{n_k} \in I_k$ ,  $n_{k-1} < n_k$

$I_k$  具有性质:  $I_k$  包含  $\{x_n\}$  的无限多个点, 且  $I_{k-1} \supset I_k$ ,

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k} (b - a) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \text{ 据闭区间套定理 } \exists \text{ 唯}$$

一的  $x_0 \in I_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n \dots$ .

现在证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0$ . 事实上由

$$a_k \leq y_k \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots,$$

而  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = x_0$ , 由两边夹定理 (定理2.10) 得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = x_0 \in I.$$

注 由定理的证明可知, 当  $\{x_n\} \subset$  闭区间  $I$ , 则收敛的子列的极限  $x_0 \in I$ .

## 习 题

习题1—7确定所给序列是否收敛. 在序列不收敛的情况时, 至少挑出它的一个收敛的子序列.

$$1. x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad 2. x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$3. x_n = (-1)^n (2 - 2^{-n}). \quad 4. x_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{2^i}$$

$$5. x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}. \quad 6. x_n = \sin \frac{n\pi}{2} + \cos n\pi.$$

$$7. x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{3}.$$

8. 设  $\{x_n\}$  收敛于  $L$ , 证明  $\{x_n\}$  的每个子序列  $\{y_n\}$  都收敛于  $L$ .

9. (a)  $N$  是一自然数, 写出一序列使它含有分别收敛于  $N$  个不同数的  $N$  个收敛子列.

\* (b) 写出一个序列, 它有分别收敛于无限多个不同的数的

的子序列. [提示: 例如序列  $1 \frac{1}{2}, 2 \frac{1}{2}, 3 \frac{1}{2},$

$1 \frac{1}{4}, 2 \frac{1}{4}, 3 \frac{1}{4}, \dots, 1 \frac{1}{2^n}, 2 \frac{1}{2^n}, 3 \frac{1}{2^n} \dots$  有分

别收敛于  $1, 2, 3$  的子序列]

### § 3.4 有界性及极值性定理

本节建立闭区间上连续函数的值域有界且包含它的上、下确界的定理。这两个定理不仅对证明微分学各基本定理是不可缺少的, 其重要意义还在于它被推广为一般形式之后 (见第六章), 在很多分析分支当中被应用。

**定理3·9 (有界性定理)** 设 $f$ 的定义域是闭区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $f$ 在 $I$ 上连续, 那么 $f$ 的值域是有界的.

**证明** 若不然,  $f$ 的值域无界将导致矛盾. 当值域无界, 对 $\forall$ 自然数 $n$ ,  $\exists x_n \in I$ , 使 $|f(x_n)| > n$ . 而 $\{x_n\}$ 是有界序列. 据波尔查诺—外尔斯特拉斯定理 $\{x_n\}$ 有一收敛子序列 $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ,  $(y_n = x_{t_n}) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$ . 因为 $I$ 是闭区间,  $x_0 \in I$ . 由 $f$ 在 $I$ 上连续当然在 $x_0$ 点连续, 由连续性 & 定理2·20. 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x_0).$$

这与 $|f(y_n)| = |f(x_{t_n})| > k_n \geq n \rightarrow +\infty \ (n \rightarrow \infty)$  矛盾.

注 定理3·9中, 假设 $f$ 定义域为闭的是不可缺少的条件. 例如函数 $f: x \rightarrow \frac{1}{1-x}$ 在半开区间 $I = \{x : 0 \leq x < 1\}$ 上连续, 但 $f$ 在 $I$ 上无界.

**定理3·10 (极值性定理)** 设 $f$ 的定义域为闭区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $f$ 在 $I$ 上连续, 那么 $\exists x_0, x_1 \in I$ , 使对 $\forall x \in I$ , 有 $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ . 即 $f$ 在 $I$ 上取到它的最小值及最大值.

**证明** 由定理3·9,  $f$ 的值域 $R(f)$ 是有界集. 定义

$$M = \sup_{x \in I} f(x), \quad m = \inf_{x \in I} f(x).$$

要证明 $\exists x_0, x_1 \in I$ , 使 $f(x_0) = m, f(x_1) = M$ . 我们仅证明 $\exists x_1, x_0$ 的存在性证明是类似的.

假定 $M \in \overline{R(f)}$  定义函数 $F$

$$F: x \longrightarrow \frac{1}{M - f(x)}.$$

因为 $M - f(x) > 0$  对 $\forall x \in I$ 成立. 所以 $F$ 为在 $I$ 上有定义的

正值连续函数。据定理3·9.  $R(F)$ 有界。定义  $\overline{M} = \sup_{x \in I} F(x)$ ,

那么  $\overline{M} > 0$  且对  $x \in I$ , 有

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} \leq \overline{M} \text{ 即 } f(x) \leq M - \frac{1}{\overline{M}}.$$

但  $f(x) \leq M - \frac{1}{\overline{M}}$  与  $M = \sup_{x \in I} f(x)$  相矛盾。因此  $M \in R(f)$ 。

注 定理3·10之  $I$  不设为闭区间, 定理结论不真。例如  $f: x \rightarrow x'$  在半开区间  $I = \{x: 0 \leq x < 1\}$  上连续在  $I$  上不能取到最大值, 其值域是  $[0, 1)$  不包含上确界 1。此外, 定理3·10肯定  $x_1, x_2$  分别至少存在一个, 可能出现若干最大值或最小值点的情况, 例如  $f: x \rightarrow \sin 4\pi x$  在  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$  上的  $x_1 = \frac{1}{8}, x_2 = \frac{5}{8}$  都取到最大值 1。

### § 3·5 一致连续性

函数于点  $x_0$  连续性的定义里, 对每一预先给定的正数  $\varepsilon$  能找到相应的正数  $\delta$  (§ 2·1)。这里  $\delta$  当然依赖于  $\varepsilon$ , 同时也依赖于  $x_0$  的选取。当对定义域的所有  $x$  点能有同一个  $\delta$  的情况出现时, 我们说  $f$  具有一致连续性。

**定义** 函数  $f$  在定义域  $S$  上一致连续  $\iff$  对  $\forall \varepsilon > 0, \exists$  相应的  $\delta > 0$ , 使当  $x_1, x_2 \in S$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时  $\implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ 。

一致连续性的重要条件是指出对  $S$  中所有  $x_1, x_2$  有同样的  $\delta$ 。

连续函数在闭区间上一致连续的性质在证明积分学的基

本定理中起重要作用。第六章中它的一般化定理在分析中同样也有很多应用。

在 $S$ 上连续的函数可能不一致连续。例如

$$f: x \rightarrow \frac{1}{x}, \quad x \in S = \{x: 0 < x \leq 1\}.$$

显然 $f$ 在 $S$ 上连续。对给定 $\varepsilon > 0$ 。如取 $\varepsilon = 1$ 。找不到使 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ，对一切 $x_1, x_2$ 成立的 $\delta$ 。如图3·7所示，当 $x_1, x_2$ 越接近0点，函数变化越“陡”，要求 $\delta$ 越小。以致没有一致适用的正数 $\delta$ 。事实上，取

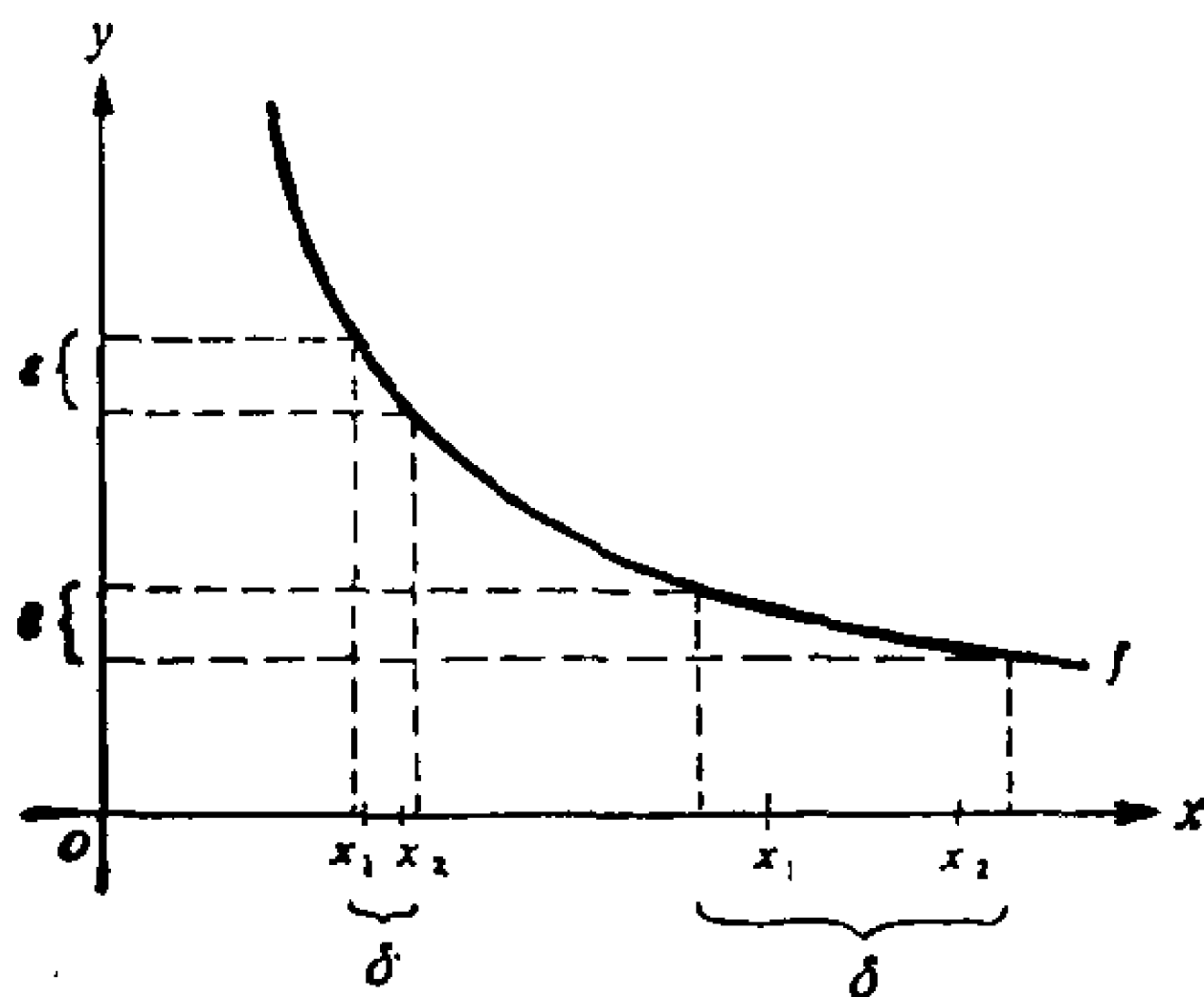


图 3·7

$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{1}{n+1}$ ，这时 $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$ ，而 $|x_1 - x_2|$

$= \frac{1}{n(n+1)}$ 。不论取定 $\delta > 0$ 如何小，当 $n$ 足够大，可使

$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta$ ，而 $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$ 并不

小于1。



在集 $S$ 上一致连续的例子如:

$$f: x \rightarrow x^2, S = \{x: 0 \leq x \leq 1\}. \quad (3.6)$$

设  $\varepsilon > 0$ , 要求一  $\delta > 0$ , 使当  $|x_1 - x_2| < \delta$  有  $|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$ , 对 $S$ 内一切这样的 $x_1, x_2$ 成立. 为此取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ . 注意到

$x_1, x_2$  是小于 1 的正数, 那么

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这一不等式对  $[0, 1]$  中一切满足  $|x_1 - x_2| < \delta$  的  $x_1, x_2$  成立.

**定理 3.11 (一致连续性定理)** 设函数  $f$  在闭区间  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上连续, 那么  $f$  在  $I$  上一致连续.

**证明** 假定  $f$  在  $I$  上不一致连续将导致矛盾. 设  $f$  在  $I$  上不一致连续.  $\exists \varepsilon_0 > 0$ , 对它不存在  $\delta > 0$ , 具有性质: 当  $|x_1 - x_2| < \delta$  有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$ , 对  $I$  内一切这样的  $x_1,$

$x_2$  成立. 也即不论  $\delta$  如何小, 如取  $\delta = \frac{1}{n}$ , 也能找到  $x_n',$

$x_n'' \in I$ , 满足

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \text{ 且 } |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0 \quad (3.7)$$

按波尔查诺—外尔斯特拉斯定理, 有界点列  $\{x_n'\}$  有收敛子列  $\{x_{k_n}'\}$ ,  $\{x_{k_n}'\}$  收敛于某一  $x_0$ . 由  $I$  是闭的,  $x_0 \in I$ .

那么, 由  $|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}$ , 导出  $|x_{k_n}' - x_{k_n}''| < \frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{n},$

也有  $\{x'_{k_n}\}$  收敛于同一点  $x_0$ 。由  $f(x)$  在  $x_0$  连续及定理

2.20,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_{k_n}) = f(x_0)$ 。由此导出

$$f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n}) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

但这与 (3.7) 式相矛盾。

注  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ ,  $x \in S = \{x: 0 < x \leq 1\}$  不一致连续, 说明定理 3.11 区间  $I$

是闭的要求不能去掉。当然在开区间上甚至无穷区间上函数也可能是一致连续的。例如  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ ,  $x \in S_1 = \{x: 1 \leq x < \infty\}$  在  $S_1$  上一致连续。对这些情况应当

具体分析。

## 习 题

1. 设  $f$  是在闭区间  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上连续且递增的函数, 证明  $f$  的值域是区间  $[f(a), f(b)]$ 。

\*2. 用波尔查诺—外尔斯特拉斯定理证明极值性定理。

3. 举出在  $S = \{x: 0 \leq x < \infty\}$  上连续且有界的函数  $f$ , 在  $S$  上极值性定理不成立。

4. 设  $f$  在闭区间  $I_1$  及  $I_2$  上连续, 证明  $f$  在  $S = I_1 \cup I_2$  上一致连续。

5. 证明函数  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$  在  $S = \{x: 1 \leq x < +\infty\}$  上一致连续。

6. 证明函数  $f: x \rightarrow \sin x$  在  $S = \{x: -\infty < x < +\infty\}$  上一致连续。

7. 设  $f$  在  $I = \{x: a < x < b\}$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

$$\text{存在。证明函数 } f_0 = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), & \text{当 } x = a, \\ f(x) & a < x < b \\ \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) & x = b \end{cases}$$

在  $[a, b]$  上一致连续。

8. 判断函数  $f: x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in I = \{x: 0 < x \leq 1\}$  在  $I$  上是

否一致连续。

9. 按定义证明  $f: x \rightarrow \sqrt{x}$  在  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$  上一致连续。

10. 设  $f$  在半开区间  $I = \{x: 0 < x \leq 1\}$  上一致连续,  $f$  在  $I$  上是否有界?

### § 3.6 哥西序列与哥西准则

序列  $\{x_n\}$  收敛于极限  $L$  的定义是对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  自然数  $N$ , 使当  $n > N$ , 有

$$|x_n - L| < \varepsilon. \quad (3.8)$$

如果要判断给定的序列是否收敛, 常常是数  $L$  并未给出, 这样 (3.8) 的条件由于不知道  $L$  不能直接验证。由此可见, 在  $L$  未给出的情况下找出判定序列收敛性的准则就是很重要的了。如下所述的准则首先由哥西给出。

**定义** 无限序列  $\{x_n\}$  称为哥西序列  $\Leftrightarrow$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  一自然数  $N$ , 使对一切  $m > N$ ,  $n > N$  的  $m, n$ , 有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**定理 3.12 (哥西收敛准则)** 序列  $\{x_n\}$  收敛的必要充分条件为  $\{x_n\}$  是哥西序列。

**证明** 先证必要性：设序列  $\{x_n\}$  收敛，那么它是哥西序列。以  $L$  表示  $\{x_n\}$  的极限，对  $\forall \varepsilon > 0$ ，由收敛的定义， $\exists N$  使当  $n > N$ ，有

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设  $x_m$  是  $\{x_n\}$  的一个  $m > n$  的元素。有

$$|x_n - x_m| = |x_n - L + L - x_m| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \varepsilon.$$

于是  $\{x_n\}$  是哥西序列。

现证充分性：设序列  $\{x_n\}$  是哥西序列，那么  $\{x_n\}$  收敛。首先证明  $\{x_n\}$  有界。根据哥西序列的定义取  $\varepsilon = 1$ ， $\exists N_0$ ，使当  $\forall m > N_0$  及  $\forall n > N_0$ ，有  $|x_m - x_n| < 1$ 。取定  $m = N_0 + 1$ ，得到  $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$  对  $\forall n > N_0$  成立。于是，对  $\forall n > N_0$

$$|x_n| = |x_n - x_{N_0+1} + x_{N_0+1}| \leq$$

$$|x_n - x_{N_0+1}| + |x_{N_0+1}| < 1 + |x_{N_0+1}|.$$

注意到  $N_0$  是固定的自然数。记  $M = \max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0}|, (|x_{N_0+1}| + 1) \}$ ，对  $\forall n$  有  $|x_n| < M$ ，即  $\{x_n\}$  是有界序列。

对  $\{x_n\}$  应用波尔查诺—外尔斯特拉斯定理， $\exists \{x_{k_n}\}$  的子序列  $\{x_{k_n}\}$ ， $\{x_{k_n}\}$  收敛于极限  $L$ ， $\{x_n\}$  也收敛于  $L$ 。事实上，对  $\forall \varepsilon > 0$ ， $\{x_n\}$  是哥西序列， $\exists N_1$ ，使对

$$\forall n > N_1, \forall m > N_1 \text{ 有 } |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而又由  $\{x_{k_n}\}$  收敛于  $L$ ， $\exists N_2$ ，当  $n > N_2$  有  $|x_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ 。记  $N = \max \{ N_1, N_2 \}$ ，

$N_2\}$ ，对 $\forall n > N$ ，注意 $k_n \geq n$ ，便有

$$\begin{aligned} |x_n - L| &= |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - L| \\ &\leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

于是 $\{x_n\}$ 收敛于 $L$ 。

例 证明 $x_n = \frac{\cos n\pi}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ 是哥西序列。对 $\forall \varepsilon > 0$ ,

选一大于 $\frac{2}{\varepsilon}$ 的整数 $N$ ，对 $\forall n, m$

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= \left| \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\cos m\pi}{m} \right| \leq \frac{m|\cos n\pi| + n|\cos m\pi|}{mn} \\ &= \frac{m+n}{mn}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } m > n > N, \frac{m+n}{mn} < \frac{2m}{mn} = \frac{2}{n} < 2 \cdot \frac{2}{\varepsilon} = \varepsilon,$$

即 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 。因此 $\{x_n\}$ 是哥西序列。

### § 3.7 汉茵一波赖尔与勒贝格定理

本节将证明今后发展微积分很有用的互相等价的两个定理。它们在证明一致连续性时特别方便。在第六章还将给出它的一般化结果。

通常以 $\mathcal{S}$ 表示集族，例如研究区间族

$$I_n = \left\{ x : \frac{1}{n} < x < 1 \right\}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.9)$$

(3·9) 的区间族 $\mathcal{J}$ 是以区间为元素的集。区间本身又是实数的集为了不发生混淆,把 $\mathcal{J}$ 叫作族。必须小心地区别 $\mathcal{J}$ 中

的区间的点与区间本身。区间 $J = \{x : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$ 不是

$\mathcal{J}$ 的元素,可是 $J$ 的每一点含于 $n > 2$ 的每一 $I_n$ 内。

**定义** 区间族 $\mathcal{J}$ 称为集 $S(S \subset \mathbf{R}_1)$ 的覆盖 $\iff \forall x \in S$ ,  
 $x$ 至少属于 $\mathcal{J}$ 的一个区间内。

例如区间族(3·9)覆盖了集 $S = \{x : 0 < x < 1\}$ ,因为  
 $\forall x \in S$ , 当 $n > \frac{1}{x}$ 时 $x \in I_n$ 。

我们感兴趣的是:当 $\mathcal{J}$ 是无限多个区间的族, $\mathcal{J}$ 覆盖了集 $S$ ,能否从 $\mathcal{J}$ 中挑出有限多个区间组成 $\mathcal{J}$ 的一个有限的子

族还能覆盖集 $S$ 。例如族 $\mathcal{J} = \{k_n : k_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n})$ ,

$n = 1, 2, \dots\}$ 覆盖了 $S = \{x : 0 < x < \frac{1}{2}\}$ ,  $\mathcal{J}$ 不存在能

够覆盖 $S$ 的有限的子族(习题13)。可是对任一 $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ,

$S_1 = \{x : \varepsilon < x < \frac{1}{2}\}$   $\mathcal{J}$ 存在有限子族 $\{k_1, k_2, \dots k_n\}$

覆盖了 $S_1$ , 此处 $n + 2 > \frac{1}{\varepsilon}$ 。

常常间接地定义区间族。例如，设  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$  其定义域

$D = \{x: 0 < x \leq 1\}$ 。对  $a \in D$  满足  $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{3}$  的

解  $x$  的集为

$$L_a = \left\{x: \frac{3a}{3+a} < x < \frac{3a}{3-a}\right\}.$$

$L_a$  组成的族  $\mathcal{J} = \{L_a: a \in D\}$  覆盖了集  $D$ ，但  $\mathcal{J}$  不存在能覆盖  $D$  的有限子族（习题16）。

$D$  之所以不能被  $\mathcal{J}$  的有限子族所覆盖，其原因在于  $D$  是半开区间。

**定理3.13**（汉茵一波赖尔定理） 设开区间族  $\mathcal{J}$  覆盖了闭区间  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ ，那么存在  $\mathcal{J}$  的有限子族仍能覆盖  $I$ 。

**证明** 用反证法。若  $I$  不能被  $\mathcal{J}$  的有限子族所覆盖。以  $I$  的中点分  $I$  为两个等长的闭区间，则至少有一子闭区间不能被  $\mathcal{J}$  的有限的子族所覆盖，以  $I_1$  表示这一子区间， $I_1 = [a_1, b_1]$ 。继续分  $I_1$  为两个等长的闭子区间，以  $I_2 = [a_2, b_2]$  表示其中不能被  $\mathcal{J}$  的有限子族所覆盖的一个子区间。继续这一步骤，得到闭区间序列

$$I_n = \{x: a_n \leq x \leq b_n\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

每一  $I_n$  都不能被  $\mathcal{J}$  的有限子族所覆盖，但由于  $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$

$(b-a) \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$ , 据闭区间套定理, 存在属于所有  $I_n$  中的唯一点  $x_0$ . 既然  $\mathcal{F}$  覆盖了  $I$ ,  $x_0 \in I$ , 存在  $\mathcal{F}$  的元素  $J = \{x : a < x < \beta\}$  含有  $x_0$ . 即

$$a < x_0 < \beta$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ , 当  $N$  足够大时, 有

$$a < a_N \leq x_0 \leq b_N < \beta. \quad \text{即 } I_N \subset J.$$

这样  $I_N$  竟被  $\mathcal{F}$  的一个元素  $J$  的有限族所覆盖. 这与  $I_N$  不能被有限多个  $\mathcal{F}$  的元素的子族所覆盖的性质相矛盾. 于是定理被证明.

注 定理3.13中  $I$  为闭区间的“闭”字是不可少的, 我们已举出了反例. 现在举例说明区间改为无穷区间结果也不成立. 例如区间  $k = \{x : 0 \leq x < \infty\}$  被  $\mathcal{F}_1 = \{k_n : k_n = (n-1, n+1, n=0, 1, 2, \dots)\}$  所覆盖, 但  $k$  不能被  $\mathcal{F}$  的有限子族所覆盖.

汉茵一波赖尔定理通常称为有限覆盖定理. 和它等价的另一种有用的形式称为勒贝格引理.

**定理3.14 (勒贝格引理)** 设一开区间族  $\mathcal{F}$  覆盖了闭区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ , 那么存在一正数  $\rho$ , 对每一  $c \in I$ , 能使区间  $J_c = (c-\rho, c+\rho)$  包含于  $\mathcal{F}$  的某个元素内.

**证明** 由  $\mathcal{F}$  覆盖了  $I$ ,  $\forall c \in I$ ,  $\exists \mathcal{F}$  的元素  $I_c = \{x : a_c < x < \beta_c\}$ ,  $c \in I_c$ . 记  $2\delta_c = \min\{(c-a_c), (\beta_c-c)\}$  (图3.8), 区间  $(c-2\delta_c, c+2\delta_c) \subset I_c$ . 记  $K_c = (c-\delta_c, c+\delta_c)$  图3.8 (图3.9), 设  $\mathcal{G}$  是所有  $K_c$  组成的族. 注意对  $\forall c \in I$

$$K_c \subset I_c, \quad I_c \in \mathcal{F}.$$



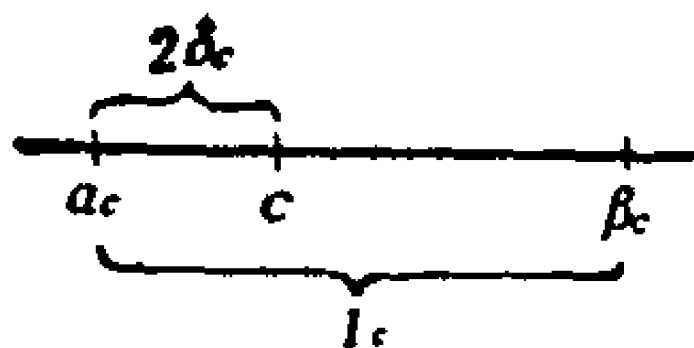


图 3.8

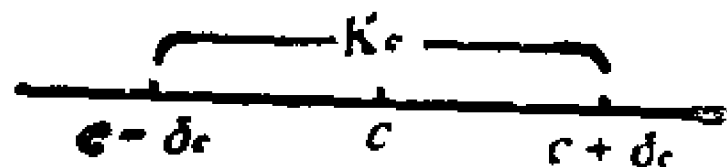


图 3.9

$\mathcal{G}$  覆盖了  $I$ ，由有限覆盖定理，存在  $\mathcal{G}$  的有限子族  $\mathcal{G}_1$  覆盖了  $I$ 。 $\mathcal{G}_1$  的元素表示如下：

$$K_{c_1}, K_{c_2}, \dots, K_{c_n},$$

记  $\delta_{c,\rho} = \min \{ \delta_{c_1}, \delta_{c_2}, \dots, \delta_{c_n} \}$ 。以下证明  $\rho = \delta_{c,\rho}$  便满足定理的要求。即证明：对  $\forall c \in I$ ， $J_c = (c - \rho, c + \rho)$  包含于  $\mathcal{F}$  的某一元素内。事实上，对  $\forall c \in I$ ， $\exists \mathcal{G}_1$  的某一元素  $K_{c_i} = (c_i - \delta_{c_i}, c_i + \delta_{c_i})$ ， $c \in K_{c_i}$ 。很明显

$$J_c = (c - \rho, c + \rho) \subset (c_i - \delta_{c_i} - \rho, c_i + \delta_{c_i} + \rho) = I'.$$

由  $\rho \leq \delta_{c_i}$ ， $I' \subset I'' = (c_i - 2\delta_{c_i}, c_i + 2\delta_{c_i})$ 。据  $2\delta_{c_i}$  定义  $I'' \subset I_{c_i}$ ， $I_{c_i} \in \mathcal{F}$ ，于是， $J_c \subset I_{c_i}$ ， $I_{c_i} \in \mathcal{F}$  (图3.10)。

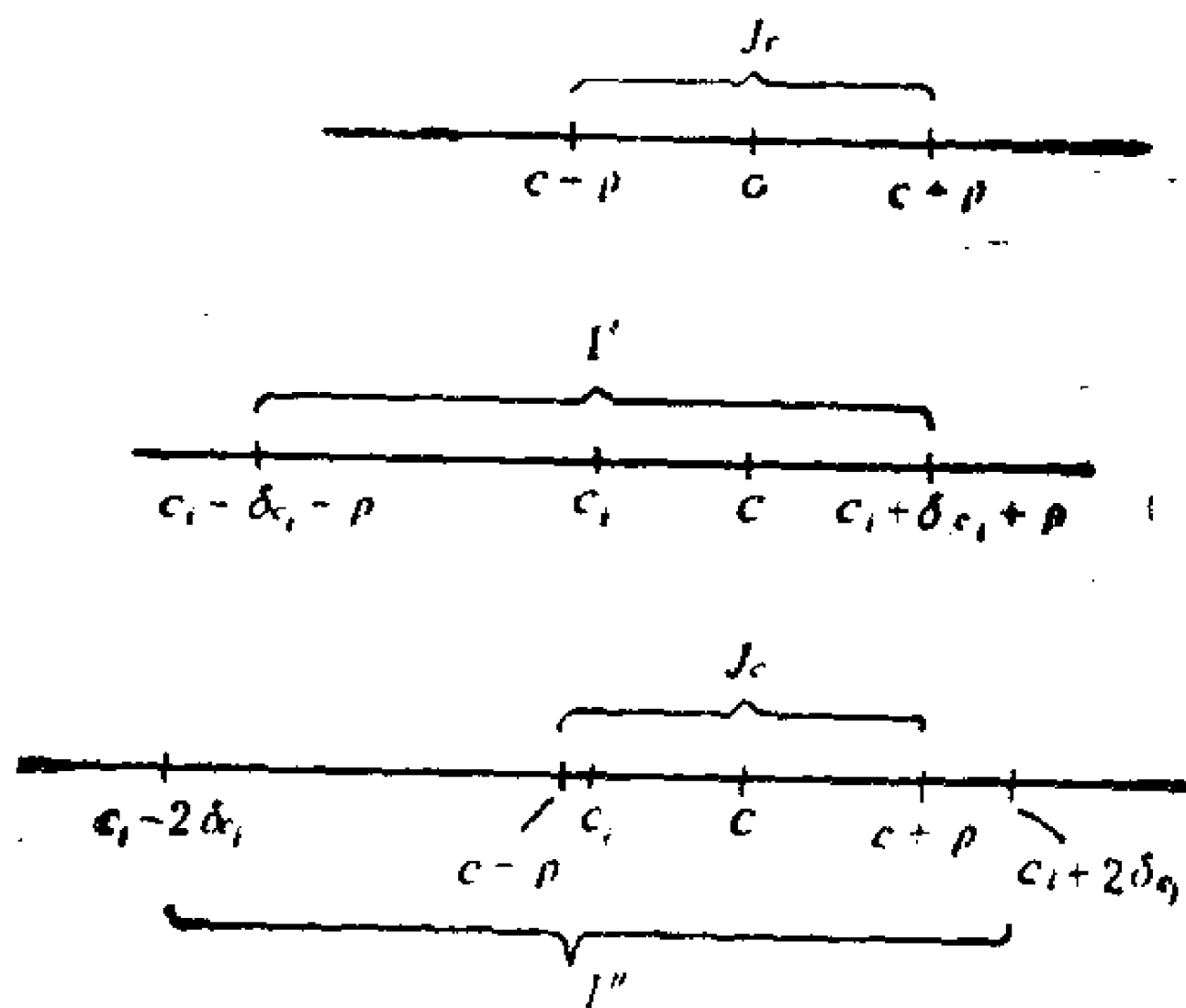


图 3.10

## 习 题

习题1—6, 判断给定序列是否是哥西序列. 若不是哥西序列时, 至少找出它的一个子序列为哥西序列.

$$1. x_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2^j},$$

$$2. x_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!},$$

$$3. x_n = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j!},$$

$$4. x_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n},$$

$$5. x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{1}{n},$$

$$6. x_n = (1 + (-1)^n)n + \frac{1}{n}$$

$$7. \text{ 设 } S_n = \sum_{j=1}^n u_j, \overline{S}_n = \sum_{j=1}^n l u_j, n=1, 2, \dots. \text{ 如果 } \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n$$

$= S$ , 证明  $S_n$  收敛.

8. 用哥西准则证明闭区间套定理 (定理3.1). [提示: 证明闭区间端点  $a_n, b_n$  都组成哥西序列.]

9. 设  $f$  的定义域包含  $I = \{x: a < x < b\}$  且  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ .

证明对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使得满足  $b - \delta < x < b, b - \delta < y < b$  的任何  $x, y$ , 都有  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

10. 证明习题9的逆命题成立. 即设  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使满足  $b - \delta < x < b, b - \delta < y < b$  的  $x, y$ , 有  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . 那么  $\exists$  某个  $L$  使  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ .

综合9·10. 可得  $f(x)$  在  $x \rightarrow b^-$  时极限存在的准则. 通常称之为关于函数极限的哥西准则.

11. 把习题9中 $I$ 换为 $J = \{x : a < x < \infty\}$ , 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ,

证明: 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists M > 0$ , 使一切 $x > M$ ,  $y > M$ 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

这一命题的逆命题成立不成立?

12. 设 $f$ 在 $I = \{x : a < x < b\}$ 上一致连续, 证明 $f(x)$ 在

$a, b$ 的单边极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 都存在. 若以这极

限值作为函数 $f$ 在 $a, b$ 点的值, 那么所得函数在 $[a, b]$ 上一致连续.

13. (a) 证明所有形如 $I_n = \left\{x : \frac{1}{n+2} < x < \frac{1}{n}\right\}$ 的族 $\mathcal{S}$

覆盖了区间 $J = \left\{x : 0 < x < \frac{1}{2}\right\}$ .

(b) 证明 $\mathcal{S}$ 不存在能够覆盖 $J$ 的有限子族.

14. 设 $\mathcal{S}$ 是习题13中 $\mathcal{S}$ 添上区间 $\left\{x : \frac{1}{6} < x < \frac{1}{6}\right\}$ 的族,

找出 $\mathcal{S}$ 的覆盖 $K = \left\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$ 一个有限子族.

15. 设 $\mathcal{S}_1 = \{I_n, I_n = \left(\frac{1}{2^n}, n\right) n = 1, 2, \dots\}$  证明 $\mathcal{S}_1$

覆盖了区间 $J = \{x : 0 < x < 1\}$  是否存在 $\mathcal{S}_1$ 的有限子族能覆盖了 $J$ ? 证明你的结论.

16. 设  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in D = \{x: 0 < x \leq 1\}$ . 对  $a \in D$  定义  $La$

为  $\{x: |f(x) - f(a)| < \frac{1}{3}, x \in D\}$ , 证明族  $\mathcal{F} =$

$\{La\}$  覆盖了  $D$ .  $\mathcal{F}$  的有限子族能否覆盖  $D$ ? 证明你的结论.

17. 设  $f = \frac{1}{x}$ ,  $x \in E = \{x: 1 \leq x < \infty\}$ .  $a \in E$ ,  $I_a = \{x$

$: |f(x) - f(a)| < \frac{1}{3}\}$  证明  $\mathcal{F} = \{I_a\}$  覆盖  $E$ .

$\mathcal{F}$  的有限子族能否覆盖  $E$ ? 证明你的结论.

18. 用有限覆盖定理 3.13 证明有界性定理 3.9.

\*19. 用勒贝格引理 (定理 3.14) 证明一致连续性定理 3.11.

[提示: 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 因  $f$  在  $x_0$  点连续,  $\exists I_{x_0} = (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ , 当  $x_1, x_2 \in I_{x_0}$ , 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 族  $\mathcal{F} = \{I_{x_0}\}$  覆盖了  $I$ , 用勒贝格引理得到数  $\rho$ , 这一  $\rho$  可作为一个一致连续性的  $\delta$ .]

\*20. 区间  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$  中的有理数可以排成下面的序

列:  $0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5},$

$\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots$  (先分母为 1 者再排分母为 2 者, 再分

母为 3 者往下排) 对于  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $I_n$  是以上面序列第  $n$

项的数为中心长为 $\frac{\varepsilon}{2^n}$ 的开区间。族 $\mathcal{J} = \{I_n, n=1, 2, \dots\}$ 覆盖了 $I$ 内的一切有理数的集。所有 $I_n$ 的长的和等于 $\varepsilon$ 。证明 $\mathcal{J}$ 不能覆盖区间 $I$ 。

## 第四章 微分学的基本理论

### § 4.1 $R_1$ 上函数的微分

**定义** 设 $f$ 是 $R_1$ 到 $R_1$ 的函数。导数 $f'$ 由公式

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

所定义。 $f'$ 的定义域由(4.1)右端极限存在的一切 $x$ 点所组成。当 $f'$ 存在称 $f$ 可微，求导运算也叫微分。

下面关于导数的定理是第二章中有关极限定理的直接推论。它们的证明作为习题留给读者。以下定理中所说的函数都是 $R_1 \rightarrow R_1$ 的函数。

**定理4.1** 若 $f$ 是一常量函数，那么对 $\forall x$ ,

$$f'(x) = 0.$$

**定理4.2** 设 $f$ 定义在开区间 $I$ 上， $C$ 是一实数， $g$ 由 $g(x) = Cf(x)$ 定义。若 $f'(x)$ 存在，那么 $g'(x)$ 存在，并且

$$g'(x) = Cf'(x).$$

**定理4.3** 设 $f$ 与 $g$ 定义在开区间 $I$ 上， $F$ 由 $F(x) = f(x) + g(x)$ 定义。若 $f'(x)$ ， $g'(x)$ 存在，那么 $F'(x)$ 存在并且 $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ 。

**定理4.4** 设 $f$ 在 $a$ 点 $f'(a)$ 存在，那么 $f$ 在 $a$ 点连续。

**证明**  $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$ , 由  $f'(a)$  存

在, 等式右端在  $h \rightarrow 0$  时极限  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h$

$= f'(a) \cdot 0 = 0$ . 因此  $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$  即  $f$  在  $a$  点连续.

**定理4.5** 设  $u, v$  定义在开区间  $I$  上,  $f$  由  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  定义. 若  $u'(x), v'(x)$  存在, 那么  $f'(x)$  存在并且  $f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$ .

**定理4.6** 设  $u, v$  定义在开区间  $I$  上, 且  $x \in I, v(x) \neq 0$ ,

$f$  由  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  定义. 若  $u'(x), v'(x)$  存在那么  $f'(x)$  存

在并且  $f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ .

**定理4.7** 设  $f(x) = x^n$ ,  $n$  是整数 (当  $n \leq 0, x \neq 0$ ), 那么  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

定理4.1到定理4.7再加上复合函数求导的链法则, 就能计算大多数初等函数的导数. 链法则可由下面微分基本引理导出. 基本引理指出在一点可微 (指导数存在) 的函数在  $a$  点邻域里可以直线函数来逼近, 直线的斜率是函数的导数.

**定理4.8 (微分基本引理)** 设  $f$  在  $a$  点导数存在, 那么存在一函数  $\eta$ ,  $\eta$  在包含 0 的某个开区间内有定义, 并且  $\eta(0) = 0$ ,  $\eta$  在 0 点连续且满足

$$f(a+h) - f(a) = [f'(a) + \eta(h)]h. \quad (4.2)$$

**证明** 定义 $\eta$ 为

$$\eta(h) = \begin{cases} \frac{1}{h}[f(a+h) - f(a)] - f'(a), & h \neq 0, \\ 0, & h = 0. \end{cases}$$

因为 $f$ 在 $a$ 点可导,  $\lim_{h \rightarrow 0} \eta(h) = 0$ , 所以 $\eta(h)$ 在 $h = 0$ 点连续,  $\eta(0) = 0$ 且(4.2)式成立(图4.1)。

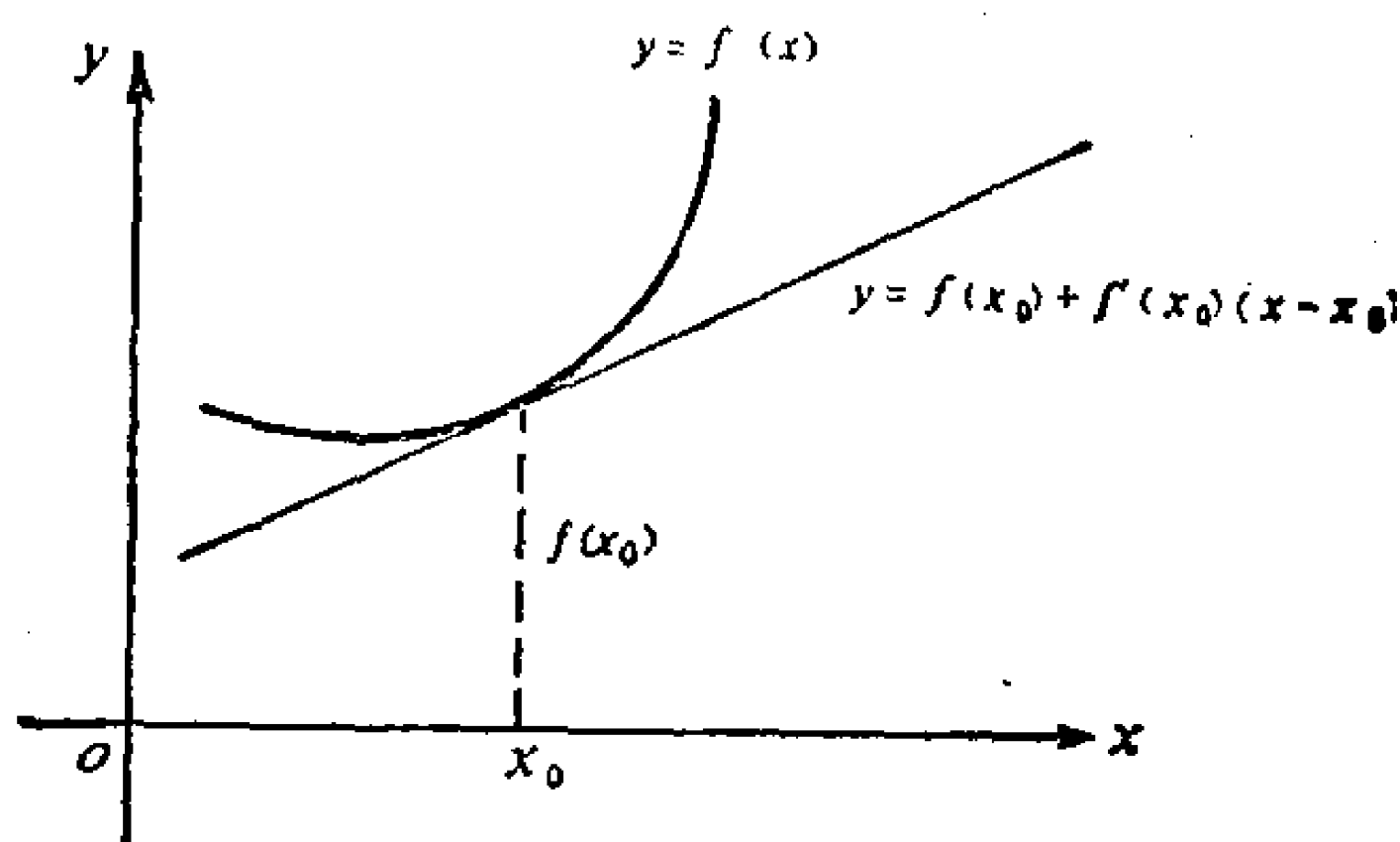


图 4.1

**定理4.9 (链法则)** 设 $g, u$ 是 $\mathbb{R}_1$ 上的函数,  $f(x) = g[u(x)]$ . 若 $u$ 在 $x_0$ 点有导数,  $g$ 在 $u(x_0)$ 点有导数. 那么 $f = g \circ u$ 在 $x_0$ 点有导数, 并且

$$f'(x_0) = g'[u(x_0)] \cdot u'(x_0).$$

**证明** 用 $\Delta f$ 表示 $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ,  $\Delta u$ 表示 $u(x_0 + h) - u(x_0)$ , 那么

$$\Delta f = g[u(x_0 + h)] - g[u(x_0)] = g(u + \Delta u) - g(u). \quad (4.3)$$

对(4.3)式右端应用定理4.8, 得到

$$\Delta f = [g'(u) + \eta(\Delta u)]\Delta u,$$

注意到 $h \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow 0$ , 将上式除以 $h$ , 极限



$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{h} &= f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} [g'(u) + \eta(\Delta u)] \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{h} \\ &= g'[u(x_0)] \cdot u'(x_0).\end{aligned}$$

极值性定理指出：闭区间上连续的函数在这闭区间上的点达到最小值及最大值。下面的定理给出求函数的最小值、最大值点的方法。

**定理4·10** 设 $f$ 在区间 $I$ 上连续， $f$ 在 $I$ 的内点 $x_0$ 取到它的最大值。若 $f'(x_0)$ 存在，那么

$$f'(x_0) = 0$$

定理4·10能直接由导数定义导出，把证明留给读者。当最小值出现在内点 $x_0$ 时，同样有 $f'(x_0) = 0$ 。因此当函数可导时应从 $f'(x) = 0$ 的解集及 $I$ 的端点中去确定最大值或最小值点（4·2）。

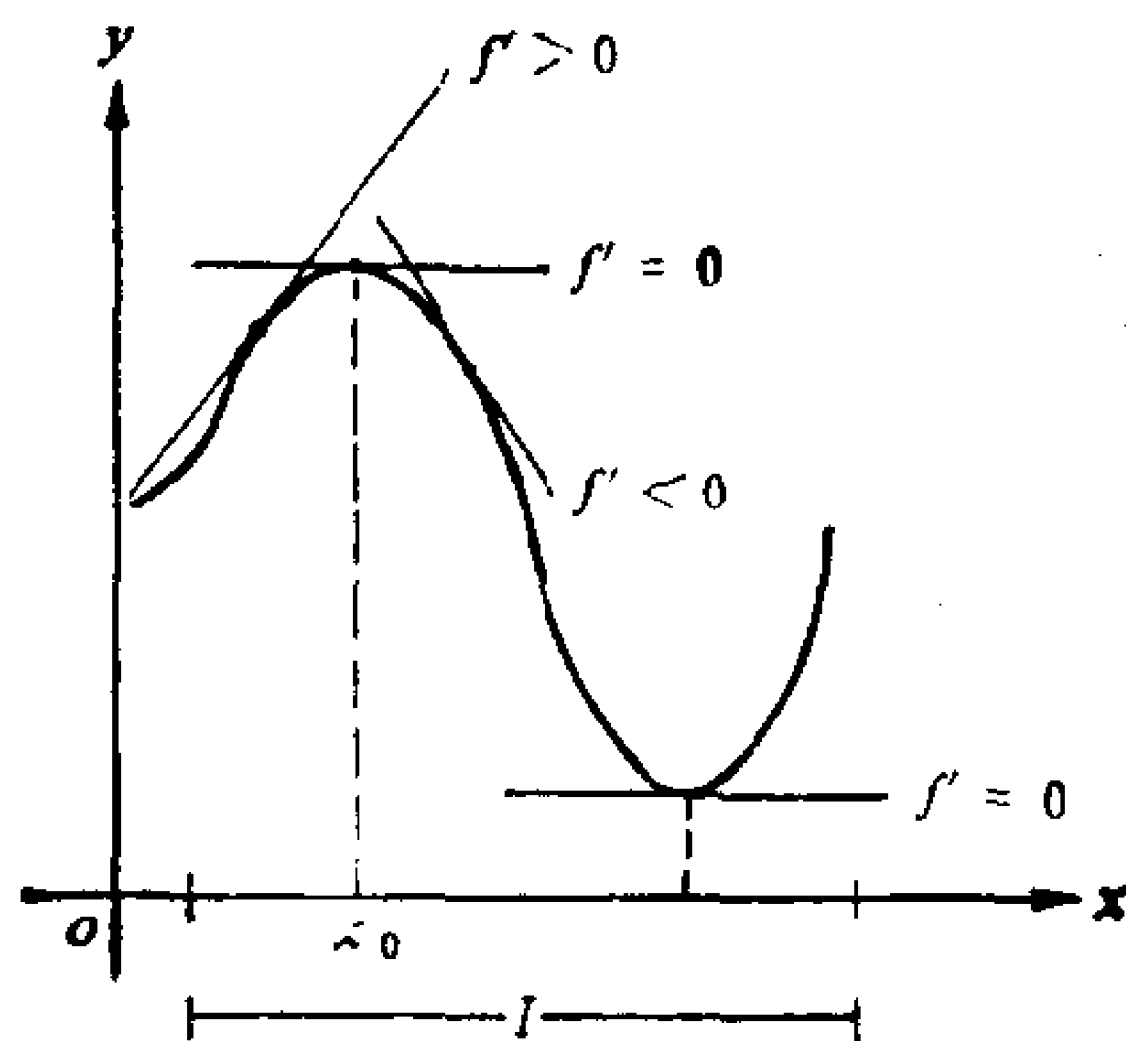


图 4·2

罗尔定理与微分中值定理是微分学理论进一步发展的基础。

**定理4·11(罗尔定理)** 设 $f$ 在闭区间 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续且在开区间 $I_1 = \{x: a < x < b\}$ 内有导数. 若 $f(a) = f(b) = 0$ , 那么  $\exists x_0 \in I_1, f'(x_0) = 0$  (图4·3).

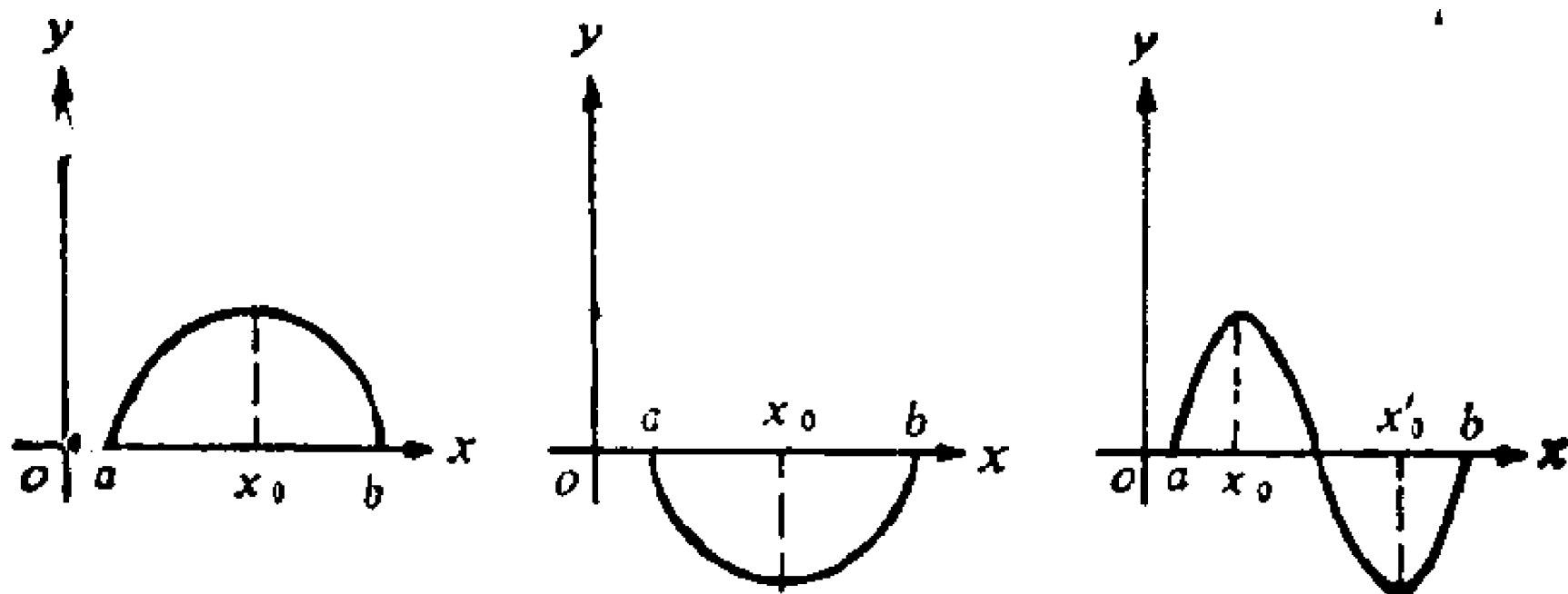


图 4·3

**证明** 若 $f \equiv 0$ , 定理显然成立. 当 $f \not\equiv 0$ ,  $f$ 有正值或负值. 设它有正值, 那么据极值性定理,  $f$ 在某一内点 $x_0$ 达到其最大值. 由定理4·10断定 $f'(x_0) = 0$ . 设 $f$ 有负值, 应用定理4·10,  $f$ 在最小值的 $x_0$ 点处,  $f'(x_0) = 0$ .

**定理4·12 (微分中值定理)** 设 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续且在开区间 $I_1 = \{x: a < x < b\}$ 内有导数. 那么

$$\exists \xi \in I_1, f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{图4·4}).$$

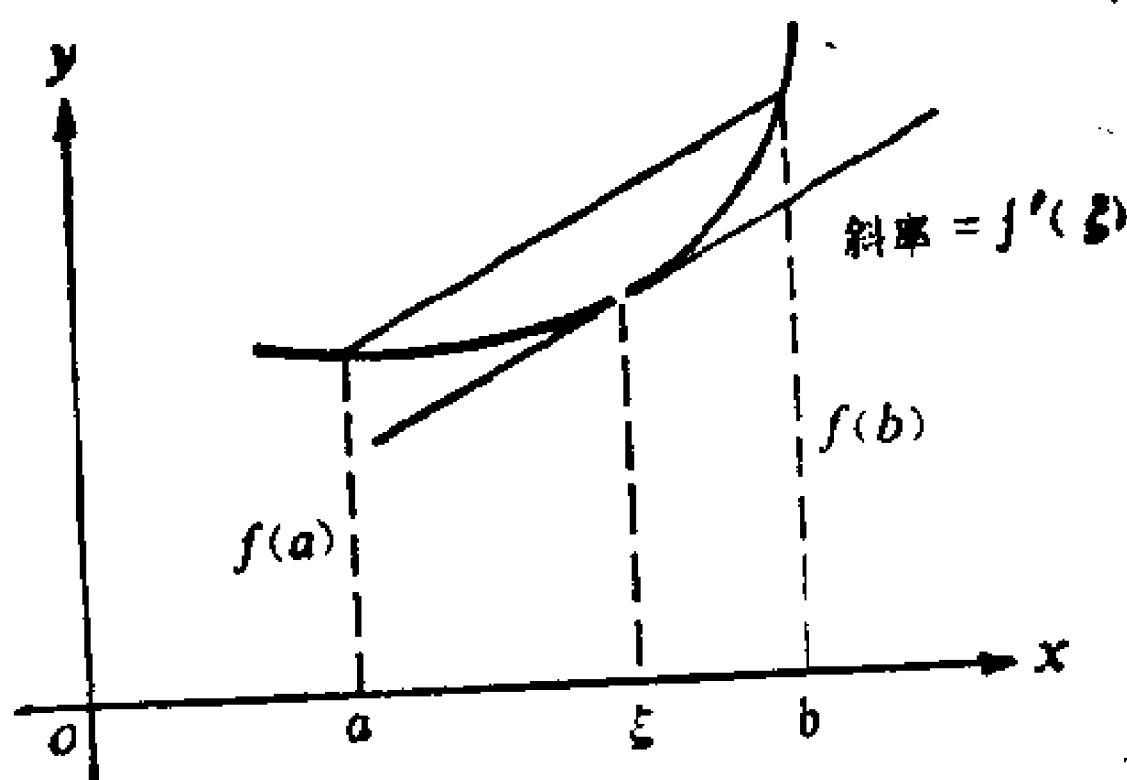


图 4·4

### 证明 定义函数

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

将 $a, b$ 代入 $x$ ,  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F$ 满足罗尔定理条件. 于是 $\exists \xi \in I_1, F'(\xi) = 0$ . 对 $F(x)$ 求导得

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

$$\text{即 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

下一定理是中值定理的直接推论, 在函数作图中有用. 其证明留给读者.

**定理4.13** 设 $f$ 在闭区间 $I$ 上连续且在 $I$ 的内点可导.

(a) 若 $f'$ 在 $I$ 内恒为正(非负), 那么 $f$ 在 $I$ 上递增(不减).

(b) 若 $f'$ 在 $I$ 内恒为负(非正), 那么 $f$ 在 $I$ 上递减(不增).

下列定理给出计算未定型的洛比达法则.

**定理4.14**(广义中值定理) 设 $f$ 与 $F$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上连续,  $f'$ 与 $F'$ 在 $I_1 = \{x : a < x < b\}$ 内存在,  $F'(x) \neq 0$ . 那么  $F(b) - F(a) \neq 0$  且 $\exists \xi \in I_1$ , 有

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \quad (4.4)$$

**证明**  $F$ 满足中值定理条件,  $\exists \eta \in I_1$ , 使  $F(b) - F(a) = F'(\eta)(b - a)$ , 据 $F'(\eta) \neq 0$ , 所以 $F(b) - F(a) \neq 0$ .

定义函数  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} [F(x) - F(a)].$$

容易算得  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$  .  $\varphi$  满足罗尔定理条件,  $\exists \xi \in I_1$ ,  $\varphi'(\xi) = 0$  便导出 (4.4) 式.

**定理4.15** (关于  $\frac{0}{0}$  的洛比达法则) 设  $f$  与  $F$  在  $I = \{x: a < x < b\}$  内可导,  $F'$  在  $I$  上不等于零. 若

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L, \quad \text{那么}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L.$$

**证明** 定义  $f(a) = F(a) = 0$ . 由  $F'(x)$  在  $I$  上不等于零且  $F(a) = 0$ , 由中值定理  $F(x)$  在  $I$  上不等于零.

现由广义中值定理  $\exists \xi \in (a, x)$  使

$$\frac{f(x) - f(a)}{F(x) - F(a)} = \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使  $a < x < a + \delta$  有

$$\left| \frac{f'(x)}{F'(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

当然对  $a < \xi < x < a + \delta$  的  $\xi$ ,  $\left| \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} - L \right| < \varepsilon$ . 因此对 满足

$a < x < a + \delta$  的一切  $x$  均有

$$\left| \frac{f(x)}{F(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} - L \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L.$$

**推论 1** 洛比达法则对于左极限，双边极限也成立。只

要把  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$  的假设换成左极限或双边极限。

**推论 2** 定理对  $x \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow -\infty$  或  $x \rightarrow \infty$  的情况也成立。

**证明** 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L$ ,

且在  $(a, \infty)$  内  $F'(x) \neq 0$ . 证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = L$ .

事实上, 设  $z = \frac{1}{x}$  且定义  $g(z) = f(\frac{1}{z})$ ,  $G(z) = F(\frac{1}{z})$ ,

那么

$$g'(z) = -\frac{1}{z^2} f'(\frac{1}{z}), \quad G'(z) = -\frac{1}{z^2} F'(\frac{1}{z}).$$

因此, 当  $z \rightarrow 0^+$  时

$$g(z) \rightarrow 0, \quad G(z) \rightarrow 0, \quad \frac{g'(z)}{G'(z)} \rightarrow L.$$

应用定理4.15于 $\frac{g}{G}$ , 便得 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{G(z)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{F(x)} = L$ .

**定理4.16**(关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 的洛比达法则) 设 $f'$ 与 $F'$ 在 $I = \{x : a < x < b\}$ 内存在. 若

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} = L,$$

且在 $I$ 内 $F'(x) \neq 0$ , 那么

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{F(x)} = L.$$

**证明** 由定理条件可知 $f$ 及 $F$ 在 $I$ 上连续, 且 $F(x)$ 在某一

区间 $I_h = \{x : a < x < a+h\}$ 上不等于零. 由 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{F'(x)} =$

$L$ , 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使 $x \in I_\delta = \{x : a < x < a+\delta\}$

$$\left| \frac{f'(x)}{F'(x)} - L \right| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (4.5)$$

选取 $\delta$ 比 $h$ 小, 并研究 $I_\delta$ 内的 $x$ 及 $c, x < c$ . 那么由广义中值定理, 导出 $\exists \xi, x < \xi < c$  使

$$\frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}. \quad (4.6)$$

把(4.6)式代入不等式(4.5)得出

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} - L \right| < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (4.7)$$

不妨认为  $\varepsilon < 1$ , 于是

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} \right| < |L| + \frac{1}{2}\varepsilon < |L| + \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

用恒等式

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{F(x)} &= \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} \\ &= \frac{f(c)}{F(x)} - \frac{F(c)}{F(x)} \left[ \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} \right]. \end{aligned}$$

取绝对值并用不等式(4.8), 有

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(c)}{F(x)} \right| + \frac{|F(c)|}{|F(x)|} \left( |L| + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

固定  $c$ , 让  $x \rightarrow a^+$ , 那么由  $F(x) \rightarrow \infty$  (4.9) 右端趋向于零.

因此, 存在比  $\delta$  小的  $\delta_1 > 0$ , 使当

$a < x < \delta_1$ , 有

$$\left| \frac{f(c)}{F(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ 及 } \left| \frac{F(c)}{F(x)} \right| < \frac{\varepsilon}{4(|L| + \frac{1}{2})} \quad (4.10)$$

最终, 由 (4.7), (4.9) 及 (4.10) 得

$$\left| \frac{f(x)}{F(x)} - L \right|$$

$$\leq \left| \frac{f(x)}{F(x)} - \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} \right| + \left| \frac{f(x) - f(c)}{F(x) - F(c)} - L \right|$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

注 (i) 定理4·15, 4·16的区间 $I$ 的大小并不重要, 仅要求在 $a$ 右边充分小邻域内 $F'(x)$ 不为零.

(ii) 形如 $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ , 及 $(\infty - \infty)$ 的不定型总能通过代数变形或取对数化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

(iii) 当 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 也是不定型, 可应用法则于 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ , 看 $\frac{f''(x)}{F''(x)}$ 是否有极限. 这种步骤在定理条件满足的前提下可进行多次.

例 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-e^x}{2x^2}.$

解 设  $f: x \rightarrow 1+x-e^x, F: x \rightarrow 2x^2$ , 所求根限为 $\frac{0}{0}$ 型.

应用定理4·15求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-e^x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^x}{4x}.$

这里  $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{1-e^x}{4x}$  还是 $\frac{0}{0}$ 型, 并且满足定理4·15条件.

再次应用定理得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{4} = \frac{-1}{4}.$$

因此  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{F''(x)} = -\frac{1}{4}.$



## 习 题

1. 用和的极限定理证明两个函数之和的导数的定理4.3.

2. 用恒等式

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = (u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x)) + (u(x+h)v(x) - u(x)v(x))$$

及和、积的极限定理证明积的求导公式 (定理4.5).

3. 用数学归纳法证明关于积的 $n$ 阶导数的莱布尼兹公式:

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) \\ &= f^{(n)}(x)g(x) + \frac{n}{1!}f^{(n-1)}(x)g'(x) + \\ & \quad \frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}(x)g''(x) + \cdots + f(x)g^{(n)}(x). \end{aligned}$$

4. 运用极限的定理证明商的导数公式 (定理4.6).

5.  $F(x) = f\{u[v(x)]\}$  叙述  $F'(x_0) = f'\{u[v(x_0)]\}$

$u'[v(x_0)]v'(x_0)$  公式成立的条件并证明这一公式.

6. 分别以  $D^+f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ,

$$D^-f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

定义右、左单边导数. 证明 $f$ 在 $x_0$ 可导 $\iff$

$D^+f(x_0)$ ,  $D^-f(x_0)$ 存在且相等.

7. (链法则的部分逆) 设  $f, g, u$  的关系为  $f(x) = g[u(x)]$ ,  $u$  在  $x_0$  连续,  $f'(x_0)$  存在,  $g'[u(x_0)]$  存在且不为零. 证明  $u'(x_0)$  由  $f'(x_0) = g'[u(x_0)]u'(x_0)$  所确定 [提示: 用定理4·9同样的证明过程.]

8. 证明定理4·10.

9. 设  $f$  在包含  $x_0$  的一开区间  $I$  内连续,  $f'$  在  $x_0$  之外的  $I$  的点处有定义且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = L$ . 证明

$$f'(x_0) = L. \quad \text{[提示: 用 } \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(\xi). \text{]}$$

10. 研究函数在  $x = 0$  的可微性:

$$(a) \quad f: x \rightarrow \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad f: x \rightarrow \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases} \quad n \text{ 为大于1的整数.}$$

对于  $K$  的什么值在  $x = 0$  点  $f$  的  $k$  阶导数存在? [参考习题9.]

11. 证明定理4·13.

12. 若  $f$  在  $x_0$  点可微, 证明  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h}$

$$= (\alpha + \beta)f'(x_0).$$

13. 证明定理4·15的推论1.

14. 设  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $F(x) \rightarrow \infty$ ,  $\frac{f'(x)}{F'(x)} \rightarrow +\infty$  (当  $x \rightarrow +\infty$ ).

证明  $\frac{f(x)}{F(x)} \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

15. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

16. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$ .

17. 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . [提示: 取对数.]

18. 设  $f''$  在  $x_0$  存在, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0).$$

19. 设  $f: x \rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当 } x > 0, \\ 0 & \text{当 } x \leq 0, \end{cases}$

(a) 对每一自然数  $n$ ,  $f^{(n)}(0)$  存在且等于 0. [参看习题 6.]

(b) 证明函数  $g: x \rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当 } x \neq 0. \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$

对一切自然数  $n$ ,  $g^{(n)}(0) = 0$ . [参考习题 9].

## § 4.2 反函数

在 § 2.1 中定义  $R_1$  到  $R_1$  的关系是指  $R_2$  中的序偶  $(x, y)$  的集  $S$ 。函数是关系的特例。

**定义** 设  $S$  是从  $R_1$  到  $R_1$  的关系。  $S$  的逆关系是满足  $(y, x) \in S$  的序偶  $(x, y)$  的集。

若  $S$  是方程  $f(x, y) = 0$  在  $R_2$  内的解集，  $S$  的逆是方程  $f(y, x) = 0$  的解集。设  $f$  是一函数，  $f$  是方程  $y = f(x)$  在  $R_2$  内的图象，那么  $f$  的逆则是方程  $x = f(y)$  的图象。数函的逆关系不一定是函数。例如函数  $f: x \rightarrow x^2$  其图象是  $y = x^2$ ，其逆关系由  $y^2 = x$  的图象给出，这逆关系不是函数。

**定理 4.17 (反函数定理)** 设  $f$  是连续递增(或递减) 函数，其定义域是区间  $I$ ，值域是  $J$  (图 4.5)，那么

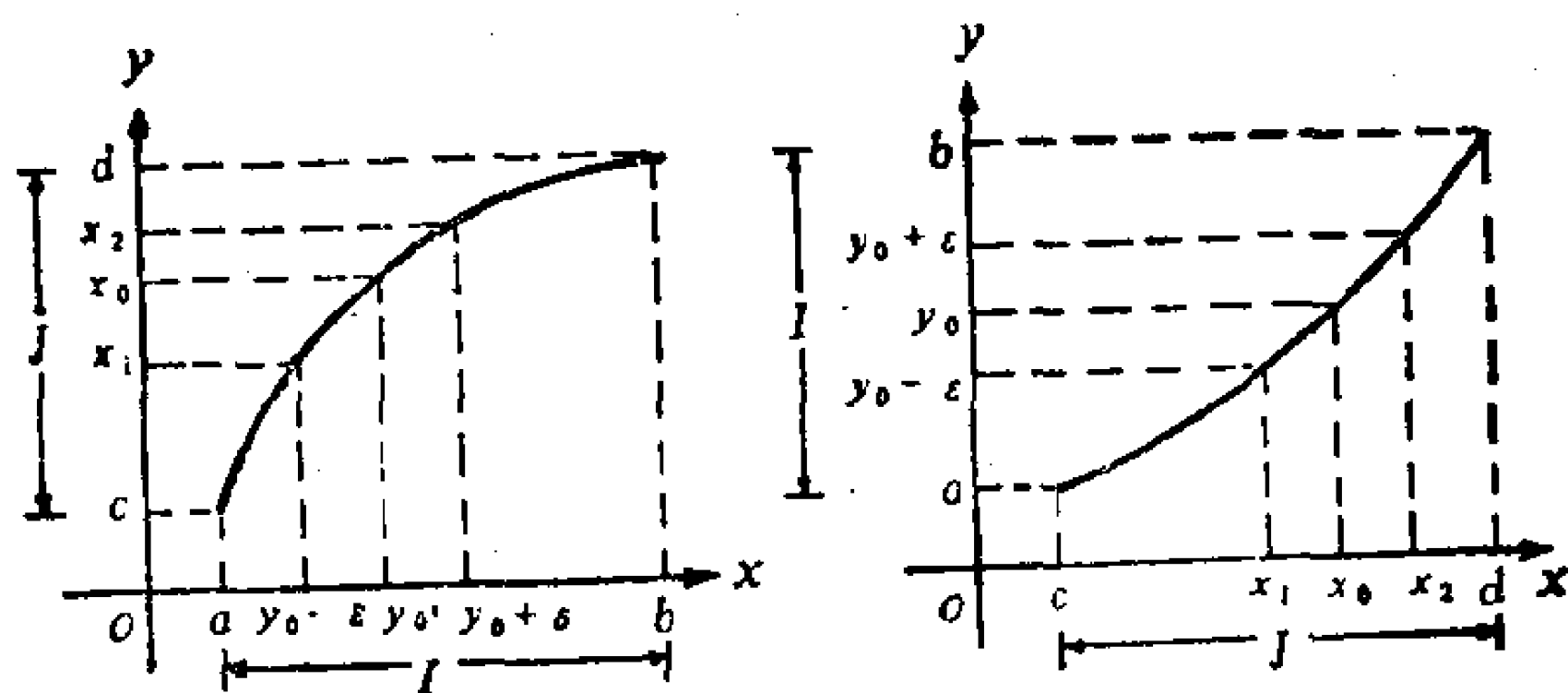


图 4.5

(a)  $J$  是一个区间。

(b)  $f$  的逆关系是一函数  $g$ ，  $g$  以  $J$  为定义域且  $g$  在  $J$  上是连续递增的 (或递减的)。

(c) 对  $x \in I$ ,  $g[f(x)] = x$ ,

对  $x \in J$ ,  $f[g(x)] = x$ . (4.11)

**证明** (a) 由介值性定理 (定理3.2) 易知  $J$  是区间.

设  $x_0 \in J$ ,  $\exists y_0 \in I$  使  $x_0 = f(y_0)$ . 由  $f$  递增,  $y_0$  是唯一的. 因此  $g$  是以  $J$  为定义域的函数, 且  $g(x_0) = y_0$ , 即  $x_0 \in J$ ,  $f[g(x_0)] = x_0$ . 设  $y_0 \in I$ ,  $f(y_0) \in J$  是唯一的,  $g[f(y_0)] = y_0$ , 因此

(c) 成立. 据 (c)  $g$  是递增的. 事实上, 当  $J$  中  $x_1 < x_2$ , 必有  $g(x_1) < g(x_2)$ . 否则将有  $f[g(x_1)] \geq f[g(x_2)]$ , 即  $x_1 \geq x_2$ .

现在只剩下 (b) 中  $g$  的连续性未证. 设  $x_0$  是  $J$  的点, 当  $x_0$  不是  $J$  的右端点, 证明  $g$  在  $x_0$  右边连续. 设  $x_2' \in J$ ,  $x_2' > x_0$ . 记  $y_0 = g(x_0)$   $y_2' = g(x_2')$  由  $g$  递增  $y_2' > y_0$ . 因此  $y_0$  不是  $I$  的右端点. 对于给定  $\varepsilon > 0$ , 且选取  $\varepsilon$  小到使  $y_0 + \varepsilon \in I$ . 记  $x_2 = f(y_0 + \varepsilon)$  (参看图4.5) 因  $g$  递增. 对  $x_0 \leq x \leq x_2$  中的  $x$  有

$$g(x_0) \leq g(x) \leq g(x_2) = y_0 + \varepsilon \quad (4.12)$$

取比  $x_2 - x_0$  小的正数  $\delta$ , 对满足  $x_0 \leq x < \delta$  的一切  $x$ , 有

$$|g(x) - g(x_0)| = g(x) - g(x_0) < \varepsilon$$

即  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = g(x_0)$ .  $g(x)$  在  $x_0$  右边连续. 同理当  $x_0$  不是  $J$  的

左端点时,  $g(x)$  在  $x_0$  左边连续. 于是当  $x_0$  是  $J$  的内点时  $g$  在  $x_0$  连续; 当  $x_0$  是左(右)端点时  $g$  在  $x_0$  右(左)连续, 即  $g$  在  $J$  上连续.

$f$  为递减函数时,  $g$  也是递减的. 这种情况的证明与递增情况的证明完全雷同.

通常习惯地称  $g$  为  $f$  的反函数.

关于反函数可微性如下所述.

**定理4·18** (反函数可微性定理) 设  $f$  满足定理 4·17 的条件. 若  $x_0 \in J$ ,  $f'[g(x)]$  存在且  $f'[g(x_0)] \neq 0$ , 那么  $g'(x_0)$  存在, 且

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'[g(x_0)]}. \quad (4.13)$$

**证明** 由定理 4·17 有  $f[g(x_0)] = x_0$ . 利用 § 4·1 习题 7 的结果,  $g'(x_0)$  存在并且  $f'[g(x_0)]g'(x_0) = 1$ . 因为  $f'[g(x_0)]$  不为零, 所以  $g'(x_0) = \frac{1}{f'[g(x_0)]}$ .

**注** 函数  $f$  不单调时, 它的逆关系不一定是函数. 有时  $f$  的逆关系可作如下分解: 首先求  $f$  的单调性区间  $I_1, I_2, \dots$  等, 使在区间  $I_i$  上  $f$  递增或递减, 以  $f_i$  记  $f|_{I_i}$ .  $f_i$  的反函数记为  $g_i$ . 对  $g_i$  分别地由  $f_i[g_i(x)] = x$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , 求导.

例如, 设  $f: x \rightarrow x^2$  定义在  $I = \{x: -\infty < x < \infty\}$ .  $f$  在  $I_1 = \{x: 0 \leq x < \infty\}$  上递增, 在  $I_2 = \{x: -\infty < x \leq 0\}$  上递减.  $f|_{I_1}$  记为  $f_1$ ,  $f|_{I_2}$  记为  $f_2$ .  $f_1$  的反函数  $g_1: x \rightarrow \sqrt{x}$  其定义域  $J_1 = \{x: 0 \leq x < \infty\}$ .  $f_2$  的反函数  $g_2: x \rightarrow -\sqrt{x}$  其定义域也是  $J_1$ . 等式 (4.11) 成为如下的两种情况:

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad x \in J_1, \quad \sqrt{x^2} = x, \quad x \in I_1;$$

$$(-\sqrt{x})^2 = x, \quad x \in J_1, \quad -\sqrt{x^2} = x, \quad x \in I_2.$$

$f$  的逆关系是  $g_1 \cup g_2$ . (图 4·6)

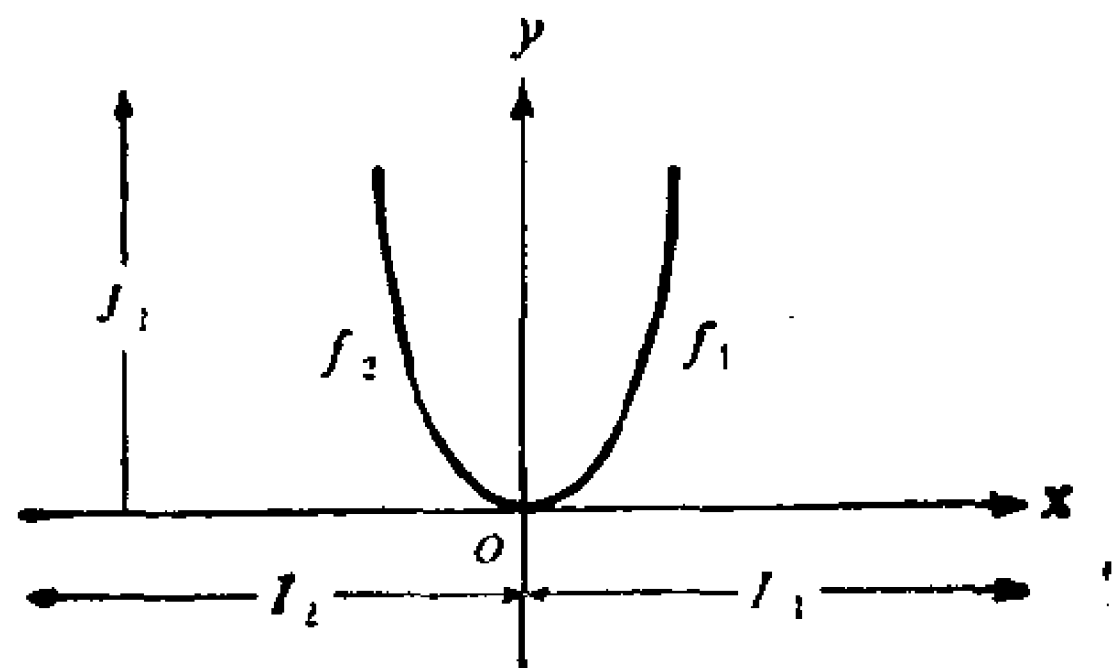


图 4·6

## 习 题

习题1—12, 求给定函数 $f$ 的单调区间 $I_1, I_2 \dots$ 及相应的反函数的定义域 $J_1, J_2 \dots$ . 画出对应于 $J_1, J_2 \dots$ 上的反函数 $g_1, g_2, \dots$ 的图象. 尽可能地求得 $g_i$ 的表示式.

$$1. f: x \rightarrow x^2 + 2x + 2,$$

$$2. f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4,$$

$$3. f: x \rightarrow 4x - x^2,$$

$$4. f: x \rightarrow 2 - x - \frac{1}{2}x^2,$$

$$5. f: x \rightarrow \frac{2x}{x+2},$$

$$6. f: x \rightarrow \frac{1+x}{1-x},$$

$$7. f: x \rightarrow \frac{4x}{x^2+1},$$

$$8. f: x \rightarrow (x-1)^3,$$

$$9. f: x \rightarrow x^3 + 3x,$$

$$10. f: x \rightarrow \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 1,$$

$$11. f: x \rightarrow x^3 + 3x^2 - 9x + 4,$$

$$12. f: x \rightarrow \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}.$$

13. 设 $f, g$ 都是定义于 $I$ 上的递增函数且对所有 $x \in I$ 有 $f(x) > g(x)$ . 以 $F, G$ 分别表示 $f, g$ 的反函数, 它们的定义域分别是 $J_1, J_2$ . 证明对 $x \in J_1 \cap J_2$ 有 $F(x) < G(x)$ .

习题14—18求给定单调函数的反函数. 计算 $f'$ 与 $g'$ 并验证公式(4.13).

$$14. f: x \rightarrow \frac{4x}{x^2+1}, \quad I = \{x: \frac{1}{2} < x < \infty\},$$

$$15. f : x \rightarrow (x-1)^3, \quad I = \{ x : 1 < x < \infty \} .$$

$$16. f : x \rightarrow (x^3 + 3x), \quad I = \{ x : -\infty < x < \infty \} .$$

$$17. f : x \rightarrow \sin x, \quad I = \{ x : \frac{\pi}{2} < x < \pi \} .$$

$$18. f : x \rightarrow e^{3x}, \quad I = \{ x : -\infty < x < \infty \} .$$



## 第五章 积分学的基本理论

### § 5.1 达布积分

本章不再重述初等微积分讲过的积分方法，集中论述积分理论：积分概念、性质及积分方法所依据的基本定理。

设  $f$  是定义在闭区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上的有界函数。以  $I$  的内点  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  划分  $I$ 。令  $t_0 = a, t_n = b$ ，其大小次序为  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$ ，以  $I_1, I_2, \dots, I_n$  表示区间  $I_i = \{x : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ （图5.1）。把  $I$  分成这样有限

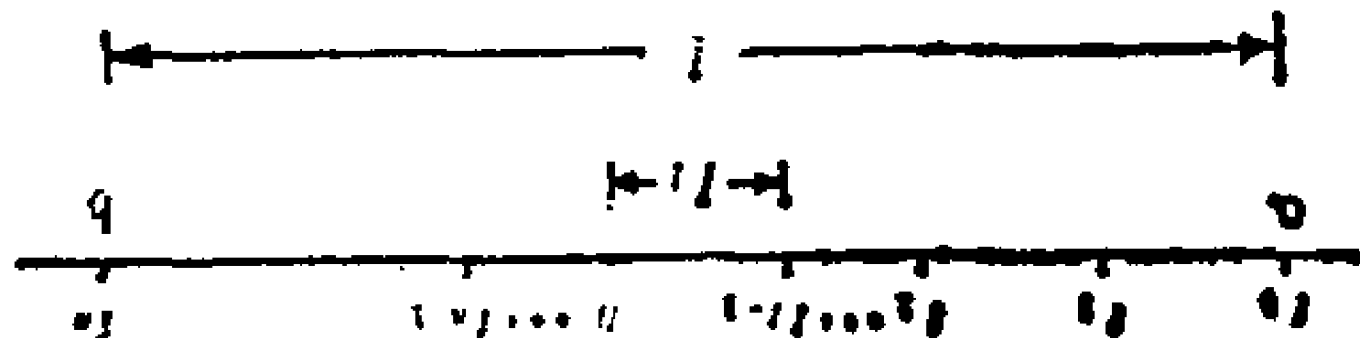


图 5.1

个子区间的分解，称为  $I$  的一个划分，用  $\Delta$  来记之。

$f$  在  $I$  上有界，以  $m, M$  分别表示  $\inf_{x \in I} f(x), \sup_{x \in I} f(x)$ 。  
 $m_i, M_i$  分别表示  $\inf_{x \in I_i} f(x), \sup_{x \in I_i} f(x)$ 。区间  $I_i$  的长  $t_i - t_{i-1}$  表示为  $l(I_i)$ 。

**定义**  $f$  关于  $I$  的划分  $\Delta$  的达布上和  $S^+(f, \Delta)$  定义为

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot l(I_i) \quad (5.1)$$

达布下和 $S_-(f, \Delta)$ 定义为

$$S_-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot l(I_i) \quad (5.2)$$

图5.2表示的是 $f(x) > 0$ ,  $x \in I$ ,  $S^+$ ,  $S_-$ 和中诸加项各取一项画出的图形。

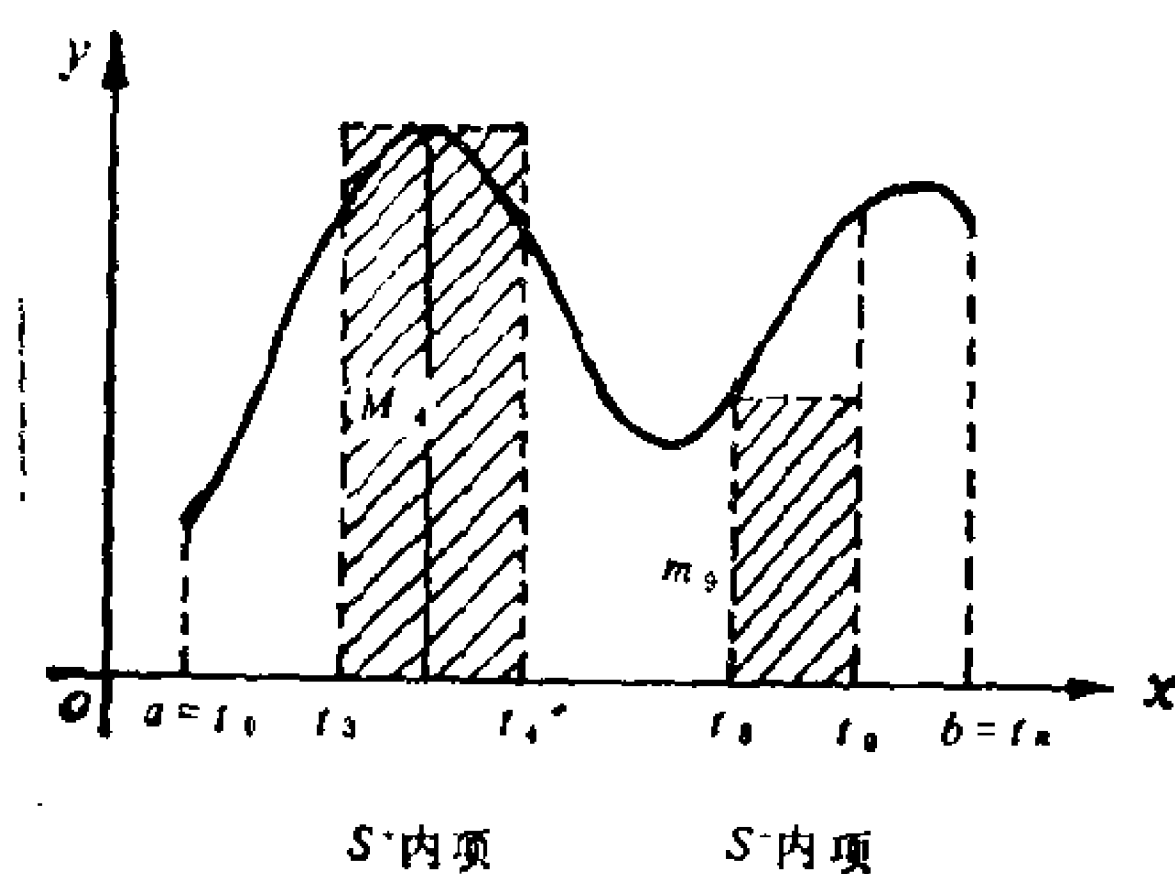


图 5.2

设 $\Delta$ 是划分 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ , 其子区间是 $I_1, I_2, \dots, I_n$ . 引进新分点加到 $\{t_i\}$ 之间得到新的划分 $\Delta'$ ,  $\Delta'$ 的子区间为 $I_1', I_2', \dots, I_m'$ , 其中每个 $I_i'$ 是 $\Delta$ 的子区间或是一子区间的部分, 称 $\Delta'$ 为 $\Delta$ 的细分.

设区间 $I$ 被划分 $\Delta_1$ 分解为 $I_1, I_2, \dots, I_n$ , 被划分 $\Delta_2$ 分解为 $J_1, J_2, \dots, J_m$ 等子区间. 以 $\Delta_1$ 及 $\Delta_2$ 的所有子区间的端点为分点得到 $I$ 新划分 $\Delta$ 称为 $\Delta_1$ 与 $\Delta_2$ 的共同细分.  $\Delta$ 的每个子区间是形如 $I_i \cap J_k$ 的区间 ( $i = 1, 2, \dots, n, K = 1, 2, \dots, m$ ). 每一不空的 $I_i \cap J_k$ 含于 $\Delta_1$ 的唯一子区间 $I_i$ 也含于 $\Delta_2$ 的唯一子区间 $J_k$ 之中 (图5.3)

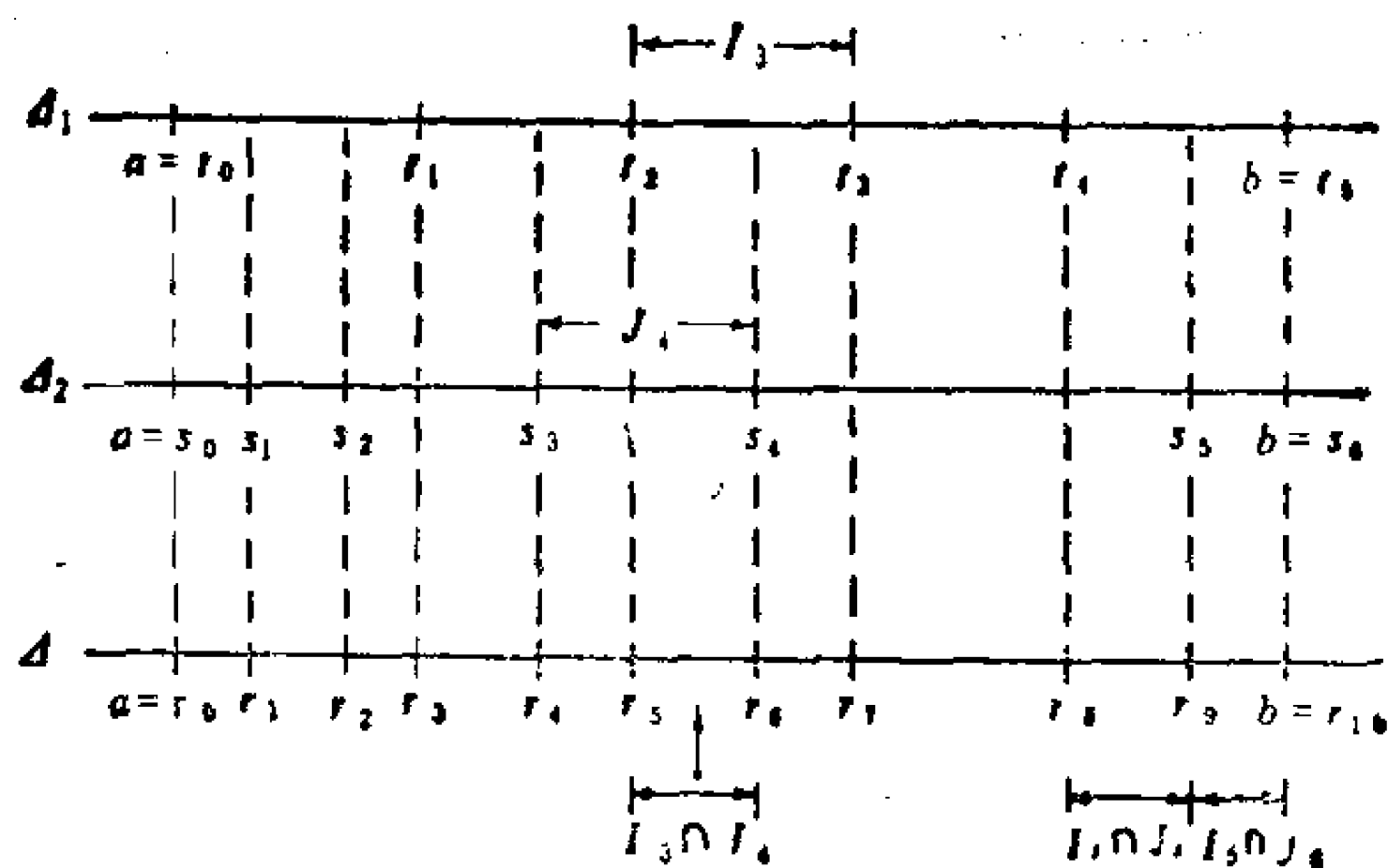


图 5.3

**定理5.1**  $S^+(f, \Delta)$  及  $S_-(f, \Delta)$  的基本性质:

- (a)  $m(b-a) \leq S_-(f, \Delta) \leq S^+(f, \Delta) \leq M(b-a)$
- (b) 若  $\Delta'$  是  $\Delta$  的细分, 那么  

$$S_-(f, \Delta) \leq S_-(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta).$$
- (c) 若  $\Delta_1, \Delta_2$  是  $I$  的两个划分, 那么  

$$S_-(f, \Delta_1) \leq S^+(f, \Delta_2)$$

**证明** (a) 由上、下确界定义

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

同时  $\sum_{i=1}^n l(I_i) = b-a$ . 于是由 (5.1) 及 (5.2)

$$\begin{aligned} m(b-a) &= \sum_{i=1}^n m \cdot l(I_i) \leq \sum_{i=1}^n m_i l(I_i) = S_-(f, \Delta) \\ &\leq \sum_{i=1}^n M_i l(I_i) = S^+(f, \Delta) \leq \sum_{i=1}^n M l(I_i) = M(b-a). \end{aligned}$$

(b) 设  $\Delta_i$  是  $I$  的子区间  $I_i$  的以  $\Delta'$  位于  $I_i$  内的子区间端

点为分点的划分。应用 (a) 于每一  $I_i$  及  $\Delta_i$  便有

$$S_-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i l(I_i) \leq \sum_{i=1}^n S_-(f, \Delta_i) = S_-(f, \Delta')$$

$$\leq S^+(f, \Delta') = \sum_{i=1}^n S^+(f, \Delta_i) \leq \sum_{i=1}^n M_i l(I_i) = S^+(f, \Delta).$$

(c) 设  $\Delta$  是  $\Delta_1$  与  $\Delta_2$  的共同细分。由 (b) 有

$$S_-(f, \Delta_1) < S_-(f, \Delta) \leq S^+(f, \Delta) \leq S^+(f, \Delta_2).$$

定理5.1关于  $S_-(f, \Delta)$ ,  $S^+(f, \Delta)$  的三条基本性质用几何图形容易直观地表示 (图5.2)。基于定理5.1, 可以定义  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上的达布积分。

**定义** 定义  $f$  的达布上积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_{\Delta} \{ S^+(f, \Delta) : I \text{ 的任一划分 } \Delta \}$$

达布下积分为

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_{\Delta} \{ S_-(f, \Delta) : I \text{ 的任一划分 } \Delta \}$$

由定理5.1之 (c) 及上、下确界定义

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

恒成立。当等号出现时, 称  $f$  在  $I$  上达布可积或简称可积,

上、下积分的共同值叫作积分, 记为  $\int_a^b f(x) dx$ 。

**定理5·2** 若对  $x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ , 那么

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**证明** 设  $\Delta_1, \Delta_2$  是  $I$  的两个划分. 由定理5·1的 (b)、(c) 导出

$$m(b-a) \leq S_-(f, \Delta_1) \leq S^+(f, \Delta_2) \leq M(b-a).$$

固定  $\Delta_1$  让  $\Delta_2$  变, 据上述不等式对一切可能的  $\Delta_2$  成立,

$\{S^+(f, \Delta_2)\}$  的下确界 即  $\int_a^b f(x) dx \geq S_-(f, \Delta_1)$ , 于是

$$m(b-a) \leq S_-(f, \Delta_1) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

现让  $\Delta_1$  变, 由  $S_-(f, \Delta_1)$  对一切可能划分都不超过  $\int_a^b f(x) dx$ , 所以

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

**推论** 若  $\forall x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $m \leq f(x) \leq M$ , 且  $f$  在  $I$  上达布可积, 那么

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

为了建立达布上、下积分的简单性质, 要用到关于函数

上、下确界的基本事实:

**引理5.1** 设 $f$ 是 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上的有界函数,  $k$ 为实数, 定义 $g(x) = kf(x)$ , 那么

$$(i) \text{ 当 } k > 0 \text{ 有 } \inf_{x \in I} g(x) = k \inf_{x \in I} f(x),$$

$$\sup_{x \in I} g(x) = k \sup_{x \in I} f(x).$$

$$(ii) \text{ 当 } k < 0 \text{ 有 } \inf_{x \in I} g(x) = k \sup_{x \in I} f(x),$$

$$\sup_{x \in I} g(x) = k \inf_{x \in I} f(x).$$

**证明** 仅证 (ii) 中后一等式. 其余类似. 设  $m = \inf_{x \in I} f(x)$ , 由下确界定义对  $x \in I$  有  $f(x) \geq m$ , 而  $k < 0$ , 所以对  $\forall x \in I$ ,  $g(x) = kf(x) \leq km$ . 因此

$$\sup_{x \in I} g(x) \leq km. \quad (5.3)$$

现证 (5.3) 式的等号成立. 事实上由  $m$  的定义及  $k < 0$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists x_0 \in I$  使

$$f(x_0) < m + \left(\frac{\varepsilon}{-k}\right), \text{ 即 } g(x_0) = kf(x_0) > km - \varepsilon.$$

根据上确界定义可得

$$\sup_{x \in I} g(x) \geq km. \quad (5.4)$$

综合 (5.3), (5.4) 便有  $\sup_{x \in I} g(x) = k \inf_{x \in I} f(x)$ .

**定理5.3** 以下各函数都是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上的有

## 界函数

(a) 若  $g(x) = kf(x)$ ,  $x \in I$ .

(i) 当  $k > 0$ , 那么  $\int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

$$\text{及 } \int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx ;$$

(ii) 当  $k < 0$ , 那么  $\int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

$$\text{及 } \int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx .$$

(b) 设  $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ,  $x \in I$ , 那么

$$(i) \int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx ;$$

$$(ii) \int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

(c) 若  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in I$ , 那么

$$(i) \int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx ;$$

$$(ii) \int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx .$$

(d) 若  $a < c < b$ , 那么

$$(i) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$(ii) \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

**证明** 仅证明(a)的(i)及(d)的(ii), 其余类似.

(a) 的(i). 设 $\Delta$ 是 $I$ 的划分, 分解 $I$ 为 $I_1, I_2, \dots, I_n$ .

分别记 $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ ,  $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$  及  $\widetilde{m}_i = \inf_{x \in I_i} g(x)$ ,

$\widetilde{M}_i = \sup_{x \in I_i} g(x)$ . 由 $k > 0$  据引理5.1  $\widetilde{m}_i = km_i$ ,  $\widetilde{M}_i = kM_i$ .

因此.

$$\begin{aligned} S_-(g, \Delta) &= \sum_{i=1}^n \widetilde{m}_i l(I_i) = k \sum_{i=1}^n m_i l(I_i) = k S_-(f, \Delta) \\ &\leq k \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{于是} \quad \int_a^b g(x) dx \leq k \int_a^b f(x) dx. \quad (5.5)$$

现在建立相反的不等式. 由确界性质, 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \Delta$ 使

$$S_-(f, \Delta) > \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{k} \varepsilon.$$

对这怎的划分 $\Delta$ , 我们有

$$\int_a^b g(x) dx \geq S_-(g, \Delta) = k S_-(f, \Delta) > k \int_a^b f(x) dx - \varepsilon.$$



由 $\varepsilon$ 的任意性, 导出

$$\int_a^b g(x) dx \geq k \int_a^b f(x) dx \quad (5.6)$$

综合 (5.5) 及 (5.6), 得 (a) 的 (i) .

(d) 的(ii). 对 $\forall \varepsilon > 0$ , 由上积分定义,  $\exists I' = \{x : a \leq x \leq c\}$  的划分 $\Delta_1$ , 使

$$S^+(f, \Delta_1) < \int_a^c f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

也 $\exists I'' = \{x : c \leq x \leq b\}$  的划分 $\Delta_2$ 使

$$S^+(f, \Delta_2) < \int_c^b f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

令 $\Delta$ 是由 $I'$ 的划分 $\Delta_1$ 及 $I''$ 的划分 $\Delta_2$ 所有的子区间所组成的 $I$ 的划分, 那么

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq S^+(f, \Delta) = S^+(f, \Delta_1) + S^+(f, \Delta_2) < \\ &\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

由 $\varepsilon$ 的任意性, 因此有

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (5.7)$$

现证相反不等式. 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists I$ 的划分 $\Delta$ , 使

$$S^+(f, \Delta) > \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

于划分 $\Delta$ 加入分点 $C$ 得 $\Delta$ 的细分 $\Delta'$ . 由定理 5.1,  $S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta)$ . 若以 $\Delta_1, \Delta_2$ 分别表示由 $\Delta'$ 带来的 $I'$ 及 $I''$ 的划分 (图 5.4), 这样便有

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq S^+(f, \Delta_1) + S^+(f, \Delta_2) =$$

$$S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta) < \int_a^b f(x)dx + \varepsilon.$$

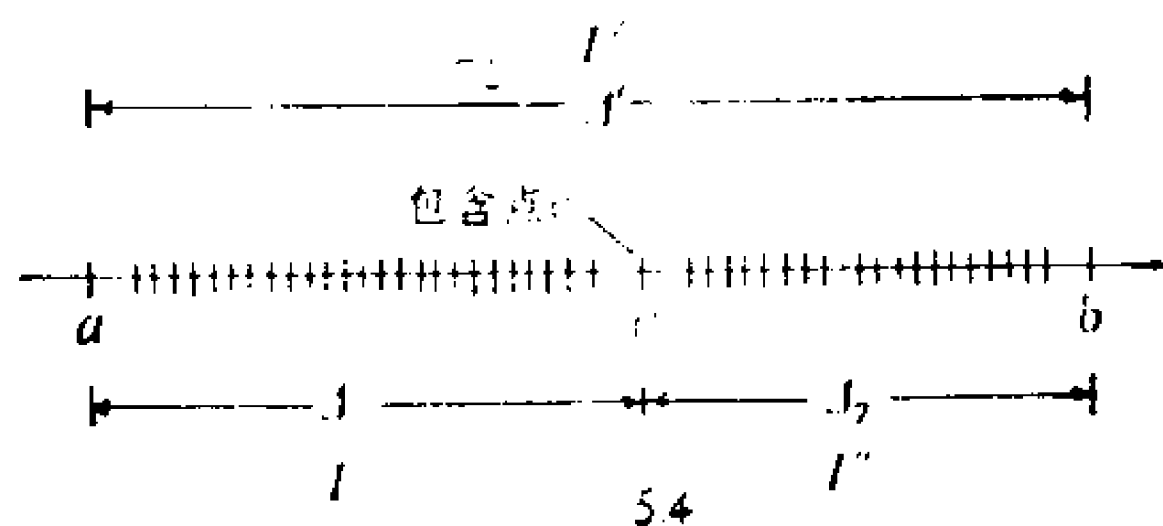


图 5.4

由 $\varepsilon$ 的任意性, 所以有

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$$

综合这一不等式与 (5.7) 得 (d) 的 (ii) 成立.

**推论** 当 $f$ 于 $I$ 上达布可积, 那么

(a) 若 $g(x) = kf(x)$ ,  $k$ 为常数, 有

$$\int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx.$$

(b) 若  $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , 有

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

(c) 若  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in I$ , 有

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx.$$

(d) 若  $f$  在  $I_1 = \{x : a \leq x \leq c\}$  及  $I_2 = \{x : c \leq x \leq b\}$  上达布可积,  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上达布可积且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (5.8)$$

定义  $\int_a^a f(x) dx = 0$  及  $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$  是有益的.

作了这样的规定之后, 上面的 (5.8) 式在所论积分存在的条件下, 不论  $c$  是否在  $a, b$  之间 (5.8) 式都成立.

**定理5.4** 若  $f$  在区间  $I$  上可积, 那么它在  $I$  的子区间  $I'$  上是可积的.

定理5.4的证明留给读者.

重要的问题是如何确定函数的可积性. 下面定理给出可积的必要与充分条件以及适用的可积性充分条件的推论.

**定理5.5** 设  $f$  是区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上定义的有界函数.  $f$  在  $I$  上可积  $\iff$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists I$  的划分  $\Delta$  使

$$S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) < \varepsilon. \quad (5.9)$$

**证明** 先证条件是充分的. 假定条件 (5.9) 成立. 由上、下积分定义, 有

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \leq S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) < \varepsilon.$$

不等式左端与  $\varepsilon$  无关, 由  $\varepsilon$  的任意性, 因而

$$\int_a^{-b} f(x) dx - \int_{-a}^b f(x) dx = 0,$$

即  $f$  是可积的。

现证条件 (5.9) 的必要性。假定  $f$  是可积的。由定义对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  划分  $\Delta_1$  及  $\Delta_2$  使

$$S^+(f, \Delta_1) < \int_a^{-b} f(x) dx + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\text{及 } S_-(f, \Delta_2) > \int_{-a}^b f(x) dx - \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (5.10)$$

把  $\Delta_1$  与  $\Delta_2$  的共同细分记为  $\Delta$ , 据定理 5.1

$$S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) \leq S^+(f, \Delta_1) - S_-(f, \Delta_2).$$

将 (5.10) 代入并据  $f$  可积即  $\int_a^{-b} f(x) dx = \int_{-a}^b f(x) dx$ , 得

$$S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) < \varepsilon,$$

于是条件 (5.9) 成立。

**推论1** 若  $f$  在闭区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 那么  $f$  是可积的。

**证明 (纲要)**  $I$  是闭的, 所以  $f$  一致连续. 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使  $I$  中满足  $|x - y| < \delta$  的  $x, y$ , 都有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

取  $I$  的划分  $\Delta$  使每一子区间之长小于  $\delta$ , 便有不等式 (5.9) 成立. 由定理 5.5  $f$  是可积的。

**推论2** 若 $f$ 在闭区间 $I$ 上单调, 那么 $f$ 可积.

推论2的证明留作习题.

注 推论1与2中假设 $I$ 为闭区间的条件是不能去的. 例如函数 $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$ 在半开区间 $I = \{x: 0 < x \leq 1\}$ 上既连续又单调,  $f$ 在 $I$ 上无界, 对每一划分 $\Delta$ ,  $S^+(f, \Delta)$ 不是有限数,  $f$ 在 $I$ 上不可积.

**定理5.6** (积分中值定理) 设 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续. 那么存在数 $\xi \in I$  满足

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

**证明** 以 $m, M$ 分别表示 $f(x)$ 在 $I$ 上的最小值与最大值. 由连续函数的极值性定理(定理3.10),  $\exists x_0, x_1 \in I, f(x_0) = m, f(x_1) = M$ . 而据定理5.2推论有

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a). \quad (5.11)$$

由此导出 $\int_a^b f(x) dx = A(b - a)$  中的 $A$ 是满足 $f(x_0) \leq A \leq$

$f(x_1)$ 的数. 由介值性定理(定理3.2),  $\exists \xi \in I, f(\xi) = A$ .

下面给出反映微分与积分互为逆运算的微积分基本定理.

**定理5.7** (微积分基本定理的第一形式) 设 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续, 且定义 $F$ 为

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

那么 $F$ 在 $I$ 上连续, 且对 $x \in I_1 = \{x: a < x < b\}$ , 有

$$F'(x) = f(x).$$

**证明**  $f$  在  $I$  的每一子区间上可积, 因而

$$\int_a^{x+h} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

也即

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

对  $\int_x^{x+h} f(x) dx$  应用定理 5.6,  $\exists$  介于  $x, x+h$  之间的  $\xi$  使

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = f(\xi) \cdot h. \text{ 这样便有}$$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi),$$

据  $f(x)$  的连续性, 等式左端在  $x+h \rightarrow x$  即  $h \rightarrow 0$  时有极限  $f(x)$ ,

因此  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$  存在且等于  $f(x)$ , 即

$$f'(x) = f(x), \quad x \in I_1 = \{x : a < x < b\}.$$

**定理 5.8** (微积分基本定理的第二形式) 设  $f$  及  $F$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 且对  $x \in I_1 = \{x : a < x < b\}$  有  $F'(x) = f(x)$ , 那么

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

定理 5.8 的证明留给读者.

设  $f$  是定义在  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上的非负可积函数。  
积分

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.12)$$

给出图5.5所示的曲线之下的面积。在初等几何中，面积依直观定义，给出了矩形、多边形、圆等的面积计算公式。积分 (5.12) 可以作为图 5.5 所示的区域面积定义。关于面积的严格定义放在 § 5.4 中详细讨论。

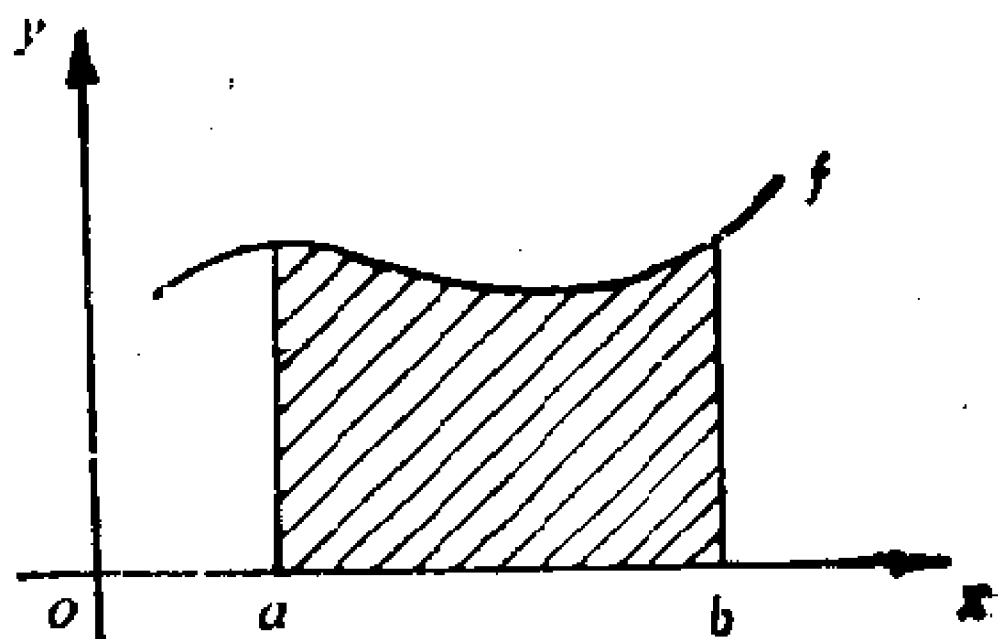


图 5.5

### 习 题

1. 设  $f = x^2$ ,  $x \in I = \{x: a \leq x \leq b\}$ ,  $\Delta$  为将  $I$  分成 5 个等长的子区间的划分, 计算  $S^+(f, \Delta)$ ,  $S^-(f, \Delta)$ .
2. (a) 设  $f: x \rightarrow x^3$ ,  $x \in I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ .  $\Delta$  是一划分,  $\Delta'$  是  $\Delta$  又添加上一个分点的  $\Delta$  的细分. 证明  $S^+(f, \Delta') < S^+(f, \Delta)$  及  $S_-(f, \Delta') > S_-(f, \Delta)$ .  
(b)  $I$ ,  $\Delta$  与  $\Delta'$  同 (a), 给出一个  $I$  上的函数使它满足:  
 $S^+(f, \Delta') = S^+(f, \Delta)$ ,  $S_-(f, \Delta') = S_-(f, \Delta)$ .  
(c) 设  $f$  在  $I$  上是严格递增连续函数, 证明对  $\Delta$  的任一细分  $\Delta'$ , 有  $S^+(f, \Delta') < S^+(f, \Delta)$ .
3. 若  $g(x) = kf(x)$ ,  $x \in I = \{x: a \leq x \leq b\}$  证明 (定理 5.3 (a)):

当  $k < 0$ ,  $\int_a^b g(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$  成立.

4. (a) 若  $h(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ,  $x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$  证明 (定理 5.3 (b)) :

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

(b) 若  $f_1, f_2$  是达布可积的, 证明

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

5. 若  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ,  $x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$  证明 (定理 5.3 (c)) :

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx, \quad \int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx.$$

当  $f_1, f_2$  达布可积. 有  $\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$ .

6. 证明: 在各积分存在时, 不论  $c$  是否在  $a, b$  之间, 都有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上可积.  $I' = \{x : a \leq x \leq \beta\}$  是  $I$  的子区间. 证明  $f$  在  $I'$  上可积 (定理 5.4).



[提示: 推广定理5.3(d)于 $a < \alpha < \beta < b$ 三区间, 而后在各区间上以上积分减下积分.]

8. 完成定理5.5推论1的证明.

9. 证明单调函数可积性的定理5.5推论2.

[提示: 用  $S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) \leq |f(b) - f(a)| \max_{1 \leq i \leq n} (\bar{\tau}_i).$ ]

10. 称定义在区间  $I$  上的函数为阶梯函数  $\iff \exists I$  的划分  $\Delta$ , 使当  $x$  为子区间  $I_i$  内点时,  $f(x) = c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 证明阶梯函数是可积的, 并找出其积分值公式.

11. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$  证明

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0, \quad \int_0^{-1} f(x) dx = 1.$$

12. (a) 设  $f$  是  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上的有界函数,  $M = \sup_{x \in I} f(x)$ ,

$$m = \inf_{x \in I} f(x), \quad M^* = \sup_{x \in I} |f(x)|, \quad m^* = \inf_{x \in I} |f(x)|. \text{ 证}$$

$$\text{明 } M^* - m^* \leq M - m.$$

(b) 设  $f$  在  $I$  上可积证明  $|f(x)|$  在  $I$  上可积. 且  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$

13. (a) 设  $f$  与  $g$  是  $I$  上非负有界函数,  $M = \sup_{x \in I} f(x)$ ,  $m =$

$$\inf_{x \in I} f(x), \quad N = \sup_{x \in I} g(x), \quad n = \inf_{x \in I} g(x) \quad \text{证明}$$

$$\sup_{x \in I} f(x)g(x) - \inf_{x \in I} f(x)g(x) \leq MN - mn.$$

(b) 设  $f, g$  可积, 证明  $f \cdot g$  在  $I$  上可积.

14. 设  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $I$  上函数  $f$  如下定义

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{当 } x = \frac{j}{2^n}, j \text{ 是奇数}, 0 < j < 2^n, n = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{当 } x \text{ 在别处.} \end{cases}$$

研究  $f$  的可积性

\*15. 设  $f, g$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上正值连续函数, 证明

$$\exists \xi \in I, \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \quad [\text{提示: 用}$$

定理 5.6]

16. 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上除去内点  $c$  之外连续, 若  $f$  是有界的, 证明  $f$  在  $I$  上可积. 且  $f$  于  $c$  点的值不影响  $f$  的积分值. 进而证明在  $I$  内仅有有限个不连续点的有界函数是可积的; 改变可积函数的有限个点的值, 函数仍可积, 而且积分值不变.

17. 设  $f$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上非负连续不恒等于零的函数.

证明  $\int_a^b f(x)dx > 0$ . 若  $f$  只是非负可积的, 结果如何?

18. 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 且对每一连续函数

$g(x)$ , 都有  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ , 证明  $f(x) = 0, \forall x \in I$ .

19. 证明定理5·8, [提示: 用  $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) -$

$F(x_{i-1})]$  对每一项应用中值定理。]

## § 5.2 黎曼积分

黎曼提出另一种直接用和的极限定义积分的方法。

**定义** 设  $\Delta$  是把  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  分解为子区间  $I_1, I_2, \dots, I_n$  的划分。称  $I_i$  的长度  $l(I_i) (i=1, 2, \dots, n)$  的最大值为  $\Delta$  的网孔, 记为  $\|\Delta\|$ 。设  $f$  定义在  $I$  上, 于划分  $\Delta$  的每一

子区间  $I_i$  中选取一点  $x_i \in I_i$ , 作成的和  $\sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i)$ , 称

为黎曼和。

对于非负函数如图5·6所示, 当  $\|\Delta\|$  很小时黎曼和的几何意义是曲线下方图形面积的近似值。

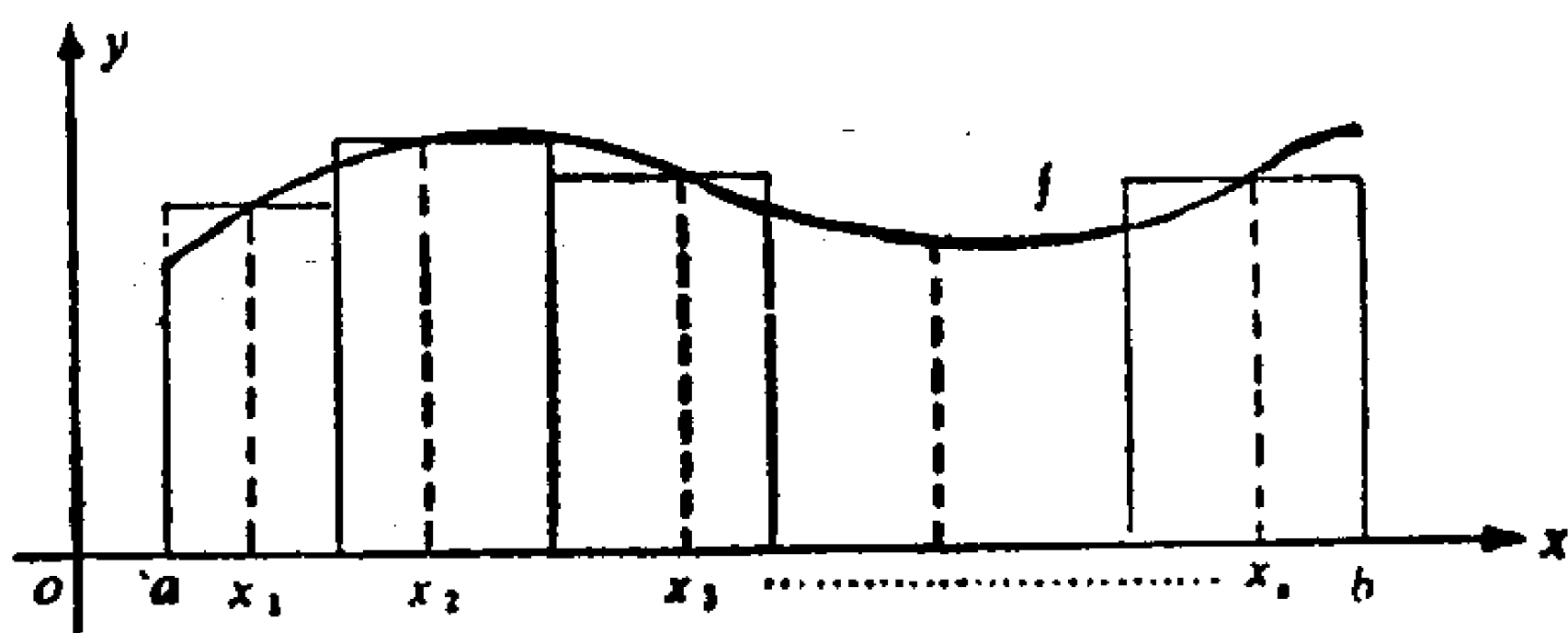


图 5·6

**定义**  $I$  上定义的函数  $f$  称为黎曼可积的  $\iff \exists$  一数  $A$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  相应的  $\delta > 0$ , 使当  $\|\Delta\| < \delta$ , 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) - A \right| < \varepsilon. \quad (5.13)$$

对任意这样的划分 $\Delta$ 及 $x_i \in I_i$ 的可能选取都成立。数 $A$ 称为

$f$ 的黎曼积分，表示成  $A = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i)$ 。

**定理5.9** 一个函数的黎曼积分是唯一的。

定理5.9由极限唯一性导出，留作习题。

**定理5.10** 若 $f$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上黎曼可积，那么 $f$ 在 $I$ 上有界。

**证明** 于黎曼积分定义里取  $\varepsilon = 1$ ， $\Delta$ 为使(5.13)成立的划分。即对选自 $I_i$ 中的点 $x_i, x'_i$ ，有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) - A \right| < 1 \text{ 及 } \left| \sum_{i=1}^n f(x'_i) l(I_i) - A \right| < 1.$$

从而

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) - \sum_{i=1}^n f(x'_i) l(I_i) \right| < 2.$$

现在对 $i = 2, 3, \dots, n$ 取 $x_i = x'_i$ ，上面不等式成为

$$|f(x_1) - f(x'_1)| l(I_1) < 2 \iff |f(x_1) - f(x'_1)| < \frac{2}{l(I_1)}.$$

利用 $|a| - |\beta| \leq |a - \beta|$ 的不等式，由 $|f(x_1) - f(x'_1)|$

$$< \frac{2}{l(I_1)}, \text{ 得}$$

$$|f(x_1)| < \frac{2}{l(I_1)} + |f(x_1')|.$$

固定 $x_1'$ , 让 $x_1$ 取遍 $I_1$ , 便得于 $I_1$ 上 $f(x)$ 有界. 同理 $f$ 在 $I_2, I_3, \dots, I_n$ 上有界. 所以 $f$ 在 $I$ 上有界.

**定理5.11** 若 $f$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上黎曼可积, 那么 $f$ 在 $I$ 上达布可积. 以 $A$ 表示黎曼积分,

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

**证明** 对 $\forall \varepsilon > 0$ , 由黎曼可积,  $\exists$ 网孔充分小的划分 $\Delta$ , 对 $\forall x_i \in I_i$ 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) - A \right| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (5.14)$$

分别记  $M_i = \sup_{x \in I_i} f(x)$ ,  $m_i = \inf_{x \in I_i} f(x)$ . 按 $M_i, m_i$ 的定义,

$I_i$ 中 $\exists x_i', x_i''$ 使

$$f(x_i') > M_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad f(x_i'') < m_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

于是可得

$$\begin{aligned} S^+(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n M_i \cdot l(I_i) < \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] l(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i') l(I_i) + \frac{1}{4} \varepsilon. \end{aligned}$$

再用(5.14)式, 得

$$S^+(f, \Delta) < A + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = A + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.15)$$

同理, 可得

$$\begin{aligned} S_-(f, \Delta) &= \sum_{i=1}^n m_i l(I_i) > \sum_{i=1}^n \left[ f(x'_i) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right] l(I_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x'_i) l(I_i) - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

以及

$$S_-(f, \Delta) > A - \frac{\varepsilon}{2} \quad (5.16)$$

由(5.15)减(5.16)式, 得

$$S^+(f, \Delta) - S_-(f, \Delta) < \varepsilon,$$

于是 $f$ 是达布可积的. 并由(5.15), (5.16)

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

为了证明达布可积函数是黎曼可积的, 需要如下技术性的引理.

**引理5.2** 设 $f$ 是定义在 $[a, b]$ 上的有界函数, 那么对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当划分 $\Delta$ 的 $\|\Delta\| < \delta$ 有

$$\begin{aligned} S^+(f, \Delta) &< \int_a^b f(x) dx + \varepsilon, \\ S_-(f, \Delta) &> \int_a^b f(x) dx - \varepsilon. \end{aligned} \quad (5.17)$$

**证明** 仅需证明对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta_1$ , 使当  $\|\Delta\| < \delta_1$  有 (5.17) 的第一个不等式成立. 另一个其证明类似.

为此, 由  $\int_a^b f(x)dx$  定义, 存在  $I$  的划分  $\Delta_0$ ,  $\Delta_0 = \{I_1, I_2, \dots, I_K\}$  ( $K \geq 2$ ),  $I_i = [t_{i-1}, t_i]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ , 使

$$S^+(f, \Delta_0) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.18)$$

现在取一比  $\min_{1 \leq i \leq K} \left\{ (t_i - t_{i-1}), \frac{\varepsilon}{2(K-1)(M-m)} \right\}$  小的  $\eta$ ,

并设  $\Delta$  为  $\|\Delta\| < \eta$  的划分. 由  $\|\Delta\| < \eta$ , 至多可能有  $K-1$  个  $\Delta$  的子区间  $J_1, J_2, \dots, J_p$  ( $p \leq K-1$ ) 包含某一  $t_i$  为其内点, 且设  $\Delta$  的其余子区间是  $K_1, K_2, \dots, K_q$ . 现记  $\Delta$  与  $\Delta_0$  的共同细分为  $\Delta'$ .  $\Delta'$  由子区间  $K_1, K_2, \dots, K_q$ , 以及  $J'_i$  与  $J''_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ )  $2p$  个子区间, 共  $2p+q$  个子区间组成,  $J'_i$  与  $J''_i$  是  $J_i$  由  $t_i$  点分成的两子区间. 对  $\Delta$  与  $\Delta'$  分别写出相应的达布上和

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^p M_i l(J_i) + \sum_{K=1}^q M_K^* l(K_K) \quad (5.19)$$

$$S^+(f, \Delta') = \sum_{i=1}^p [M'_i l(J'_i) + M''_i l(J''_i)] + \sum_{K=1}^q M_K^* l(K_K)$$

其中  $M_i$ ,  $M'_i$ ,  $M''_i$  及  $M_K^*$  是  $f$  在相应的  $J_i, J'_i, J''_i, K_K$  上的上确

界。因为对每一  $j$

$$l(J_i) = l(J_i^l) + l(J_i^r), \quad m \leq M_i, \quad M_i', \quad M_i' \leq M,$$

因此

$$S^+(f, \Delta) - S^+(f, \Delta') \leq (M - m) \sum_{i=1}^n l(J_i)$$

$$\leq (K - 1)(M - m)\eta < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.20)$$

综合 (5.18), (5.19) 及 (5.20) 式导出

$$S^+(f, \Delta) < S^+(f, \Delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x) dx + \varepsilon.$$

**定理5.12** 函数  $f$  是黎曼可积的  $\iff f$  是达布可积的并且两种积分相等。

**证明** 仅需证明定理5.11的逆命题成立, 即当  $f$  达布可积它是黎曼可积的。对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\delta$  是按引理5.2所选, 使当划分  $\Delta$  的网孔  $\|\Delta\| < \delta$ , 有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - \varepsilon &< S_-(f, \Delta) \leq \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) \leq S^+(f, \Delta) \\ &< \int_a^b f(x) dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

既然  $\varepsilon$  是任意的, 得到

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) l(I_i) = A = \int_a^b f(x) dx.$$



即 $f$ 黎曼积分 $A$ 存在且等于达布积分。

根据定理5.12, 可以去掉可积性叙述中的“达布”或“黎曼”而只说函数可积、不可积。

最后给出初等微积分中往往未予证明的积分的变量替换公式。

**定理5.13** 设 $f$ 在开区间 $I$ 内连续,  $u$ 及 $u'$ 是开区间 $J$ 上的连续函数,  $u$ 的值域包含在 $I$ 内. 若 $a, b \in J$ , 那么

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du. \quad (5.21)$$

**证明** 设 $c \in I$ 并定义

$$F(u) = \int_c^u f(t)dt. \quad (5.22)$$

由微积分基本定理 (定理5.7), 有

$$F'(u) = f(u), \quad u \in I.$$

定义 $G(x) = F[u(x)]$ , 应用链法则

$$G'(x) = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)] \cdot u'(x).$$

因为所研究的函数都是连续的, 因此

$$\begin{aligned} \int_a^b f[u(x)]u'(x)dx &= \int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a) \\ &= F[u(b)] - F[u(a)] \end{aligned}$$

由 (5.22) 式, 得出

$$F[u(b)] - F[u(a)] = \int_c^{u(b)} f(t)dt - \int_c^{u(a)} f(t)dt$$

$$= \int_{\bar{u}(a)}^{\bar{u}(b)} f(t) dt = \int_{\bar{u}(a)}^{\bar{u}(b)} f(u) du.$$

## 习 题

1. (a) 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 证明达布上和、下和都是黎曼和.  
 (b) 设  $f$  在  $I$  上递增, 证明达布上和、下和都是黎曼和.  
 (c) 给出一有界函数, 它的达布和不是黎曼和.
2. 若  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上可积, 且  $0 < m \leq f(x) \leq M$ ,

$x \in I$ . 证明  $\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx$  存在.

3. 设  $u, u', v$  及  $v'$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续函数. 证明部分积分公式:

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(b) v(b) - u(a) v(a) - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

4. 举出一函数  $f$ ,  $|f|$  在  $I$  上可积,  $f$  不可积.
5. 根据定义证明黎曼积分的唯一性 (定理 5.9).  
 [提示: 若有  $A \neq A'$  都适合 (5.13) 式会导致矛盾]
6. 证明定理 5.13 可作如下推广. 设  $u$  在  $a \leq x \leq b$  上连续,  $u'(x)$  在  $a < x < b$  连续, 且  $x \rightarrow a^+$  及  $x \rightarrow b^-$ ,  $u'$  存在极限. 不妨认为  $u(a) < u(b)$ , 定义

$$f_0(u) = \begin{cases} f(u) & \text{当 } u(a) \leq u \leq u(b) \\ f[u(a)] & \text{当 } u \leq u(a) \\ f[u(b)] & \text{当 } u \geq u(b) \end{cases}$$

$$u_0(x) = \begin{cases} u(x) & \text{当 } a \leq x \leq b \\ u(a) + u'(a)(x-a) & \text{当 } x \leq a \\ u(b) + u'(b)(x-b) & \text{当 } x \geq b. \end{cases}$$

这里  $u'(a)$  及  $u'(b)$  是  $u'(x)$  的极限值。公式 (5.21) 仍成立。

7. 叙述  $u, v, f$  满足什么条件能使下面公式成立:

$$\int_a^b f[u(v(x))]u'[v(x)]v'(x)dx = \int_{u[v(a)]}^{u[v(b)]} f(u)du.$$

\*8. 设  $f$  与  $g$  在  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上可积。那么  $f^2, g^2$  与  $fg$  是可积的。并证明哥西—许瓦兹不等式:

$$\left[ \int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left[ \int_a^b f^2(x)dx \right] \cdot \left[ \int_a^b g^2(x)dx \right].$$

[提示: 注意对所有  $Z$  有  $\alpha Z^2 + 2\beta Z + \gamma \geq 0$  并令

$$\alpha = \int_a^b f^2(x)dx, \beta = \int_a^b f(x)g(x)dx, \gamma = \int_a^b g^2(x)dx.]$$

### § 5.3 对数函数与指数函数

中学数学是基于幂的概念来定义指数、对数概念的。现在基于微积分理论给出对数函数、指数函数的解析定义。

**定义** 自然对数函数表示为  $\log x$ , 其定义为

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad x > 0.$$

**定理5.14** 设  $f: x \rightarrow \log x$ ,  $x > 0$ ,  $a, b$  是正数.

那么 (i)  $\log(ab) = \log a + \log b$  .

$$(ii) \log \frac{a}{b} = \log a - \log b .$$

$$(iii) \log 1 = 0 .$$

$$(iv) \log(a^r) = r \log a, \quad r \text{ 为有理数} .$$

$$(v) f'(x) = \frac{1}{x} .$$

(vi)  $f$  在  $I = \{x: 0 < x < +\infty\}$  上递增连续 .

$$(vii) \frac{1}{2} \leq \log 2 \leq 1 .$$

$$(viii) \log x \rightarrow +\infty, \quad \text{当 } x \rightarrow +\infty .$$

$$(ix) \log x \rightarrow -\infty, \quad \text{当 } x \rightarrow 0^+ .$$

$$(x) \quad f \text{ 的值域是 } \mathbb{R}_1 .$$

**证明** 为证明 (i), 记

$$\log(a \cdot b) = \int_1^{a \cdot b} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{a \cdot b} \frac{1}{t} dt .$$

于  $\int_a^{a \cdot b} \frac{1}{t} dt$  中换变量, 令  $u = \frac{t}{a}$ , 有

$$\int_a^{a \cdot b} \frac{1}{t} dt = \int_1^b \frac{1}{u} du .$$

因此  $\log a \cdot b = \log a + \log b$ .

为证(ii), 应用(i)于  $a = b \cdot \frac{a}{b}$  得到

$$\log a = \log b + \log \frac{a}{b},$$

即(ii)成立.

于(ii)中令  $a = b$  便得(iii).

我们分几步证明(iv). 若  $r$  是正整数, 由(i)在  $a = b$  时的结果, 并应用数学归纳法可得(iv). 对于负整数由

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  并应用(ii)可得(iv). 最后若  $r = \frac{p}{q}$ ,  $p, q$  是

整数, 令  $u = a^{\frac{1}{q}}$ ,  $u^q = a$ . 因此  $q \log u = \log a$ . 因为

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = u^p,$$

有  $\log(a^r) = \log(u^p) = p \log u = \frac{p}{q} \log a = r \log a$ .

(v) 由微积分基本定理即得.

对于(vi), 因为  $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ,  $x \in [1, \infty)$ , 所以  $f$

递增, 可微函数必定是连续的.

为证明(vii)的不等式, 用达布上和、下和便得, 细节留给读者. (vii)的几何意义如图5.7所示.

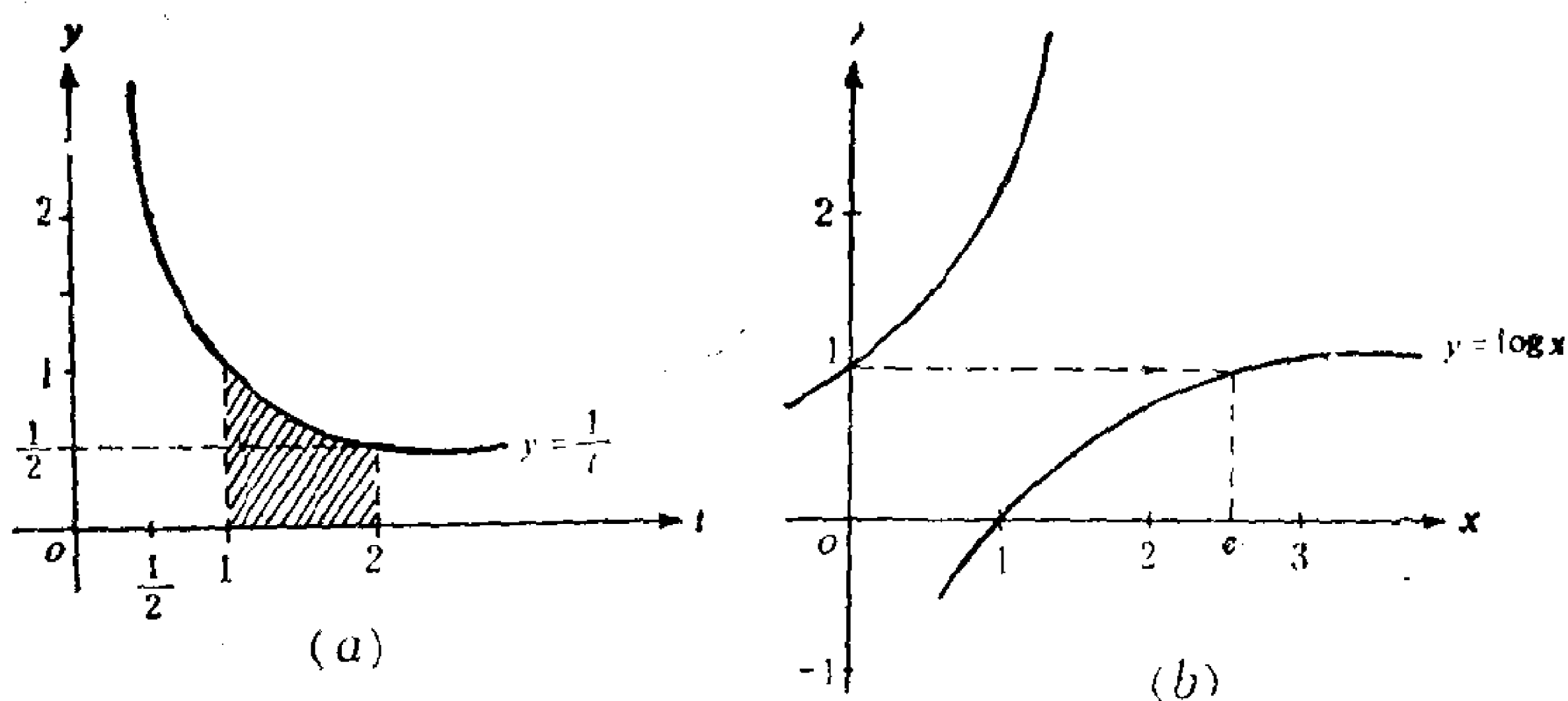


图 5.7

为证(viii), 设 $n$ 为正整数, 当 $x > 2^n$ , 由(vi)

$$\log x > \log(2^n) = n \log 2 > \frac{n}{2}.$$

设 $M$ 是正数, 取 $n > 2M$ , 当 $x > 2^n$ 时,  $\log x > M$ . 于是(viii)成立. 当取 $x < 2^{-n}$ , (ix) 便得证.

由(viii), (ix)及介值定理导出(X).

由以上定理之(vi), 对数函数是递增的, 其反函数存在, 所以下面的定义是合理的.

**定义** 对数函数的反函数称为指数函数, 表示为 $\exp x$ .

**定理5.15** 若 $f: x \rightarrow \exp x$ 是指数函数, 那么

(i)  $f$ 在 $\mathbf{R}_1$ 上递增连续, 其值域为 $\{x: 0 < x < +\infty\}$ .

(ii)  $f'(x) = \exp x, x \in \mathbf{R}_1$ .

(iii)  $\exp(x+y) = (\exp x) \cdot (\exp y)$ .

(iv)  $\exp(x-y) = (\exp x) / (\exp y)$ .

(v)  $\exp(rx) = (\exp x)^r, r$ 为有理数.

(vi) 当  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$ .

(vii) 当  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) \rightarrow 0$ .

(viii)  $\log(\exp x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}_1$ .

(ix) 若  $a > 0$  且  $r$  是有理数, 那么  $\exp(r \log a) = a^r$ .

证明 (i), (viii) 是反函数定理 (定理4.17) 的直接推论.

为证明(ii), 首先令  $y = \exp x$ . 由反函数可微性的定理4.18,  $\exp$  是可微的. 应用链法则于  $\log y = x$ , 导出  $\frac{1}{y} \cdot y' = 1$ , 即  $y' = y = \exp x$ .

为了证明 (iii), 令  $y_1 = \exp x_1$ ,  $y_2 = \exp x_2$ , 那么  $x_1 = \log y_1$ ,  $x_2 = \log y_2$ , 以及  $x_1 + x_2 = \log y_1 + \log y_2 = \log y_1 \cdot y_2$  因而

$$\exp(x_1 + x_2) = y_1 y_2 = (\exp x_1) \cdot (\exp x_2).$$

类似于 (iii) 的证明可证得(iv),

(v) 的证明能按定理5.14之 (iv) 那样归纳地证明.  
(vi) 及 (vii) 由对数的相应结果导出 (参看图5.7), 图中  $\exp x$  的图象与  $\log x$  的图象关于直线  $y = x$  对称.

(ix) 由  $\exp(r \log a) = \exp[\log(a^r)] = a^r$  根据定理5.14的(iv) 及(viii) 可得.

当  $x$  为有理数,  $a > 0$ , 分数指数的幂  $a^x$  能用初等方法定义:

$x = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  为整数),  $a^x$  是  $a$  的  $p$  次幂的  $q$  次方根. 但形如

$3^{\sqrt{2}}$ ,  $(\sqrt{7})^{\pi}$  这样的量不能用初等方法定义. 采用如下方法来把  $a^x$  的定义域由有理数域扩充为实数域.

**定义** 设 $a > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_1$ , 定义

$$a^x = \exp(x \log a).$$

注意到 $x$ 取有理数时,  $a^x = \exp(x \log a)$  即定理5.15中的(i x). 可见这里的定义是“乘幂”概念的推广.

**定理5.16** 设 $f: x \rightarrow a^x$ ,  $a > 0$ , 那么

(i)  $f$ 是 $\mathbb{R}_1$ 上定义的正值连续函数.

(ii)  $a \neq 1$ 时,  $f$ 的值域为 $I = \{x: 0 < x < +\infty\}$ .

(iii) 当 $a > 1$ ,  $f$ 递增; 当 $a < 1$ ,  $f$ 递减.

定理5.16直接由 $a^x$ 的定义及定理5.14与定理5.15导出, 请读者给出它的证明.

由定理5.16的(iii), 对 $b > 0$ ,  $b \neq 1$ ;  $x \rightarrow b^x$ 是单调函数, 存在反函数, 引入

**定义** 函数 $f: x \rightarrow b^x$  ( $b > 0, b \neq 1$ ) 的反函数称为以 $b$ 为底的对数函数, 记为 $\log_b x$ . 当 $b = 10$ , 称 $\log_{10} x$ 为常用对数.

**定理5.17** 设 $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $f: x \rightarrow a^x$ , 那么

(i)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;  $a^x / a^y = a^{x-y}$ ;

$(a^x)^y = a^{xy}$ ;  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ;  $(a/b)^x = a^x / b^x$ .

(ii)  $f'(x) = a^x \cdot \log a$ .

(iii)  $b \neq 1$ ,  $\log_b x = \log x / \log b$ .

(iv)  $b \neq 1$ , 函数 $g: x \rightarrow \log_b x$ 在 $I = \{x: 0 < x < \infty\}$ 上连续.

(v)  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ ,  $\log_b x = (\log_a x) \cdot (\log_b a)$ .

(vi)  $b \neq 1$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$ ;  
 $\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$ ;

$\log_b (x^y) = y \log_b x$ ;  $\log_b 1 = 0$ .



定义  $e = \exp 1$ .

定理5.18 关于 $e$ 有

(i)  $\log_e x = \log x, x > 0,$

(ii)  $\exp x = e^x, x \in \mathbf{R}_1.$

(iii) 设  $f: x \rightarrow x^n$ ,  $n$  为任意实数, 那么

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

注 (i)与(ii)是定义的直接推论. (iii)可由  $x^n = \exp(n \log x)$  按链法则求导得出. 在初等微积分中仅对 $n$ 是自然数或有理数证过, 现在得到了 $n$ 为实

数的一般结果. (iv)由  $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp \left[ \frac{1}{x} \log(1+x) \right]$ , 及由 $\exp$ 连续, 并且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{x} \log(1+x) \right] = 1 \text{ 得出. (iv) 表明 } x \text{ 很小时, } (1+x)^{\frac{1}{x}} \text{ 可作为 } e \text{ 的近似}$$

值. 证明的细节留给读者.

## 习 题

1. 证明定理5.16中  $f: x \rightarrow a^x$  的三条性质.
2. 证明定理5.17之(i)所述  $f: x \rightarrow a^x$  指数律.
3. 证明定理5.17之(ii)  $f'(x) = a^x \log a$ .
4. 证明定理5.18之(iii),  $n$  为实数,  $f: x \rightarrow x^n$ , 有  $f'(x) = nx^{n-1}$ .
5. 证明  $2 < e < 4$ .
6. 证明  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$  (定理5.18(iv)).

7. 若  $x > -1$ , 证明  $\log(1+x) \leq x$ .

8. 证明  $x \in \mathbb{R}_1, e^x \geq 1+x$ .

9. 证明  $F: x \rightarrow \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  是递增函数.

10. 设  $f: x \rightarrow \log x$ , 由导数定义, 可知  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \frac{1}{x}, \text{ 由此导出 } \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

## § 5.4 约当测度

现在介绍  $\mathbb{R}_2$  中有界点集的“面积”理论. 有界点集  $S$  是指可以被某一矩形包含的集, 可以设想  $S$  如图 5.8 所示,  $S$  是由曲线围成的区域. 但以下的讨论对任意的有界集都适用.

基于正方形的面积, 用正方形度量  $S$ , 逐次地提高度量的精度, 以极限的方法得到  $S$  的可测性及其面积. 在平面直角

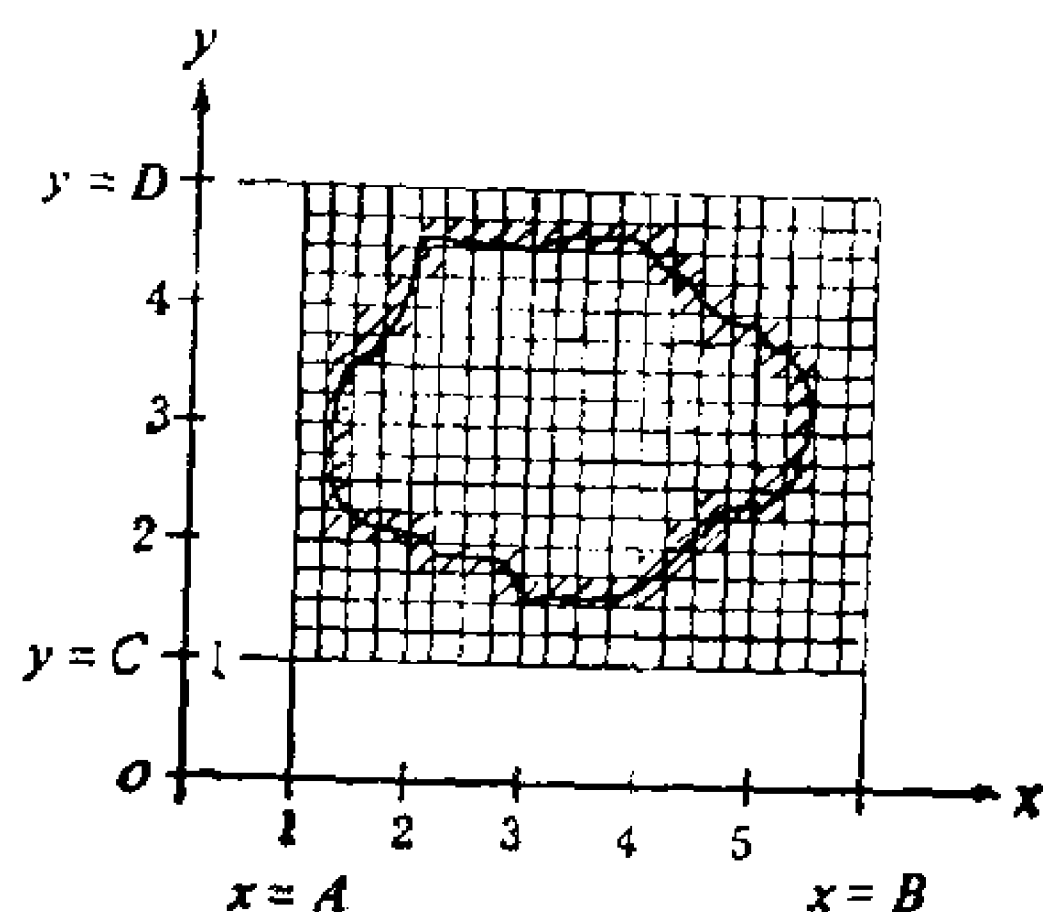


图 5.8

坐标系中, 取内部包含  $S$  的矩形  $R$ , 设  $R$  由  $x=A, x=B, y=C, y=D$  四条直线所围成, 这里  $A, B, C, D$  都取整数. 这样, 当  $(x, y) \in S$  时, 有

$$A < x < B, \quad C < y < D.$$

对每个自然数 $n$ ，画出所有的直线 $x = \frac{i}{2^n}$ ， $y = \frac{j}{2^n}$  ( $i, j$ 为整数)，这两组直线把平面划分成无穷多个边长为 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

的正方形，每个正方形的点 $(x, y)$ 满足：

$$\frac{i-1}{2^n} \leq x \leq \frac{i}{2^n}, \quad \frac{j-1}{2^n} \leq y \leq \frac{j}{2^n}. \quad (5.23)$$

**定义** 称(5.23)表示的正方形为第 $n$ 阶格的方形。包含在 $S$ 内的方形称为 $S$ 的内方形。至少含有 $S$ 的一个点的方形称之为 $S$ 的覆盖方形。

对于每一 $n$ ，显然每个单位方形（边长为1）含有 $4^n$ 个 $n$ 阶格的方形。由 $A, B, C, D$ 是整数，包含 $S$ 的矩形 $R = \{(x, y) : A \leq x \leq B, C \leq y \leq D\}$ 含有 $4^n(B-A)(D-C)$ 个 $n$ 阶格的方形。很自然，考察量

$$A_n^-(S) = \frac{1}{4^n} \text{乘} S \text{的内方形个数,}$$

$$A_n^+(S) = \frac{1}{4^n} \text{乘} S \text{的覆盖方形个数.}$$

$A_n^-(S)$ 表示 $S$ 的所有 $n$ 阶格内方形并的面积。 $A_n^+(S)$ 表示 $S$ 的所有 $n$ 阶格覆盖方形并的面积。

**引理5.2**  $S$ 的每个覆盖方形 $r$ 含于 $R$ 之内。

**证明** 设 $(x, y) \in S \cap r$ ，因此 $x, y$ 满足不等式：

$$A < x < B, \quad C < y < D,$$

$$\frac{i-1}{2^n} \leq x \leq \frac{i}{2^n}, \quad \frac{j-1}{2^n} \leq y \leq \frac{j}{2^n} \quad (i, j \text{ 为整数}).$$

于是  $\frac{i}{2^n} > A$ , 即  $i > 2^n A$ , 由  $A$  是整数, 便有  $i-1 \geq 2^n A$ ,

即  $\frac{i-1}{2^n} \geq A$ . 同理, 由  $\frac{i-1}{2^n} \leq x < B$  得  $(j-1) < 2^n \cdot B$ , 进而

$j \leq 2^n B$ . 于是

$$A \leq \frac{i-1}{2^n} < \frac{i}{2^n} \leq B.$$

同样应有

$$C \leq \frac{j-1}{2^n} < \frac{j}{2^n} \leq D,$$

所以  $r \subset R$ .

量  $A_n^-(S)$  及  $A_n^+(S)$  类似于  $S_-(f, \Delta)$  及  $S^+(f, \Delta)$ , 它们的基本性质如下:

**定理 5.19** 设  $S \subset R$ ,  $R = \{(x, y) : A < x < B, C < y < D\}$ . 那么

(a)  $0 \leq A_n^-(S) \leq A_n^+(S) \leq (B-A)(D-C)$ , 对  $\forall n$  成立.

(b)  $A_{n+1}^-(S) \geq A_n^-(S)$ .

(c)  $A_{n+1}^+(S) \leq A_n^+(S)$ .

(d) 序列  $A_n^+(S)$ ,  $A_n^-(S)$  收敛, 分别以  $A^+(S)$ ,  $A^-(S)$  表示它的极限, 且有

$$0 \leq A^-(S) \leq A^+(S) \leq (B-A)(D-C).$$

(e)  $A_n^-(S)$ ,  $A_n^+(S)$ ,  $A^-(S)$ ,  $A^+(S)$  与包含  $S$  的矩形

$R$ 的选取无关。

**证明** (a) 由引理5.3以及 $A_n^-(S)$ ,  $A_n^+(S)$ 的定义, 且 $R$ 内恰有 $4^n(B-A)(D-C)$ 个 $n$ 阶格的方形导出. (b) 若 $r$ 是 $n$ 阶格的一方形, 当 $r$ 是 $S$ 的内方形, 那么在 $n+1$ 阶格中 $r$ 被分成的四个方形都是 $S$ 的 $n+1$ 阶格的内方形. (c) 若 $r'$ 是 $(n+1)$ 阶格中 $S$ 的一覆盖方形.  $r'$ 包含 $S$ 的点 $(x, y)$ , 那么包含 $r'$ 的 $n$ 次格中的方形 $r$ 也包含 $(x, y)$ 点, 即 $r$ 是 $S$ 的一覆盖方形. 由(a), (b)及(c)可知 $A_n^-(S)$ 递增有上界,  $A_n^+(S)$ 递减有下界, 便得(d). (e)是明显的.

**定义** 数 $A^-(S)$ ,  $A^+(S)$ 分别称为 $S$ 的内面积, 外面积. 如果 $A^-(S) = A^+(S)$ , 称点集 $S$ 是约当可测图形简称图形. 定义其面积为 $A^-(S) = A^+(S)$ 的值.

当 $A^-(S) < A^+(S)$ 时, 点集 $S$ 在约当意义下没有面积. 例如,  $S = \{(x, y) : x, y \text{ 表示 } 0, 1 \text{ 之间的有理数}\}$   $S$ 不含有内方形,  $A_n^-(S) = 0$ ,  $A^-(S) = 0$ ; 很明显矩形 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 的每一 $n$ 阶格的方形都是 $S$ 的覆盖方形, 即 $A_n^+(S) = 1$ ,  $A^+(S) = 1$ .

既然不是每一有界集都是图形, 因此找出判定点集为图形的定理就是很重要的了. 为了叙述这样的定理, 先补充介绍一些有关 $R_2$ 点集的概念.

若 $S_1, S_2$ 是集, 定义 $S_1 - S_2$  (或 $S_1 \sim S_2$ ) 为不属于 $S_2$ 的 $S_1$ 的点组成的集. 点 $P_0$ 称为 $S$ 的内点 $\iff$ 它是含于 $S$ 内的某个圆的中心点.  $S$ 的全体内点的集表示为 $S^{(0)}$ . 以 $|P_1, P_2|$ 表示点 $p_1(x_1, y_1)$ 与点 $p_2(x_2, y_2)$ 之间的距离 $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ . 点 $p_0(x_0, y_0)$ 是 $S$ 的极限点 $\iff \exists$ 序列 $\{p_n(x_n, y_n)\}$ ,  $p_n \in S$ ,  $p_n \neq p_0$ , 且有 $|p_0, p_n| =$

$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \rightarrow 0$ .  $S$  与它的极限点的集的并集称为  $S$  的闭包, 记为  $\overline{S}$ . 若  $S = \overline{S}$ ,  $S$  称为闭集. 集  $\overline{S} - S^{(0)}$  称为  $S$  的边界.

**引理5.4** 设  $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  是  $R_2$  内的矩形, 那么 (i)  $R$  是闭集. (ii)  $R^{(0)} = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ .

**证明** (i) 的证明留给读者. 现证 (ii), 显然集  $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\} \subset R$ . 设  $(x_0, y_0)$  是  $R$  的一个内点, 那么  $\exists$  某一  $\rho > 0$ , 使所有满足  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2$  的点  $(x, y) \in R$ . 其中的点  $(x, y)$ ,  $x_0 - \rho \leq x \leq x_0 + \rho$  与点  $(x_0, y)$ ,  $y_0 - \rho \leq y \leq y_0 + \rho$  都属于  $R$  (图5.9). 这就表明  $a \leq x_0 - \rho < x_0 < x_0 + \rho \leq b, c \leq y_0 - \rho < y_0 < y_0 + \rho \leq d$  成立. 于是  $(x_0, y_0) \in \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ . 由  $(x_0, y_0)$  是  $R$  的任意的内点, 所以  $R^{(0)} \subset \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ . 相反的关系  $R^{(0)} \supset \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$  留作习题.

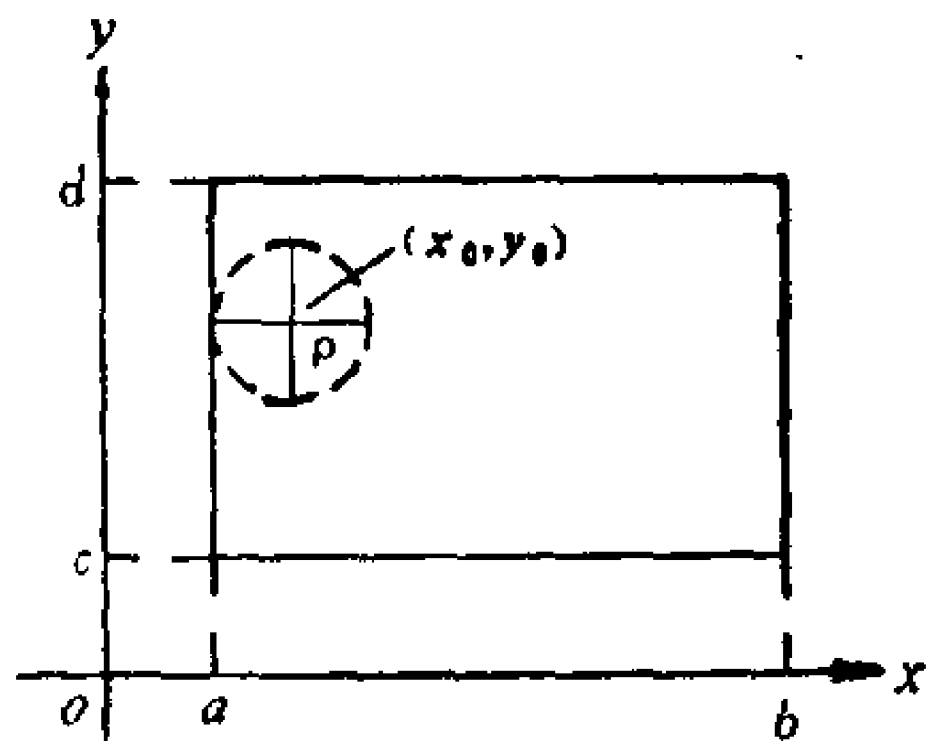


图 5.9

下面证明一些直观上很明显的关于面积性质的定理.

**定理5.20** 设  $S_1, S_2, \dots, S_p$  都是有界集.

(a) 若  $S_1 \subset S_2$ , 那么  $A^-(S_1) \leq A^-(S_2)$ ,

$A^+(S_1) \leq A^+(S_2)$ .

(b)  $A^+(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p) \leq A^+(S_1) + \dots + A^+(S_p)$ .

(c) 若任两集都没有共同内点, 那么

$$A^-(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r) \geq A^-(S_1) + \cdots + A^-(S_r).$$

(d) 若每一  $S_i$  都是图形, 那么  $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r$  是图形. 若任两集都没有共同内点, 那么

$$A(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r) = A(S_1) + A(S_2) + \cdots + A(S_r).$$

(e) 若  $R = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  是矩形, 那么  $R$  与  $R^{(0)}$  都是图形, 且

$$A(R^{(0)}) = A(R) = (b - a)(d - c).$$

**证明** (a)  $S_1$  的内方形、覆盖方形必定分别是  $S_2$  的内方形、覆盖方形. 因此对  $\forall n$ ,

$$A_n^-(S_1) \leq A_n^-(S_2), \quad A_n^+(S_1) \leq A_n^+(S_2),$$

据定理5.19及极限不等性定理得:

$$A^-(S_1) \leq A^-(S_2), \quad A^+(S_1) \leq A^+(S_2).$$

(b) 的证明留给读者.

为证(e), 设  $r$  是诸  $S_i$  中某个  $S_{i_0}$  集的内方形, 当然  $r$  是  $S_i$  的并的一内方形, 当  $i_0 \neq j$  时  $S_{i_0}$  与  $S_j$  不含有共同内点, 那么  $r$  不能是  $S_j$  的内方形 (否则,  $S_j \cap S_{i_0}$  含有共同内点). 因此,

$$A_n^-(S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r) \geq A_n^-(S_1) + \cdots + A_n^-(S_r). \quad (5.24)$$

如图5.10所示, (5.24) 式之不等号可能出现.

(d) 的证明也留给读者.

(e) 只证明  $R$  的结论,  $R^{(0)}$  的结论类似可证. 对每一  $n$ , 设  $i_n$  是满足  $i_n - 1 < a \cdot 2^n \leq i_n$  的唯一整数且定义  $a_n =$

$$\frac{i_n - 1}{2^n}, \quad a_n' = \frac{i_n}{2^n} \quad (\text{图 } 5.11). \text{ 同样定义 } b_n, b_n', c_n,$$

$c_n', d_n, d_n'$ , 使

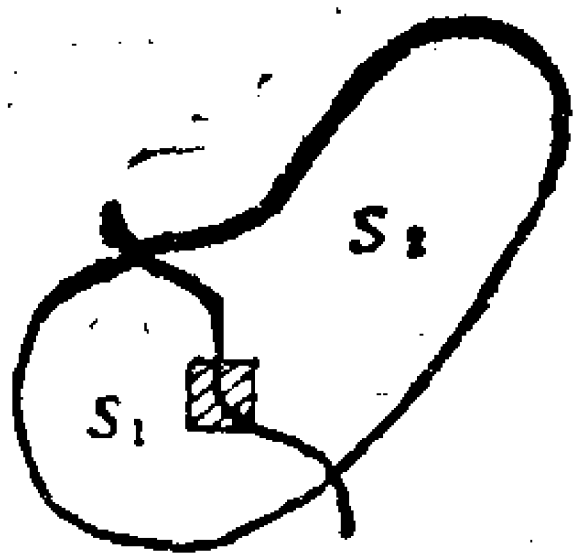


图 5.10

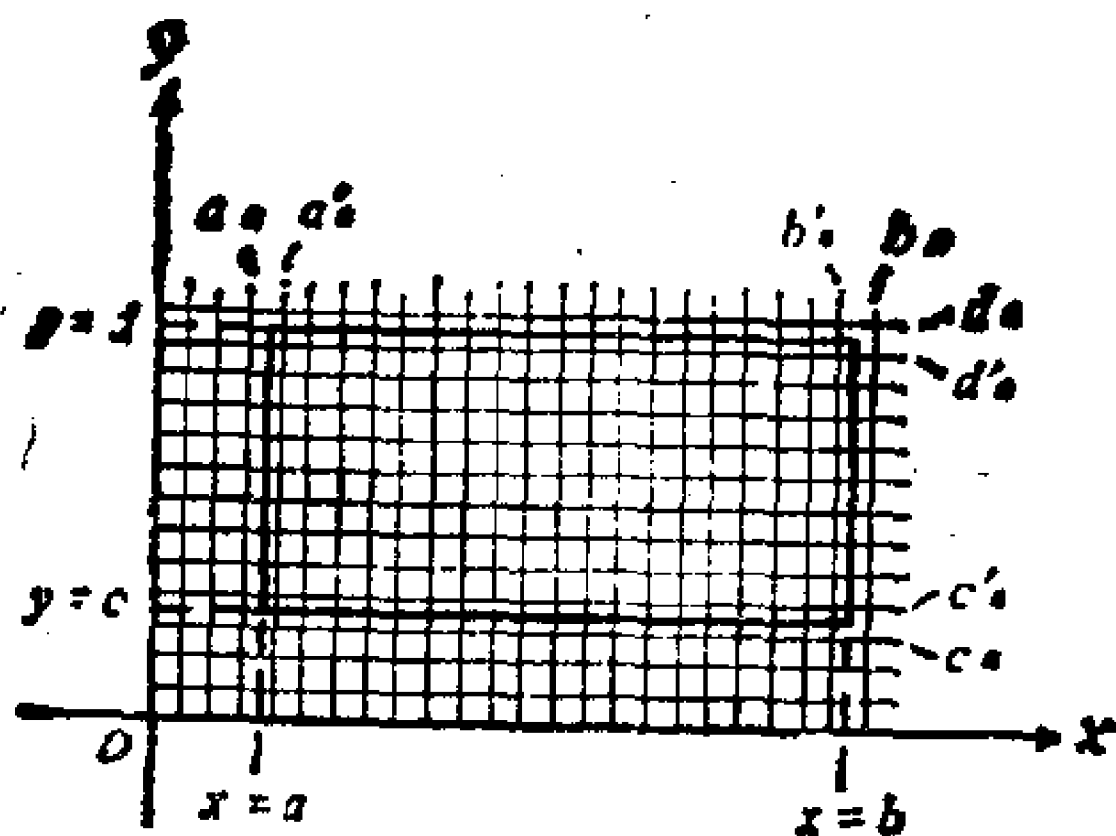


图 5.11

$$a_n < a \leq a_n', \quad b_n' \leq b < b_n,$$

$$a_n' - a_n = b_n - b_n' = \frac{1}{2^n} \dots \dots \quad (5.25)$$

R的相应的

$$\begin{aligned} A_n^-(R) &= (b_n' - a_n')(d_n' - c_n'), \\ A_n^+(R) &= (b_n - a_n)(d_n - c_n). \end{aligned} \quad (5.26)$$

由 (5.25) 可知  $a - \frac{1}{2^n} \leq a_n < a$ , 因此  $a_n \rightarrow a$ ,  $a_n' \rightarrow a$ . 同理  $b_n \rightarrow b$ ,  $b_n' \rightarrow b$ ,  $c_n \rightarrow c$ ,  $c_n' \rightarrow c$ ,  $d_n \rightarrow d$ ,  $d_n' \rightarrow d$ . 对 (5.26) 式取极限, 便得  $A^-(R) = A^+(R) = (b - a)(d - c)$ .

点集S的边界方形定义为n阶格中S的非内方形的覆盖方形。图5.8中划暗线的方形表示S的边界方形。S为图形的明显、直观的特征是图形边界的面积等于零, S边界的面积定义为  $A^+(S) - A^-(S)$ .

**引理5.5** (a) n阶格的方形r是S的边界方形  $\iff$  r既包含S的点又包含不属于S的点。



(b) 集 $S$ 是一图形 $\iff n$ 阶格的 $S$ 的边界方形并的面积随 $n \rightarrow \infty$ 趋向于零。

引理是边界方形定义及图形定义的直接推论。它的证明留给读者。

下一定理说明有限个图形的并、交还是图形。

**定理5.21** 设 $S_1, S_2, \dots, S_p$  ( $p \geq 2$ ) 都是图形, 那么 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p$ ,  $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_p$  及差  $S_1 - S_2$  都是图形。图形边界的面积等于零。

**证明** 对 $p = 2$  证明 $S_1 \cup S_2$ 是图形, 一般情况由数学归纳法得到。设 $r$ 是 $S_1 \cup S_2$ 的 $n$ 阶格的一边界方形。 $r$ 含有 $S_1 \cup S_2$ 的点 $p$ 也含有不属于 $S_1 \cup S_2$ 的点 $q$ 。 $q$ 不属于 $S_1$ , 也不属于 $S_2$ ,  $p$ 至少属于 $S_1, S_2$ 两者之一。这表明 $r$ 至少是 $S_1, S_2$ 两者之一的边界方形。于是

$$0 \leq A_n^+(S_1 \cup S_2) - A_n^-(S_1 \cup S_2) \leq (A_n^+(S_1) - A_n^-(S_1)) + (A_n^+(S_2) - A_n^-(S_2))$$

由引理 5.5 (b) 及两边夹极限定理、和的极限定理有  $A^+(S_1 \cup S_2) - A^-(S_1 \cup S_2) = 0$ , 即 $S_1 \cup S_2$ 是图形。

关于图形的交。差仍是图形的证明留给读者。

## 习 题

1. 证明引理5.4 (i) .
2. 证明引理 5.4 (ii) 中  $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\} \subset R^{(0)}$  .
3. 证明定理5.20的 (b) .
4. 证明定理5.20的 (d) .

5. 证明引理5.5.

6. 证明定理5.21中  $S_1 \cap S_2$ ,  $S_1 \setminus S_2$  是图形.

• 7. 设  $f$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上有界函数,  $\forall x \in I$ ,  $c < f(x)$ ,  $F_1 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y < f(x)\}$ ,  $F_2 = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq f(x)\}$  (图5.12), 那么

$$\int_a^b [f(x) - c] dx \leq A^-(F_1) \leq A^-(F_2),$$

$$\int_a^b [f(x) - c] dx \geq A^+(F_2) \geq A^+(F_1).$$

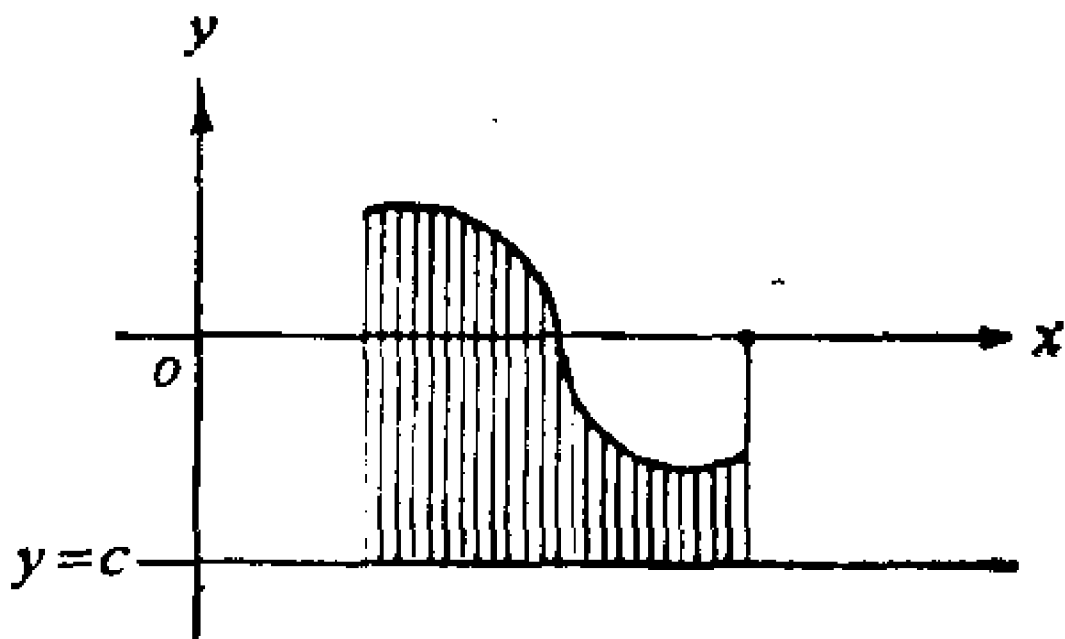


图 5.12

[提示: 定义  $g(x) = f(x) - c$ ,  $S_-(g, \Delta) \leq A^-(F_1)$ .]

8. 证明定理: 设  $f$  与  $g$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上可积,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \leq g(x)$ ,  $S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ , 那么  $S$  是图形并且

$$A(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

## 第六章 距离空间和映象

### § 6.1 许瓦兹不等式与三角形不等式,

#### 距离空间的概念

通常,数学分析下一步的任务是把 $R_1 \rightarrow R_1$ 的函数的微积分理论一步步地推广为 $R_2 \rightarrow R_1$ 、 $R_3 \rightarrow R_1$ 等多元函数的微积分理论。简捷的办法是通过引入距离空间并研究距离空间之间的映象,把 $R_2 \rightarrow R_1$ 、 $R_3 \rightarrow R_1$ 等多元函数理论作为距离空间的映象理论的特例而得到。这种处理办法既便于透彻地理解基本概念的实质,又能较早地接触到近代分析的理论,有助于弄清近代分析发展的来龙去脉。

先介绍分析中很有用的许瓦兹不等式,下面是它的一种简单形式。

**定理6.1** (许瓦兹不等式) 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  是 $R_N$ 的元素, 那么

$$\left| \sum_{i=1}^N x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

(6.1) 中等号成立 $\iff$  所有 $x_i = 0$  或 $\exists \lambda$ , 使 $y_i = \lambda x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ .

**证明** 当每一 $x_i = 0$ , (6.1) 式等号成立。现设至少有一 $x_i \neq 0$ 。由函数

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^N (y_i - \lambda x_i)^2 \geq 0$$

对一切 $\lambda$ 值成立。令

$$A = \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \quad C = \sum_{i=1}^N y_i^2,$$

那么 $A > 0$ 且 $f(\lambda) = A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geq 0$ 。显然关于 $\lambda$ 的二次函数 $f(\lambda)$ 的最小值是 $\frac{AC - B^2}{A} \geq 0$ 。因此 $AC - B^2 \geq 0$ ，即(6·1)式成立。

若 $\exists \lambda = \lambda_1$ ，使 $f(\lambda_1) = 0$ ，(6·1)式等号成立 $\iff$ 对所有 $i$ ， $y_i - \lambda_1 x_i = 0$ 即 $y_i = \lambda_1 x_i$ 。

大家都知道，在欧儿里得平面上三角形一边之长小于另两边之长的和。这一事实的一般化就是著名的三角形不等式。用许瓦兹不等式可得：

**定理6·2 (三角形不等式)** 设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ， $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  是 $R_N$ 的元素，那么

$$\left( \sum_{i=1}^N (x_i + y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6\cdot2)$$

(6·2)式中等号成立 $\iff$ 所有 $x_i = 0$ 或 $\exists$ 非负数 $\lambda_1$ ，使 $y_i = \lambda_1 x_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ 。

**证明** 对恒等式

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^N (x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2) = \sum_{i=1}^N x_i^2 +$$

$+ 2 \sum_{i=1}^N x_i y_i + \sum_{i=1}^N y_i^2$  左端的  $\sum_{i=1}^N x_i y_i$  应用许瓦兹不等式,

使得

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^N x_i^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N y_i^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^N (x_i + y_i)^2 \leq \left[ \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2.$$

将上一不等式开平方, 使得 (6·2) 式.

若所有  $x_i = 0$ , (6·2) 中等号成立. 若有某  $x_i \neq 0$ , 等号成立  $\iff$  应用定理 6·1 时, 式 (6·1) 的等号成立, 即  $\exists \lambda_1, y_i = \lambda_1 x_i$ , 为保证  $x_i y_i$  非负,  $\lambda_1$  非负

**推论** 设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ ,  $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$  是  $R_N$  的元素, 那么

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=1}^N (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left( \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^N (y_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6 \cdot 3) \end{aligned}$$

(6·3) 式中等号成立  $\iff \exists$  数  $r, 0 \leq r \leq 1$ , 使

$$y_i = r x_i + (1-r) z_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

**证明** 令  $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i, i = 1, 2, \dots, N$ . 不等式 (6·3) 化成关于  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N), b = (b_1,$

$b_2, \dots, b_N)$ 的 (6·2) 式.  $r = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$ ,  $\lambda_1$ 为定理 6·2 中的  $\lambda_1$ .

注 推论中 (6·3) 式是  $N$  维欧几里得空间中三角形的边长关系, (6·3) 式中等号成立的含意是  $x, y, z$  在同一直线上, 且  $y$  在  $x, z$  之间.

从现在起本章所讨论的集, 不限于  $\mathbf{R}_N$  中的点集. 凡能确定元素是否属于该集合的集都可作为研究对象.

**定义** 设  $S, T$  都是集.  $S$  与  $T$  的笛卡尔乘积记为  $S \times T$  是所有有序偶  $(p, q)$  的集,  $p \in S, q \in T$ . 有限个集  $S_1, S_2, \dots, S_N$  的笛卡尔乘积是  $N$  元序组  $(P_1, P_2, \dots, P_N)$  的集,  $P_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 记为  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ .

### 例

(1) 空间  $\mathbf{R}_N$  是  $N$  个  $\mathbf{R}_1$  的笛卡尔乘积  $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_1 \times \dots \times \mathbf{R}_1$ .

(2)  $I_1 = \{x : a \leq x \leq b\}, I_2 = \{y : c \leq y \leq d\}$  的笛卡尔乘积  $I_1 \times I_2$  是矩形  $T = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , 即  $T = I_1 \times I_2$ .

(3) 圆周  $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  与  $\mathbf{R}_1$  的笛卡尔乘积是  $\mathbf{R}_3$  中的正圆柱面  $U$ :

$$U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, -\infty < z < \infty\} = C \times \mathbf{R}_1.$$

**定义** 设  $S$  是非空集,  $d$  是由  $S \times S$  到  $\mathbf{R}_1$  的函数.  $S$  与  $d$  构成一个距离空间, 如果函数  $d$  满足下列条件:

(i)  $(x, y) \in S \times S, d(x, y) \geq 0$ ;

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

(ii)  $d(y, x) = d(x, y), (x, y) \in S \times S$ .

(iii)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), x, y, z$  是  $S$  的元素.

函数  $d$  称为  $S$  内的距离函数. 距离空间由偶  $(S, d)$  组成.

距离空间的例子:

(1) 在空间  $R_N$  内 选取  $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ,

$x, y \in R_N$ . 函数  $d$  是距离. 事实上条件 (i), (ii) 显然, (iii) 即定理 6.2 的推论. 因此偶  $(R_N, d)$  是距离空间,  $d$  是欧几里得距离.

(2) 在空间  $R_N$  中选取  $d_1$

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq N} |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_N),$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$$

可以验证  $d_1$  是距离函数,  $(R_N, d_1)$  是一距离空间. 要注意  $(R_N, d_1)$  与例 (1) 之  $(R_N, d)$  是不同的.

(3) 设  $S$  是非空集. 定义

$$\bar{d}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

显然  $\bar{d}$  满足距离的三条,  $(S, \bar{d})$  是距离空间. 这一例子说明任意的集总可以定义一距离, 使之成为距离空间. 当一个集或说一个空间, 伴之一个距离使它成为距离空间, 就说这个集或空间被距离化. 象伴之  $\bar{d}$  这样的距离. 仅能反映集中两个点是否重合, 它几乎没有实际用处.

(4) 设  $C_{[0; 1]}$  是定义在  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  上的实值连续函数的集, 对于  $f, g \in C_{[0; 1]}$ , 定义

$$d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|,$$

不难验证  $d$  是距离. 因此  $(C_{[0; 1]}, d)$  是距离空间.

上述例子 (1), (2), (3) 说明对给定的集可能

有多种方法使之距离化. 设  $S$  是集,  $(S, d_1)$  与  $(S, d_2)$  都是距离空间, 称  $d_1$  与  $d_2$  等价  $\Leftrightarrow \exists$  正数  $c_1, c_2$  使

$$c_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y) \quad (x, y) \in S \times S.$$

不难证明例 (1) 与 (2) 中  $d$  与  $d_1$  等价. 若于  $\mathbf{R}_N$  中取例 (3) 的  $\bar{d}$  使  $\mathbf{R}_N$  距离化,  $\bar{d}$  与  $d$  或  $d_1$  不等价.

### 习 题

1. 证明例 (2) 中  $d_1$  是  $\mathbf{R}_N$  上的距离.

\*2. 设  $(S, d)$  是距离空间,  $x, y \in S$  定义  $d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ,

证明  $(S, d_1)$  是距离空间. [提示: 研究  $x \rightarrow \frac{x}{1+x}$ ,  $0 \leq x$ .]

3. 判定  $\mathbf{R}_N$  上距离  $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  与  $d'(x, y) =$

$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$  是否等价?

4. 证明例 (1), (2) 中距离  $d$  与  $d_1$  是等价的.

5. 证明  $(\mathbf{R}_N, d_2)$  是一距离空间, 这里  $d_2(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|$ ,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ .  $d_2$  与习题 1 之  $d_1$  等价否?

6. 证明于  $C_{[0;1]}$  中选取的  $d(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$  是距离.

7. 证明于  $C_{[0;1]}$  中选取的  $\bar{d}(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$  是



距离。

•8. 设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$  且

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \text{ 与 } \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \text{ 都收敛。}$$

证明级数  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i|$  收敛且有许瓦兹不等式

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

9. 设  $x, y$  如习题8所设. 证明  $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2$  收敛并有三角形

不等式

$$\left( \sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

(6.5) 式中等号成立  $\iff x=0$  或  $\exists \lambda \geq 0$ , 使  $y_i = \lambda x_i$ ,  $i=1, 2, \dots$ .

10. 设  $l_2 = \{x : x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \text{ 收敛} \}$ . 定义

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in l_2.$$

证明  $(l_2, d)$  是距离空间. [提示: 用习题9的结果.]

11. 设  $M = \{x : x = (x_1, x_2, \dots), x \text{ 为有界序列} \}$ , 定义

$$d(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|, \quad x = (x_1, x_2, \dots), \quad y = (y_1, y_2, \dots)$$

证明  $(M, d)$  是距离空间。

12. 设  $B = \{x : x = (x_1, x_2, \dots), \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \text{ 收敛} \}$ . 定义

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|, \quad x, y \in B.$$

证明  $(B, d)$  是距离空间。

13. 设  $C = \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  定义

$$d^*(p_1, p_2) = |\theta_1 - \theta_2|, \quad p_1 = (\cos\theta_1, \sin\theta_1),$$

$$p_2 = (\cos\theta_2, \sin\theta_2).$$

证明  $(C, d^*)$  是距离空间；若  $d_1$  如例 (1) 中定义的距离， $(C, d_1)$  是距离空间， $d^*$  与  $d_1$  是否等价？

\*14. 设  $S$  是非空集， $d$  是  $S \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$  的非负实函数且具有性质：

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(ii) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y) \quad x, y, z \in S.$$

证明  $d$  是距离函数。

## § 6.2 点集拓扑基础

直观上自然地想象距离空间如同欧几里得的平面或三维空间一样。这样的几何直观对于启发思路是很有益的，但是重要的是要识别哪些欧几里得几何的定义、定理。能够推广到一般距离空间，哪些对一般的距离空间不适用。本节研究距离空间的一些基本性质。

为了方便起见, 仅用字母  $S$  表示距离空间, 认为  $S$  有一相伴的距离  $d$ .

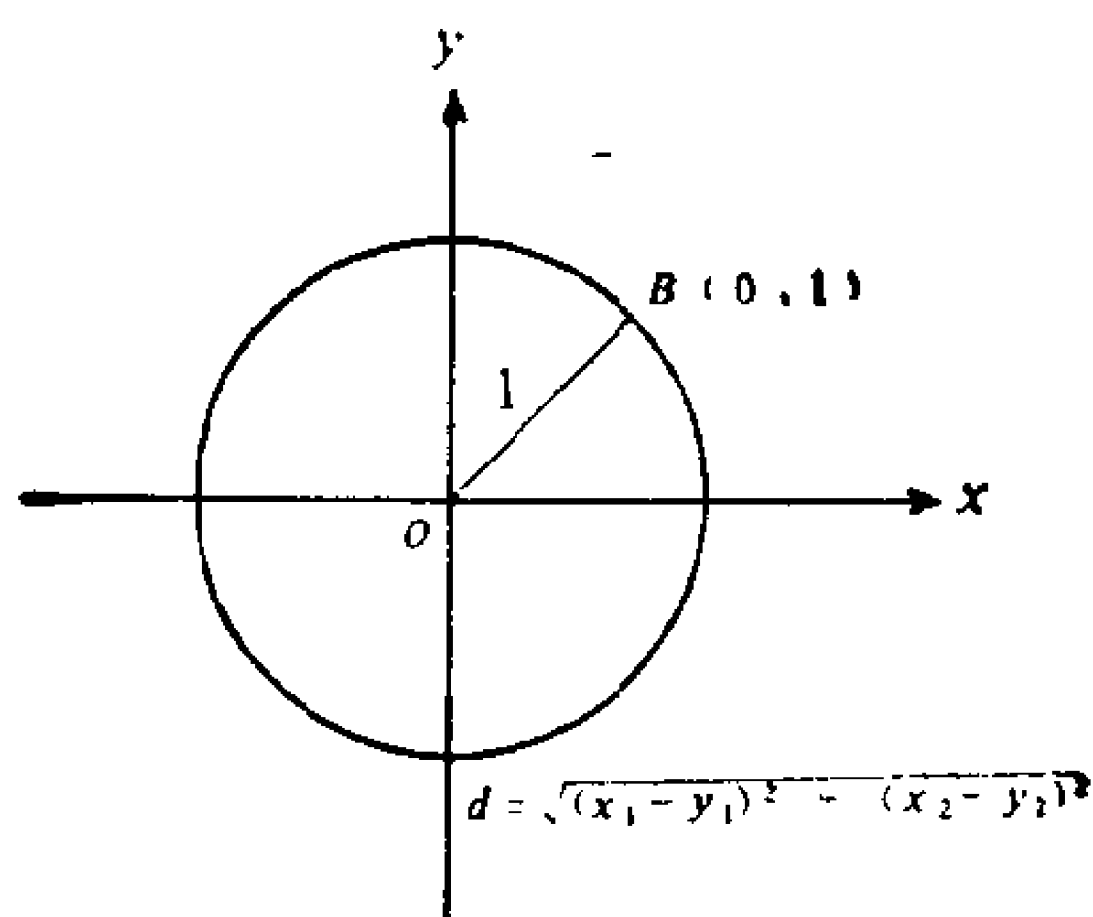
**定义**  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  表示距离空间元素的序列, 记为  $\{P_n\}$ ,  $P_0 \in S$ . 称当  $n \rightarrow \infty$  时  $P_n$  趋向于  $P_0 \iff d(P_n, P_0) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ), 表示为  $P_n \rightarrow P_0$ , ( $n \rightarrow \infty$ ) 或  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$ . 也说序列  $\{P_n\}$  收敛于  $P_0$ .

**定理6·3 (极限唯一性)** 设  $\{p_n\}$  是距离空间  $S$  的序列,  $\bar{p}, \bar{q} \in S$ . 若当  $n \rightarrow \infty$  时,  $p_n \rightarrow \bar{p}$  及  $p_n \rightarrow \bar{q}$ , 那么  $\bar{p} = \bar{q}$ .

**证明** 由距离条件(iii), 有  $0 \leq d(\bar{p}, \bar{q}) \leq d(p_n, \bar{p}) + d(p_n, \bar{q})$ , 令  $n \rightarrow \infty$ , 便得  $d(\bar{p}, \bar{q}) = 0$ . 据距离条件(i),  $\bar{p} = \bar{q}$ .

**定义** 设  $P_0 \in S$ ,  $r$  为一正数, 称集  $B(P_0, r) = \{P \in S : d(P, P_0) < r\}$  为以  $P_0$  为中心,  $r$  为半径的开球.  $\overline{B(P_0, r)} = \{P \in S : d(P, P_0) \leq r\}$  为以  $P_0$  为中心  $r$  为半径的闭球.

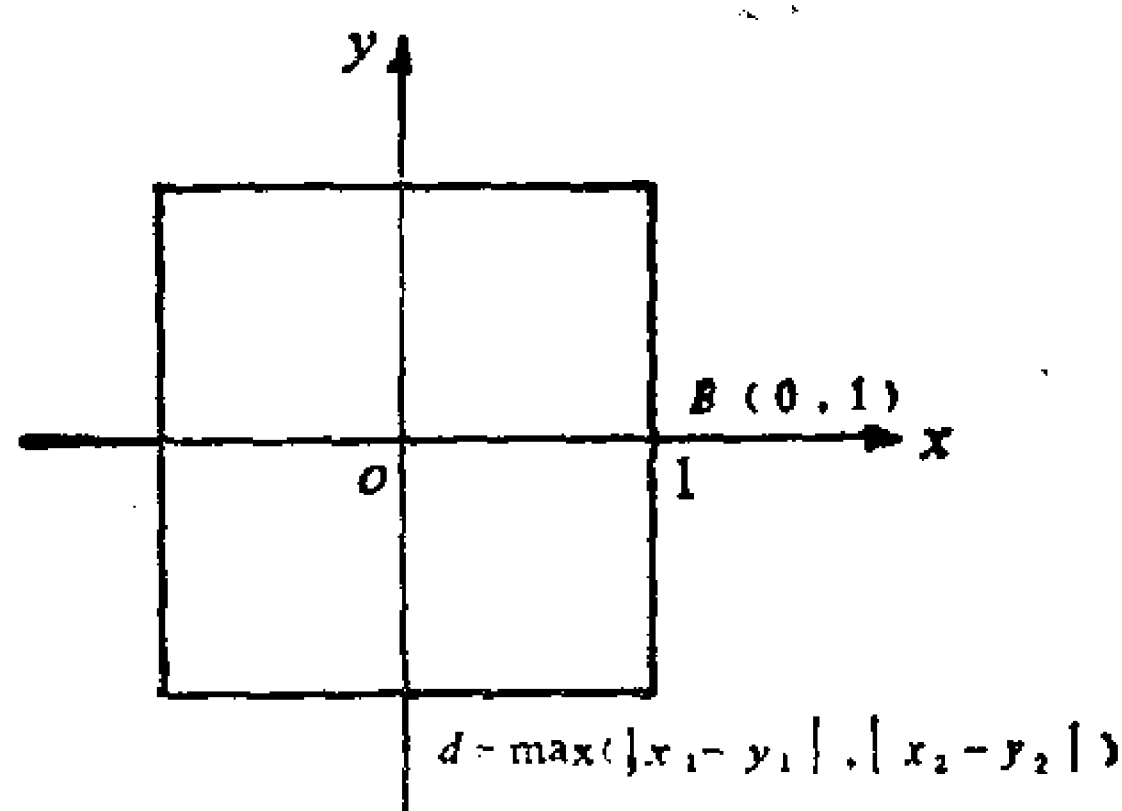
图6·1所示是  $\mathbf{R}_2$  以  $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^2 (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  为距离的



以  $(0, 0)$  为中心, 1 为半径的开球  $B(0, 1)$ .  
边界圆周不在  $B(0, 1)$  内.

图 6·1

空间中， $(0,0)$  作中心，1 作半径的开球。图6·2表示以



以  $(0,0)$  为中心，1 为半径的开球  $B(0,1)$ 。  
边界方形四边不在  $B(0,1)$  内。

图 6·2

$d(x,y) = \max_{1 \leq i \leq 2} |x_i - y_i|$  为距离的  $R_2$  中， $(0,0)$  作中心，1 作半径的开球（两者都不含边界）。

图6·1及6·2说明对距离空间用几何直观应当小心。再

如在  $R_2$  中取距离函数  $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x=y \\ 1 & \text{当 } x \neq y \end{cases}$  半径小于1的开球

仅含有中心点一个点，而半径大于1的任何开球包含整个空间！

**定义** 设  $A \subset S$ ,  $P_0 \in A$  称  $P_0$  为  $A$  的孤立点  $\iff \exists r > 0$ , 使开球  $B(P_0, r)$  仅含有  $A$  的一个点  $P_0$ , 即

$$B(P_0, r) \cap A = \{P_0\}. \quad (\{P_0\} \text{ 表含单一元素 } P_0 \text{ 的集})$$

例如具有欧几里得距离的  $R_1$  的集  $A$ ,  $A = \{x : 1 \leq x \leq 2, x = 3, 4\}$  的元素 3, 4 都是  $A$  的孤立点。而  $1 \leq x \leq 2$  区间中的点都不是  $A$  的孤立点。

**定义** 点  $P_0$  称为集  $A$  的极限点  $\iff$  对每一  $r > 0$   $B(P_0, r)$  内含有不同于  $P_0$  的  $A$  的点。  $P_0$  可以不属于  $A$ 。

例如以通常距离 $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ 的 $\mathbf{R}_1$ , 集 $C = \{x : 1 \leq x < 3\}$ 的每一点是它的极限点,  $x = 3$ 也是 $C$ 的极限点.

**定义**  $A \subset S$ 称为闭集 $\iff A$ 包含它的每个极限点.

一集 $A$ 称为开集 $\iff A$ 的每个点 $P_0$ 是包含在 $A$ 内的某开球 $B(p_0, r)$ 的中心点. 即 $\exists r > 0, B(p_0, r) \subset A$ .

注意开集定义中开球 $B(p_0, r)$ 的 $r$ 因点而异.

**定理6·4** 点 $P_0$ 是集 $A$ 的极限点 $\iff \exists \{p_n\} \subset A, p_n \neq p_0, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ .

**证明** (a) 若定理中的序列存在, 显然每一 $B(p_0, r)$ 含有异于 $P_0$ 的 $\{p_n\}$ 中的点, 而 $\{p_n\} \subset A$ ,  $B(p_0, r)$ 含有 $A$ 中异于 $p_0$ 的点, 所以 $P_0$ 是 $A$ 的极限点.

(b) 若 $P_0$ 是 $A$ 的极限点. 构造具有所说性质的序列. 由极限点定义, 开球 $B(p_0, \frac{1}{2})$ 含有点 $p_1 \in A, p_1 \neq p_0$ . 取 $r_2 = \frac{1}{2}d(p_0, p_1)$ , 开球 $B(p_0, r_2)$ 含有点 $p_2 \in A, p_2 \neq p_0$ , 再取 $r_3 = \frac{1}{2}d(p_0, p_2)$ , 开球 $B(p_0, r_3)$ 含有点 $p_3 \in A, p_3 \neq p_0$ , 继续这一过程, 得序列 $\{p_n\} \subset A, p_n \neq p_0$ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $r_n < \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ . 而 $d(p_0, p_n) < r_n$ , 可知 $p_n \rightarrow p_0$ .

在§5·4中曾对 $\mathbf{R}_2$ 中的集以序列 $\{p_n\}$ 的术语定义极限点, 定理6·4说明分别用“序列”或“开球”所给出的极限点定义是等价的.

**定理6·5** (a) 开球是开集.

(b) 闭球是闭集.

**证明** (a) 设 $B(p_0, r)$ 是开球,  $\forall q \in B(p_0, r)$ . 应证

明  $\exists$  开球  $B(p, \bar{r}) \subset B(p_0, r)$ . 令  $\bar{r}_1 = d(p_0, q)$ , 研究以  $q$  为中心以  $\bar{r} = \frac{1}{2}(r - r_1)$  为半径的球  $B(q, \bar{r})$

(图6·3). 设  $q' \in B(q, \bar{r})$ , 为了证明  $q' \in B(p_0, r)$ , 只要证明  $d(p_0, q') < r$  即可. 事实上

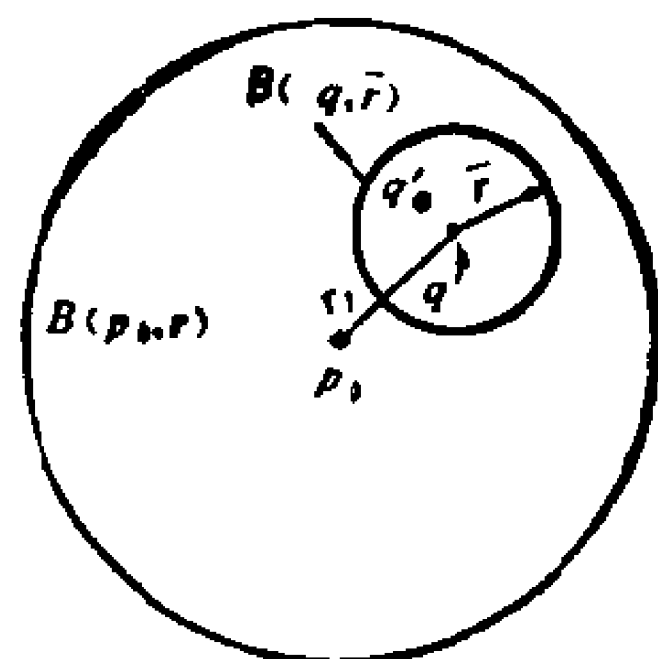


图 6·3

$$d(p_0, q') \leq d(p_0, q) + d(q, q')$$

$$< r_1 + \bar{r} = r_1 + \frac{1}{2}(r - r_1) = \frac{1}{2}(r + r_1) < r.$$

(b) 应当证明  $\overline{B(p_0, r)}$  包含它的每个极限点. 设  $q$  是  $\overline{B(p_0, r)}$  的极限点, 存在序列  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots, p_n \in \overline{B(p_0, r)}$ , 使  $d(p_n, q) \rightarrow 0$ . 可是对每一  $n$  都有  $d(p_n, p_0) \leq r$ . 所以

$$d(q, p_0) \leq d(q, p_n) + d(p_n, p_0) \leq d(q, p_n) + r.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 由不等式的极限定理有  $d(q, p_0) \leq r$ , 即  $q \in \overline{B(p_0, r)}$ .

注 图6·3从直观上帮助导出定理6·5的证明. 但是必须注意定理的证明完全是分析论证.

$S$ 是元素的空间, 意味着 $S$ 是所研究的全体元素的集. 说一个点集, 则是指 $S$ 的子集. 今后常常需要研究以若干点集为元素的集, 这样的集称为集族. 即集族是 $S$ 的若干子集的族以花体字母 $\mathcal{S}$ 表示. 若 $\mathcal{S}$ 是有限个集的族称为有限集族, 它可表示成 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ .

**定义** 设 $\mathcal{S}$ 是诸点集 $A$ 的族,  $A \subset S$ ,  $S$ 为距离空间. 定义 $\mathcal{S}$ 的集的并

$$\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = \{p : p \in S, p \text{ 至少属于 } \mathcal{S} \text{ 的一个集 } A\}.$$

定义  $\mathcal{F}$  的集之交

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{p : p \in S, p \text{ 属于 } \mathcal{F} \text{ 的每个集} \}.$$

若  $A, B$  是  $S$  的点集, 定义  $B$  与  $A$  的差

$$B - A = \{p : p \in B \text{ 且 } p \notin A\}.$$

若  $A$  是  $S$  的一点集, 定义  $A$  的余集  $\mathcal{C}(A)$  为

$$\mathcal{C}(A) = S - A.$$

定理 6·6 (迪·摩根公式) 设  $S$  是一空间,  $\mathcal{F}$  是一族, 那么

$$(a) \mathcal{C} \left[ \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right] = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A).$$

$$(b) \mathcal{C} \left[ \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A \right] = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A).$$

证明 (a) 使用证明两个集相等的典型方法, 证明  $A \subset B$  及  $B \subset A$  都成立. 设  $p \in \mathcal{C} \left[ \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right]$ , 即  $p$  不属于  $\mathcal{F}$  的集的

并. 因此  $p$  属于每一  $\mathcal{C}(A)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , 即  $p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A)$ .

于是得到  $\mathcal{C} \left[ \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right] \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A)$ . 再设  $p \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A)$ ,

把以上推理倒过来便得  $p \in \mathcal{C} \left[ \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right]$ , 于是  $\bigcap_{A \in \mathcal{F}} \mathcal{C}(A) \subset$

$$\mathcal{C} \left[ \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right].$$

类似可证 (b), 把它留给读者.

注 定理 6·6 并未涉及距离,  $S$  可以是任何集.

**定理6·7** 距离空间中开集具有性质:

(a) 开集族 $\mathcal{F}$ 的并是开集.

(b) 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是有限个开集, 那么 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 是开集.

**证明** (a) 设 $p \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ , 那么 $p$ 至少属于一个集 $A \in \mathcal{F}$ .

因为 $A$ 是开的,  $\exists$  开球 $B(p, r) \subset A$ . 因而 $B(p, r) \subset \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ . 即

$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ 的每一点 $p$ 是含于它的开球 $B(p, r)$ 的中心, 由定义

$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ 是开集.

(b) 设 $p \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ , 那么对每一 $i$ ,  $\exists$  一开球 $B(p, r_i) \subset A_i$ .

定义 $\bar{r} = \min(r_1, r_2, \dots, r_n)$ , 开球 $B(p, \bar{r})$ 含于每

一 $A_i$ 内, 因而 $B(p, \bar{r}) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ , 于是 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 是开集.

**注** 定理6·7 (b) 开集为有限个的限制条件不能去掉. 例如赋予通常欧几里得距离的 $R^2$ 的集族 $\{A_K\}$ ,  $A_K = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2$

$< \frac{1}{K}\}$ . 每一 $A_K$ 是开球, 但其交 $\bigcap_{K=1}^{\infty} A_K$ 仅由

唯一点组成, 显然不是开集 (图6·4).

**定理6·8** (a) 设 $A$ 是距离空间 $S$ 的集,  $A$ 为闭集  $\iff \mathcal{C}(A)$

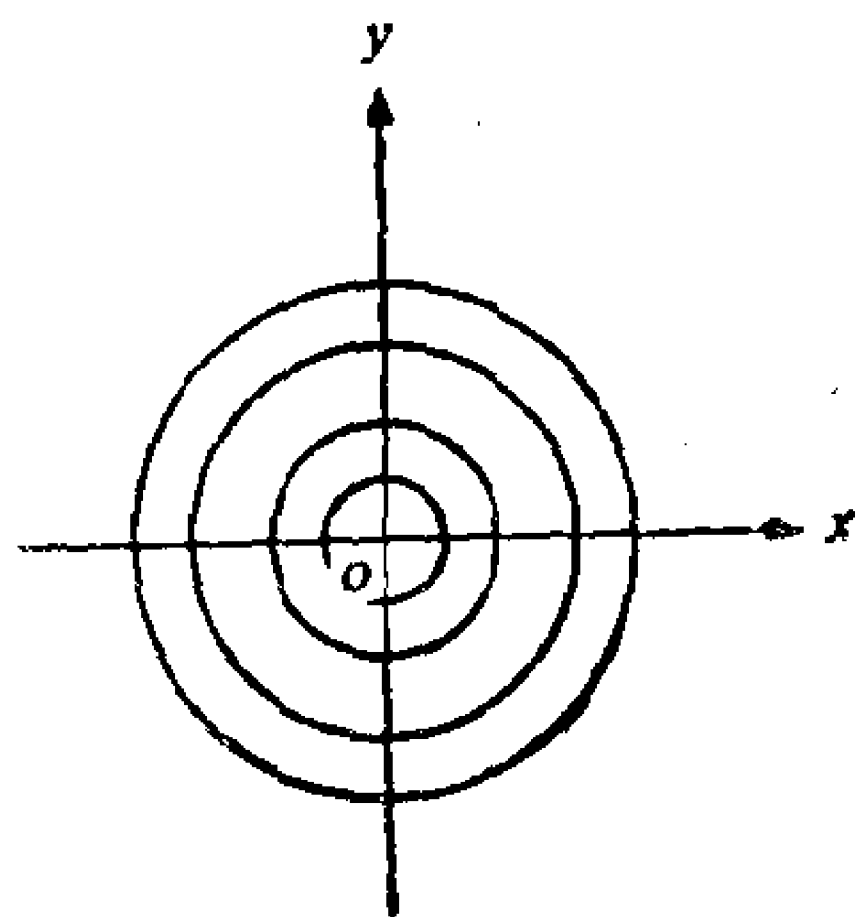


图 6·4



是开集。

(b) 空间 $S$ 是既开且闭的集。

(c) 空集是既开且闭的集。

**证明** (a) 假定 $A$ 为闭集, 证明  $\mathcal{C}(A)$  是开集. 设  $p \in \mathcal{C}(A)$  且  $\bar{\mathcal{B}}$  以  $p$  为中心含于  $\mathcal{C}(A)$  的开球. 那么以  $p$  为中心的开球含有  $A$  的点 (因为  $p \in \mathcal{C}(A)$ ,  $A$  的点异于  $p$ ). 这表明  $p$  是  $A$  的极限点. 但  $A$  是闭集, 断定  $p \in A$ , 矛盾. 于是  $\bar{\mathcal{B}}$  以  $p$  为中心的开球含于  $\mathcal{C}(A)$  内, 即  $\mathcal{C}(A)$  是开集.

反之, 当  $A$  是开的, 则  $\mathcal{C}(A)$  是闭的. 证明留给读者.

(b) 由开集、闭集定义, 即得  $S$  是既开且闭的集. 由此及 (a) 立即得 (c).

**定理6·9** 距离空间 $S$ 的闭集具有性质:

(a) 闭集族的交集是闭集.

(b) 有限个闭集的族  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  的并  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  是闭集.

集.

这是迪·摩根公式及定理6·7、6·8的直接推论, 细节留给读者. 定理6·9之 (b) “有限个”的限制不能去掉. 读者容易给出无限个闭集其并非闭的例子.

**定义** 设  $\{P_n\}$  是点的无限序列. 一无限序列  $\{q_n\}$  称为  $\{P_n\}$  的子列  $\iff \exists$  自然数递增序列  $\{K_n\}$  使对  $\forall n$ , 有  $q_n = P_{K_n}$ .

子列的下标  $K_n \geq n$ , 这一事实可用归纳法证明. 点列的子列概念是 §3·3 中实数序列、子序列概念的一般化.

**定理6·10** 设  $\{P_n\}$  是距离空间 $S$ 内的序列,  $\{q_n\}$  是它

的子序列。若  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p_0$ .

**证明** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由收敛定义,  $\exists$  自然数  $N$  使  $n > N$ , 有  $d(p_n, p_0) < \varepsilon$ . 但对  $\forall n$ ,  $q_n = p_{K_n}$ ,  $K_n \geq n$ . 于是对  $n > N$ , 有

$$d(q_n, p_0) = d(p_{K_n}, p_0) < \varepsilon.$$

由收敛定义  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = p_0$ .

**注** 定理6·9(b)也可用闭集定义直接地证明, 为此要用定理6·10的结果.

**定义** 距离空间的点  $p$  称为集  $A$  的内点  $\iff \exists r > 0$ , 使  $B(p, r) \subset A$ .  $A$  的所有内点的集称为  $A$  的内部记为  $A^{(0)}$ . 集  $A$  的所有极限点的集称为  $A$  的导集记为  $A'$ .  $A \cup A'$  称为  $A$  的闭包, 记为  $\overline{A}$ . 集  $\overline{A} - A^{(0)}$  称为  $A$  的边界, 记为  $\partial A$ .

**例** 设  $A$  是欧几里得  $\mathbf{R}_2$  的集  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $A$  的点都是内点,  $A = A^{(0)}$ .  $A = A^{(0)}$  是开集的特征.  $\overline{A}$  是闭圆盘  $\overline{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .  $A$  的边界  $\partial A$  是圆周  $\partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ .  $A$  的导集  $A' = \overline{A}$ .

**定理6·11** 设  $A$  是距离空间的集, 那么

(a)  $A'$  是闭集.

(b)  $\overline{A}$  是闭集.

(c)  $\partial A$  是闭集.

(d)  $A^{(0)}$  是开集.

(e) 当  $A \subset B$ , 若  $B$  是闭集, 那么  $\overline{A} \subset B$ .

定理6·11的证明留给读者.

## 习 题

1. 设在距离空间  $S$  内  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0$ , 对  $\forall n$ ,

$d(p, q) < a$ , 证明  $d(p_0, q_0) \leq a$ .

2. 若  $R_2$  赋予距离  $d(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ ,  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ .

画出以  $(0, 0)$  为中心半径为1的球.

3. 若  $R_1$  赋予距离  $d(x, y) = |x - y|$ , 举出一不开不闭的集.

4.  $R_1$  赋予距离  $d(x, y) = |x - y|$ , 证明有限点集的每个点是孤立点. 每个点是孤立点的集是否有限?

\*5. 举出  $R_1$  中一个恰有4个极限点的集.

6. 设  $A = \{x : 0 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \text{ 是有理数}\}$ ,  $A \subset R_1$  求  $\overline{A}$ .

7. 设欧几里得空间  $R_2$ . 证  $S = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$  是开集. 求  $S^{(0)}$ ,  $S'$ ,  $\partial S$ ,  $\overline{S}$ ,  $\mathcal{C}(S)$ .

8. 证明迪·摩根公式的 (b) (定理6·6).

9. 设  $A, B, C$  都是空间  $S$  的集, 证明

$$(a) \mathcal{C}(A - B) = B \cup \mathcal{C}(A),$$

$$(b) A - (A - B) = A \cap B$$

$$(c) A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C).$$

$$(d) A \cup (B - A) = A \cup B.$$

$$(e) (A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C.$$

\*10. 于欧几里得空间  $R_2$  求一族  $\{A_n\}$ ,  $A_n$  为开集使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{B(0, 1)}.$$

11. 证明: 当  $\mathcal{C}(A)$  是开集那么  $A$  是闭集 (定理6·8).

12. 证明定理6·9

13. 用闭集定义直接证明闭集族的交是闭集.

\*14. 设  $f$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续函数, 且  $\forall x \in I, f(x) >$

0,  $S = \{(x, y) \in R_2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} R_1$ ,  $R_2$  按通常距离, 证明  $S$  是闭集并求  $S'$ ,  $\overline{S}$ ,  $S^{(0)}$ ,  $\partial S$ .

15. 证明定理 6.11.

### § 6.3 可列集

当  $A, B$  都是有限个元素的集, 容易用配对的方法比较它们元素数的多少. 如果  $A, B$  之间恰好配对, 即能 1—1 对应,  $A, B$  的元素数相等. 如果配对完了尚有一集, 如  $A$  还有余下来被配对的元素, 就说  $A$  的元素数多于  $B$  的元素数. 仿此, 以 1—1 对应的办法进行两无限集间的配对, 出乎预料的是无限集都能与它的真子集配对. 例如  $N = \{n: n \text{ 是自然数}\}$ ,  $N_2 = \{2n: n \text{ 是自然数}\}$ , 我们以  $(n, 2n)$  配对,  $N$  与  $N_2$  可以 1—1 对应! 关于无限集理论更深奥的研究, 获得了发展数学分析的有用的工具. 本节主要研究  $R_N$  中的无限集的基本性质, 有些定义、定理对一般元素的集也成立.

**定义** 集  $S$  是可列的  $\iff \exists$  使  $S$  到自然数集  $N$  上的 1—1 的对应. 一集  $S$  称为可数的  $\iff S$  是有限集或可列集.

“可列集”顾名思义是元素可如自然数集那样“排列”, 也即可用自然数为下标写成  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ .

**定理 6.12** 自然数的非空子集是可数的. 可数集的子集是可数的.

**证明** 设  $S$  是自然数集  $N$  的非空子集. 根据自然数的良序性 (定理 1.30),  $S$  有最小元素  $K_1$ . 若  $S = \{K_1\}$ ,  $S$  是有限集, 定理成立. 不然,  $S - \{K_1\}$  不空它有最小元素  $K_2$ , 继续这一步骤, 若在某个  $n$  步后集  $S - \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  成为空

集,  $S$  是含  $n$  个元素的有限集, 定理成立. 否则,  $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$  是无限的. 我们来证明  $S = \{K_1, K_2, \dots, K_n, \dots\}$ . 若  $\exists S$  的元素不在  $\{K_n\}$  之中. 这种元素有最小的, 以  $p$  表示. 按  $K_1$  的定义它是  $S$  中最小元素,  $p \in S$ , 应有  $K_1 \leq p$ . 设  $T$  是  $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$  中满足  $K_i \leq p$  的那些数  $K_i$  的集. 因  $p$  是自然数, 所以  $T$  是有限集, 且  $\exists i$ , 使  $K_i \leq p < K_{i+1}$ . 因  $p \notin \{K_n\}$ , 所以  $K_i < p < K_{i+1}$ . 按  $K_{i+1}$  定义, 它是  $S$  中大于  $K_1, K_2, \dots, K_i$  的最小元素, 又  $p \in S$ ,  $p$  不能小于  $K_{i+1}$ , 这与  $p < K_{i+1}$  矛盾. 即  $S = \{K_1, K_2, \dots, K_n, \dots\}$  是可列的.

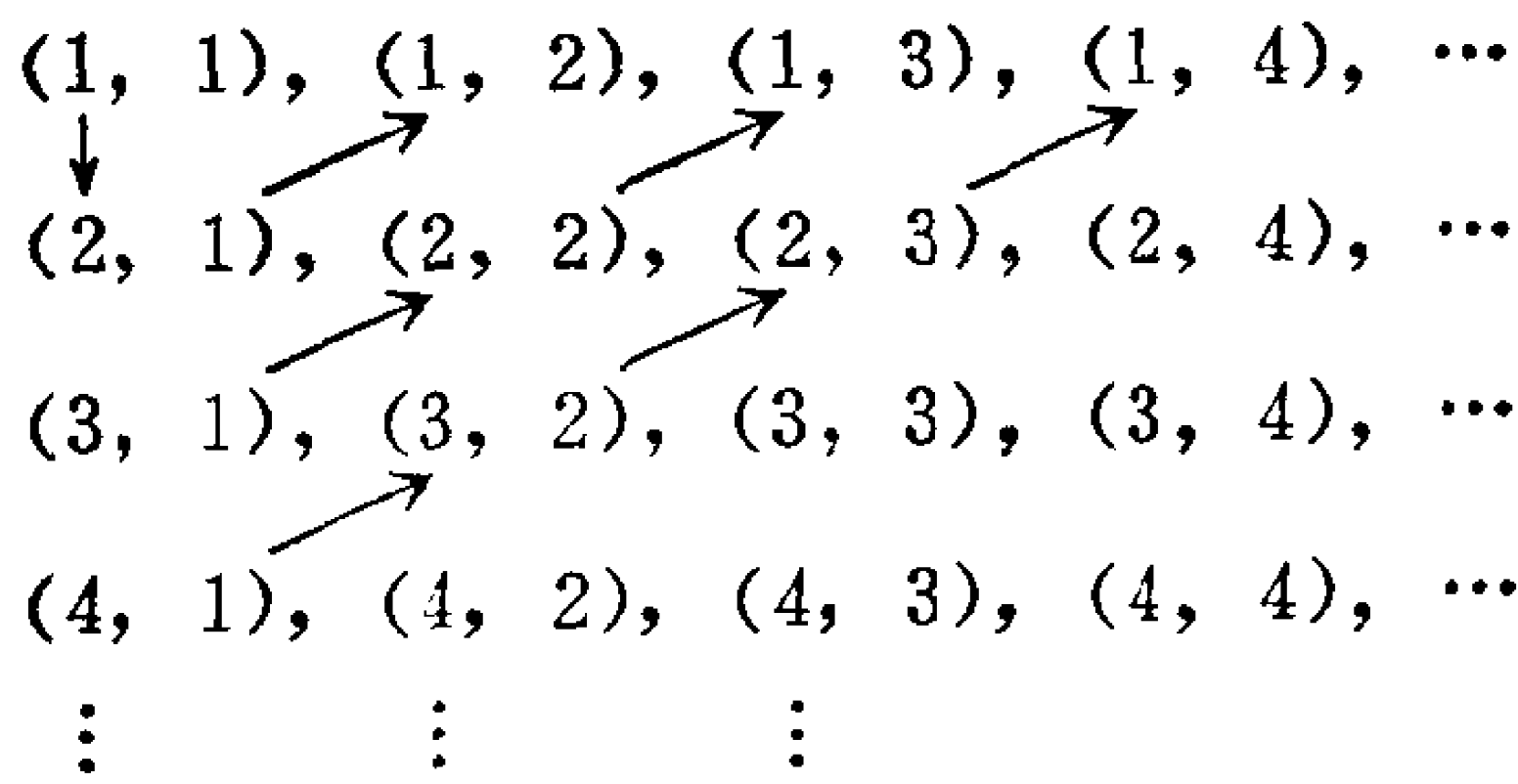
定理的第二判断是前者的直接推论.

**定理6·13** 可数集的可列族的并是可数集.

**证明** 设  $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots$  的每个集  $S_m$  是可数集. 现证

$\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = S$  是可数集. 对固定的  $m$ ,  $S_m$  可与序偶  $(m, 1), (m, 2),$

$\dots, (m, n), \dots$  的一部分或全部 1—1 相对应. 因此  $S$  可与全部或部分自然数序偶  $(m, n)$  建立 1—1 对应. 由定理 6·12, 只要证明集  $\{(m, n) : m, n = 1, 2, \dots\}$  是可数集. 而序偶  $(m, n)$  的全体可如下排列.



即  $(1, 1), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (2, 2),$

$(1, 3), \dots$ .

读者可以验证序偶  $(p, q)$  与自然数  $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2} + q$  相1—1对应.

由定理6·13, 可知所有整数是可列的. 有理数集可与整数序偶的集的子集1—1对应 $\left(\frac{n}{m}\right.$ 视为 $(m, n)$  $\left.)\right)$ , 有理数集是可列的.

下面定理说明实数系实质地“大”于有理数系.

**定理6·14**  $\mathbf{R}_1$ 不是可数集.

**证明** 只要证明区间  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  是不可数的就够了. 用反证法, 设  $I$  是可数的将导致矛盾. 若  $I$  可数, 把它的所有元素排成序列

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

把  $I$  分成三等分,  $\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  之中总有一个闭区间不含有  $x_1$ , 用  $I_1$  表示这个闭区间 (图6·5) 把  $I_1$  三等分可得

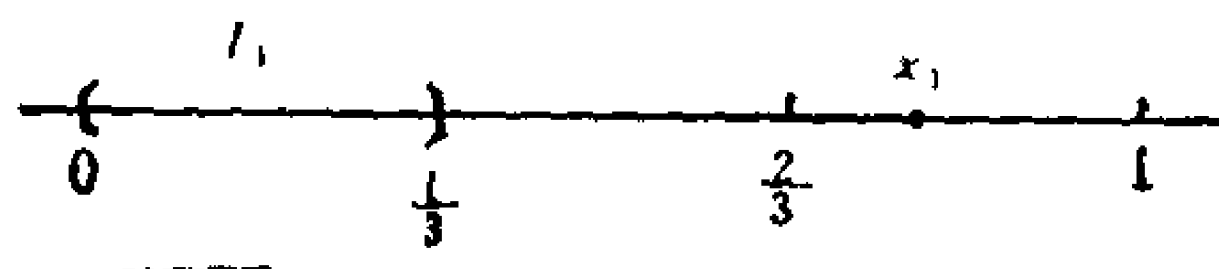


图 6·5

不含  $x_2$  的闭区间  $I_2$ , 等. 据归纳法, 便得闭区间套  $\{I_n\}$ . 对  $\forall n, I_n \supset I_{n+1}, x_n \notin I_n, n = 1, 2, \dots$ . 而  $I_n$  的长为  $\frac{1}{3^n} \rightarrow$

0, 据闭区间套定理 (定理3·1),  $\exists$  唯一点  $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ .

$x_0 \in I$ , 但  $x_0 \neq x_n, n = 1, 2, \dots$ , 矛盾.

**定理6·15** (a)  $R_1$ 中互不相交的开区间组成的族是可数族。

(b)  $R_N$ 内互不相交的开集组成的族是可数族。

**定理6·16** 设 $f$ 是 $R_1$ 内一区间 $I$ 上的单调函数,那么 $f$ 的间断点的集是可数的。

证明留作业题。

**定义**  $R_N$ 的开方格是集:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_N) : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

闭方格是集:

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_N) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, N\}.$$

$N = 1$ 的特殊情况,开方格、闭方格分别是 $R_1$ 中的开区间、闭区间。

**定理6·17**  $R_1$ 的开集是可数个开区间族的并。

**证明** 设 $G$ 是给定开集,任取 $x_0 \in G$ ,  $\exists$ 开区间 $J$ ,  $x_0 \in J \subset G$ . 定义 $I(x_0)$ 为所有这样 $J$ 的并。因为有公共点 $x_0$ 的开区间的并是开区间,所以 $I(x_0)$ 为开区间且 $I(x_0) \subset G$ . 设 $x_1, x_2 \in G$ ,  $x_1 \neq x_2$ . 当 $I(x_1) \cap I(x_2)$ 不空,那么 $I(x_1) \cup I(x_2)$ 是 $G$ 内同时包含 $x_1$ 与 $x_2$ 的一个开区间,由 $I(x_1), I(x_2)$ 的定义,有 $I(x_1) \equiv I(x_2)$ .

于是,含于 $G$ 内所有互不重合的 $I(x_0)$ 是互不相交的开区间。由定理6·15 (a),这些开区间的族是可数的, $G$ 是这可数个开区间的族的并。

**定理6·18**  $R_N$ 内的开集可以是内部互不相交的可数个闭方格族的并。

**证明** 设 $G$ 为 $R_N$ 中的开集。作超平面

$$x_i = \frac{K_i}{2^n}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

这里  $n$  是自然数,  $K_i$  是整数. 对  $\forall n$ , 不等式

$$2^{-n}(K_i - 1) \leq x_i \leq 2^{-n}K_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

确定一超方格. 当  $K_1, K_2, \dots, K_N$  各自取一切整数值, 可得将  $R_N$  划分成可数个彼此内部不相交的方格的族称为  $R_N$  的  $n$  阶格. 令  $F_0$  为含于  $G$  内的 0 阶闭方格的并集. 令  $G_1$  是含于  $G$  内但不在  $F_0$  内部的 1 阶方格的并. 定义  $F_1 = F_0 \cup G_1$ . 令  $G_2$  是含于  $G$  内但不在  $F_1$  内部的 2 阶方格的并. 定义  $F_2 = G_2 \cup F_1$ . 继续这一过程. 显然  $F_0, G_1, G_2, \dots, G_k, \dots$  每一集都是可数个闭方格族的并, 且闭立方格彼此不含公共内点即内部互不相交. 由此, 对  $\forall n, F_n$  是含于  $G$  内的  $n$  阶格的方格族的并.

我们来证明  $G = \bigcup_n F_n$ . 为此设  $p_0 \in G$ . 由  $G$  是开集,  $\exists$  开球  $B(p_0, r) \subset G$ . 对于使  $2^{-n}\sqrt{N} < r$  的  $n$ , 包含  $p_0$  的  $n$  阶格的方格

含于  $B(p_0, r)$  之内. 即  $p_0 \in F_n \subset \bigcup_n F_n$ . 由于  $p_0$  是任意的,

所以  $G \subset \bigcup_n F_n$ . 另一方面由

$F_n \subset G, \bigcup_n F_n \subset G$ , 所以  $G =$

$\bigcup_n F_n$ . 即  $G$  是内部互不相交的可

数个闭方格族的并 (图 6·6 可作为  $R_2$  中的示意图).

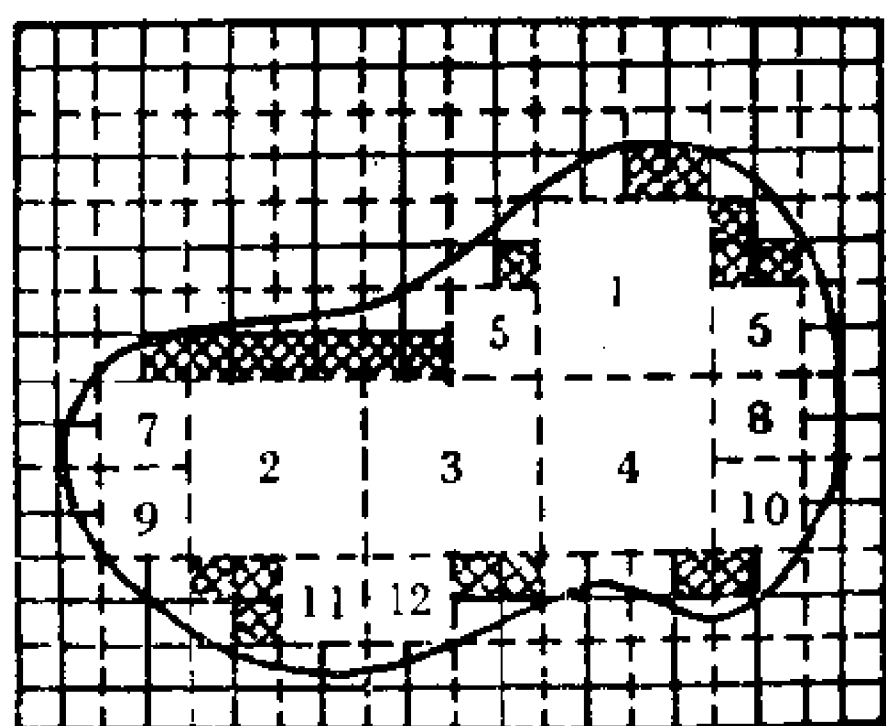


图 6·6

注 定理 6·18 中开集分解为闭立方格的并的方法不是唯一的.



## 习 题

1. 证明  $\mathbf{R}_2$  的全体有理点 (坐标为有理数) 是可列的.
2. 证明  $\mathbf{R}_N$  的全体有理点是可列的.
3. 设  $S = \{x : x = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots)\}$   $r_i$  为有理数, 无限序列  $x$  从某  $n$  项之后的各项为 0. 证明  $S$  是可列的.
4. 整系数多项式的实根是代数数. 证明这样的代数数的全体是可列的.
5. 通过建立互不相交的开区间族与有理数的子集 1-1 对应, 证明定理 6.15(a).
6. 证明定理 6.15(b).
7. 证明定理 6.16. [提示: 间断点的集可与互不相交的开区间的族建立 1-1 对应].
8. 证明每个无限集都包含有可列子集.
9. 设  $G$  是  $\mathbf{R}_1$  的开集, 证明  $G$  可以表示为以有理点为端点的开区间族的并.
10. 设  $G = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  是  $\mathbf{R}_2$  的子集, 具体地给出如定理 6.18 内的闭方格的族, 使其并为  $G$ . 证明闭方格的可能选取有无限多种.
- \*11. 设  $I = \{x : 0 < x < 1\}$ .  $S$  为定义于  $I$  上值域含于  $I$  的全体函数  $f$  的集. 证明  $S$  不可能与  $\mathbf{R}_1$  的子集建立 1-1 对应.  
[提示: 用反证法.]
- \*12. 设  $I = \{x : 0 < x < 1\}$ ,  $J = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ , 证明  $J$  可与  $I$  建立 1-1 对应. 推广这一结果到  $I$  与  $K$  建立 1-1 对应.  $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : 0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, N\}$ .

[提示: 设 $x$ 的小数表示为 $0 \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 \cdots$ ,  $y$ 的小数表示为 $0 \cdot y_1 y_2 y_3 \cdots$ , 使 $0 \cdot x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \cdots \in I$ , 与 $(x, y) \in J$ 对应.]

## § 6.4 紧 集

在§ 3.3中证明了著名的波尔查诺—外尔斯特拉斯定理:  $\mathbf{R}_1$ 中有界无限序列含有收敛子列(定理3.8). 本节说明在一般的距离空间中, 有界序列可能不存在收敛子列, 把其中序列有收敛子序列的集称为紧性集. 这种集保持了 $\mathbf{R}_1$ 的闭区间的一些重要性质.

**定义** 距离空间 $S$ 内的集 $A$ 称为紧集  $\iff A$ 的点序列 $\{p_n\}$ 含有收敛于 $A$ 中的点的子序列 $\{q_n\}$ . 也即 $\exists \{p_n\}$ 的子列 $\{q_n\}$ ,  $q_n \longrightarrow p_0 \in A$ .

由定义及定理3.8可知 $\mathbf{R}_1$ 中有界闭集是紧集.

**定义** 距离空间 $S$ 内的集 $A$ 称为有界集  $\iff \exists$ 某球 $B(p, r)$ ,  $A \subset B(p, r)$ .

**定理6.19** 距离空间 $S$ 内的紧集 $A$ 为有界闭集.

**证明** 假定 $A$ 无界. 定义如下序列: 取 $p_1 \in A$ . 由 $A$ 无界,  $\exists p_2 \in A$ , 使 $d(p_1, p_2) > 1$ . 同理,  $\exists p_3 \in A$ 使 $d(p_1, p_3) > 2$ . 如此对 $\forall n$ ,  $\exists p_n \in A$ 使 $d(p_1, p_n) > n - 1$ . 这样得到 $A$ 的点的序列 $\{p_n\}$ . 而 $A$ 是紧集,  $\{p_n\}$ 有收敛子列 $\{q_n\}$ ,  $q_n \rightarrow p_0$ ,  $p_0 \in A$ . 由收敛定义,  $\exists N$ 使 $n > N$ ,  $d(q_n, p_0) < 1$ . 但

$$\begin{aligned} (n-1) &< d(p_1, q_n) \leq d(q_n, p_0) + d(p_0, p_1) \\ &< 1 + d(p_0, p_1) \end{aligned} \quad (6.7)$$

(6·7) 中  $d(p_1, q_n) > (n-1)$  是由  $d(p_1, p_n) > n-1$ , 而  $q_n$  至少是  $\{p_n\}$  的第  $n$  项推得的.  $d(p_0, p_1)$  是定数, 当  $n$  充分大 (6·7) 是矛盾的. 于是  $A$  是有界集.

现设  $A$  不是闭集. 那么  $\exists A$  的极限点  $p_0 \notin A$ . 既然  $p_0$  是  $A$  的极限点, 按定理 6·4  $\exists A$  的点序列  $\{p_n\}$ ,  $p_n \rightarrow p_0$ . 按  $A$  紧性的定义,  $\{p_n\}$  有收敛于  $A$  中点的子列, 由  $\{p_n\}$  的子列必须收敛于  $p_0$ , 所以  $p_0 \in A$ . 这与  $p_0 \notin A$  的假定矛盾, 因此  $A$  是闭的.

很自然地要探讨定理 6·19 的逆是否成立. 我们给出一距离空间的有界的点序列它不含有收敛子列, 因而任何一个包含这一序列的有界闭集都不能是紧集.

例 于距离空间  $C_{[0,1]}$  (§ 6·1 例 4) 中研究序列

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 2^{-n-1} \\ 2^{n+2}(x - 2^{-n-1}) & 2^{-n-1} \leq x \leq 3 \cdot 2^{-n-2} \\ -2^{n+2}(x - 2^{-n}) & 3 \cdot 2^{-n-2} \leq x \leq 2^{-n} \\ 0 & 2^{-n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

图 6·7 中所示的  $f_n$  的图象是高为 1 的“锯齿”形. 当  $m \neq n$ ,

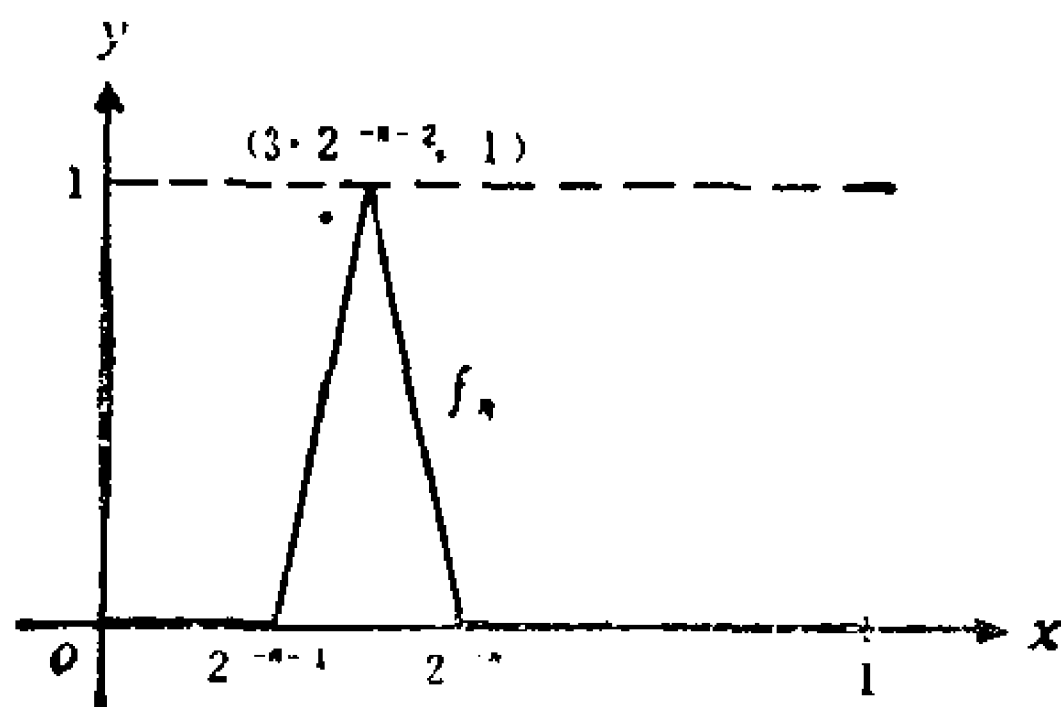


图 6·7

两“锯齿”部分不相重合，易知 $d(f_n, f_m) = 1$ ，并且 $\bar{d}(f_n, 0) = 1$ ， $0$ 表示恒等于零的连续函数。因此得到了 $\{f_n\} \subset B(0, 2)$ 是有界的，它没有收敛子列。象闭球 $\overline{B(0, 2)}$ 就是有界闭集，因为它含有 $\{f_n\}$ ，所以 $\overline{B(0, 2)}$ 为非紧性的有界闭集。

对于某些距离空间定理6.19的逆成立。例如 $R_1$ 中的有界闭集是紧集。这一结论对 $R_N$ 也成立。

**定理6.20**  $R_N$ 内的有界闭集是紧集。

**证明** 设 $A$ 是有界闭集。那么 $A$ 含于闭方格 $C$ 内， $c = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 。 $\{p_n\}$ 是 $A$ 中的任一序列。 $p_K = (p_K^1, p_K^2, \dots, p_K^N)$ ， $a_i \leq p_K^i \leq b_i$ ， $i = 1, 2, \dots, N$ ， $K = 1, 2, \dots, n, \dots$ 。从 $i = 1$ 着手，显然 $\{p_K^1\}$ 是实数的有界序列。据波尔查诺—外尔斯特拉斯定理， $\{p_K^1\}$ 有一收敛子列 $\{p_{K'}^1\}$ ，再对 $i = 2$ ，研究 $\{p_K^2\}$ 的子列 $\{p_{K'}^2\}$ ，由 $\{p_{K'}^2\}$ 是有界的它有收敛子列 $\{p_{K''}^2\}$ 。当然 $\{p_{K''}^1\}$ 是 $\{p_{K'}^1\}$ 的子列也收敛。对 $i = 3$ ，取 $\{p_{K''}^3\}$ 的收敛子列。如此直到 $i = N$ ，最后得到一 $\{p_K\}$ 的子列 $\{q_K\}$ ， $\{q_K\}$ 的每一分量都是收敛的实数列。在 $R_N$ 中 $\{q_K\}$ 收敛于某一点 $p$ 。由 $A$ 是闭的 $\{q_K\} \subset \{p_K\} \subset A$ ，所以 $p \in A$ 。按紧性定义 $A$ 是紧集。

**定理6.21** 距离空间的紧集的闭的子集是紧集。

**定义** 距离空间中的点序列 $\{p_n\}$ 称为哥西序列 $\iff$ 对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists$ 自然数 $N$ ，使当 $m, n > N$ 有

$$d(p_n, p_m) < \varepsilon.$$

注 在§3.6中讲过： $R_1$ 中序列收敛的充要条件是序列为哥西序列。这一

结果容易推广到 $R_N$ 中, 对于一般距离空间, 收敛序列必是哥西序列的结论可直接从收敛定义导出. 反过来, 哥西序列却不一定是收敛的. 例如距离空间 $(S, d)$ :  $S$ 为全体有理数的集,  $d(a, b) = |a - b|$  我们知道有理数的哥西序列可以无理数为极限,  $S$ 中这样的哥西序列就不存在极限.

**定理6.22** 在距离空间 $S$ 内, 若 $p_n \rightarrow p_0$ , 那么 $\{p_n\}$ 是一哥西序列.

**定理6.23** 若 $A$ 是距离空间 $S$ 内的紧集, 而 $\{p_n\} \subset A$ 是一哥西序列, 那么 $\exists p_0 \in A, p_n \rightarrow p_0$ .

定理6.21. 6.22. 6.23的证明都留给读者作为习题.

**定理6.24** 设 $A$ 是距离空间 $S$ 内的紧集,  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 是 $A$ 的非空闭子集序列且对 $\forall n, S_n \supset S_{n+1}$ , 那么 $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ 是非空集.

**证明** 诸 $S_n$ 都是 $A$ 的闭子集, 由定理6.21.  $S_n$ 是紧集.  $S_n$ 非空, 在 $S_1$ 中取一点 $p_1$ ,  $S_2$ 中取一点 $p_2$ , 继续下去得序列 $\{p_n\}$ ,  $p_n \in S_n$ , 由 $S_n \subset S_{n+1}$ , 可知对每一 $n, p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots$ , 是 $S_n$ 中点列.  $S_n$ 是紧集存在收敛子列收敛于 $S_n$ 的点 $p_0$ .  $p_0$ 也是收敛子列含于 $S_{n+K}$ 中的子列的极限, 即对 $\forall K$ ,

$p_0 \in S_{n+K}$ . 因此  $p_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$ .

**定理6.25** 设 $A$ 是距离空间 $S$ 内的紧集, 那么对 $\forall \delta > 0$ , 存在 $A$ 的有限个点 $p_1, p_2, \dots, p_n$ , 使  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(p_i, \delta)$ .

**证明** 设 $A$ 不空, 取 $P_1 \in A$ . 若 $A \subset B(P_1, \delta)$ , 定理得证. 否则取  $P_2 \in (A - B(P_1, \delta))$ . 若 $A \subset B(P_1, \delta) \cup B(P_2, \delta)$ 定理得证. 否则取  $P_3 \in [A - (B(P_1, \delta) \cup B(P_2, \delta))]$ , 继

续这一步骤，若在有限步 $A$ 被所得到的有限个开球覆盖，定理获证。下边证明这一步骤不能无限地继续下去。假定这一步骤可以无限地继续，便会得到无限序列 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_K, \dots$ ，且 $d(P_i, P_j) \geq \delta$ 对一切 $i \neq j$ 成立，因此 $\{P_n\}$ 不存在收敛子列，这与 $A$ 是紧集相矛盾。

**定义**  $H$ 是空间 $S$ 的集， $\mathcal{F}$ 是 $S$ 的子集族，称 $\mathcal{F}$ 覆盖 $H \iff \forall P \in H, \exists A \in \mathcal{F}, P \in A$ 。

定理6.25指出紧集可用任给半径的有限个开球族覆盖。下一定理是定理6.25的自然地推广。它是 $\mathbf{R}_1$ 中汉茵一波赖尔定理的一般化，是分析中很有用的结果。

**定理6.26** (汉茵一波赖尔定理) 设 $A$ 是距离空间 $S$ 内的一个紧集， $\mathcal{F} = \{G_\alpha\}$ 是覆盖 $A$ 的开集族，那么 $\mathcal{F}$ 的一个有限子族覆盖了 $A$ 。

**证明** 假定 $\mathcal{F}$ 不存在能覆盖 $A$ 的有限子族，将导致矛盾。据定理6.25，令 $\delta = \frac{1}{2}$ ， $\exists$ 有限个 $A$ 的点 $P_{11}, P_{12}, \dots$

$P_{1K_1}$ ，使 $A \subset \bigcup_{i=1}^{K_1} B(P_{1i}, \frac{1}{2})$ 。那么 $A$ 分解为 $K_1$ 个紧集：

$$A \cap \overline{B(P_{11}, \frac{1}{2})}, A \cap \overline{B(P_{12}, \frac{1}{2})}, \dots, A \cap \overline{B(P_{1K_1}, \frac{1}{2})}.$$

这 $K_1$ 个紧集当中至少有一个要求 $\mathcal{F}$ 的无限个开集才能覆盖它（否则每个 $A \cap \overline{B(P_{1i}, \frac{1}{2})}$ 能被 $\mathcal{F}$ 的有限个开集覆盖，那么 $A$ 便被 $\mathcal{F}$ 有限子族覆盖，这与假定不符）。记这样一个不能被 $\mathcal{F}$ 有限覆盖的子集为 $A \cap \overline{B(P_1, \frac{1}{2})}$ 。对 $A \cap$

$\overline{B\left(P_1, \frac{1}{2}\right)}$  这一紧子集应用定理 6·25, 取  $\delta = \frac{1}{2^2}$ , 那么  $\exists A$

$\cap \overline{B\left(P_1, \frac{1}{2}\right)}$  中有限个点  $p_{21}, p_{22}, p_{23}, \dots, p_{2K}$ , 使  $A \cap$

$\overline{B\left(P_1, \frac{1}{2}\right)} \subset \bigcup_{i=1}^{K_1} \overline{B\left(p_{2i}, \frac{1}{2^2}\right)}$ . 与前面同样论证,  $\exists A \cap$

$\overline{B\left(P_2, \frac{1}{2^2}\right)}$  要求  $\mathcal{S}$  的无限个开集才能覆盖它. 继续这一步骤, 得到闭球序列

$$\overline{B\left(P_1, \frac{1}{2}\right)}, \overline{B\left(P_2, \frac{1}{2^2}\right)}, \dots, \overline{B\left(P_n, \frac{1}{2^n}\right)}, \dots$$

$P_n \in \overline{B\left(P_{n-1}, \frac{1}{2^{n-1}}\right)}$ ,  $A \cap \overline{B\left(P_n, \frac{1}{2^n}\right)}$  要求  $\mathcal{S}$  的无限个

开集才能覆盖它. 因为  $d(P_{n-1}, P_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , 那么  $\{P_n\}$

是  $A$  的哥西序列, 由定理 6·23,  $p_n \rightarrow p_0 \in A$ . 由  $\mathcal{S}$  覆盖  $A$ ,  $\exists$  开集  $G_0 \in \mathcal{S}$ ,  $p_0 \in G_0$ . 因  $G_0$  是开集,  $p_0$  是某开球  $B(p_0, r)$  的中心,  $B(p_0, r) \subset G_0$ .  $n$  充分大,  $P_n \in B(p_0, r)$  且

$\overline{B\left(P_n, \frac{1}{2^n}\right)} \subset B(p_0, r) \subset G_0$ . 因此对这样充分大的  $n$ ,  $A \cap$

$\overline{B\left(P_n, \frac{1}{2^n}\right)} \subset G_0 \in \mathcal{S}$ , 这与  $A \cap \overline{B\left(P_n, \frac{1}{2^n}\right)}$  要求  $\mathcal{S}$  的无限

个开集才能覆盖的性质相矛盾.

注 集  $A$  的紧性对于定理 6·25 是必不可少的. 例如在定理 6·19 之后的

$C[0, 1]$  中的  $\{f_n\}$ , 它是有界集:  $d(f_n, 0)=1, n=1, 2, \dots$ , 当  $m \neq n$   $d(f_m, f_n)=1$ . 若  $\mathcal{S} = \left\{ B\left(f_n, \frac{1}{2}\right) \right\}$  每一  $f_n \in \{f_n\}$ , 恰有  $\mathcal{S}$  中的开集  $B\left(f_n, \frac{1}{2}\right)$  包含  $f_n$ ,  $\mathcal{S}$  是  $\{f_n\}$  的覆盖, 而  $B\left(f_n, \frac{1}{2}\right)$  仅含有  $\{f_n\}$  的唯一元素  $f_n$ , 因此  $\mathcal{S}$  的有限的子族不能覆盖  $\{f_n\}$ .

更简单的例子如在  $R_1$  中取  $A = \{x : 0 < x < 1\}$ ,  $A$  有界但不闭, 因而是非紧的. 开集族  $\mathcal{S} = \{I_\alpha : I_\alpha \text{ 为 } \left(\frac{\alpha}{2}, 1\right), \alpha \in A\}$  覆盖  $A$ ,  $\mathcal{S}$  不存在有限子族能覆盖  $A$ .

下一定理是汉茵一波赖尔定理的一个有用的等价形式. 可以仿照定理3.14叙述与证明.

**定理6.27(勒贝格引理)** 设  $A$  是紧集,  $A$  被开集族  $\mathcal{S} = \{G_\alpha\}$  所覆盖, 那么  $\exists$  一正数  $\rho$ , 使对  $\forall p \in A$ , 球  $B(p, \rho)$  含于  $\mathcal{S}$  的一开集内.

**证明** 由  $\mathcal{S}$  覆盖  $A$ ,  $\forall P \in A$ ,  $\exists$  开球  $B(P, 2r_P)$  含于  $\mathcal{S}$  的某个开集内. 因而  $B(P, r_P)$  也含于  $\mathcal{S}$  的同一开集内. 以  $\mathcal{G}$  记开球族  $\{B(P, r_P) : P \in A\}$ ,  $\mathcal{G}$  也覆盖  $A$ . 据汉茵一波赖尔定理,  $\mathcal{G}$  的有限子族  $\{B(P_1, r_1), B(P_2, r_2), \dots, B(P_K, r_K)\}$  覆盖  $A$ . 令  $\rho = \min_{1 \leq i \leq K} r_i$ . 现在对  $\forall P \in A$ ,  $P$  属

于某  $B(P_i, r_i)$  内且有

$$\begin{aligned} B(P, \rho) &\subset B(P_i, r_i + \rho) \\ &\subset B(P_i, 2r_i). \end{aligned}$$

示意图如图6.8球  $B(P_i, 2r_i)$  含于  $\mathcal{S}$  的某开集之内, 因而  $B(P, \rho)$  含于  $\mathcal{S}$  的这个开集内.  $p$  是  $A$  的任意点, 于是定理证迄.

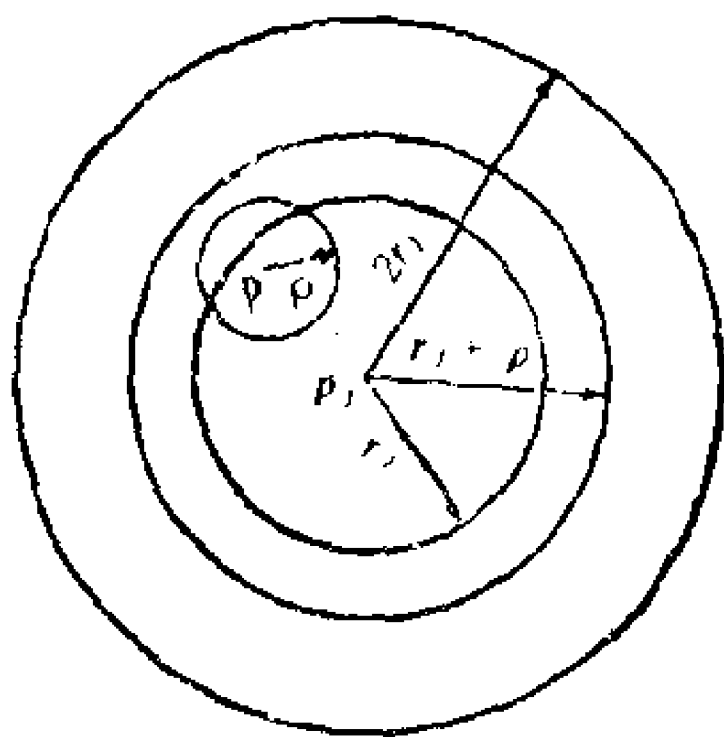


图 6.8



## 习 题

1. 证明有限点集是紧集。

2. 证明 (i) 任意多个紧集之交是紧集。

(ii) 有限多个紧集的并是紧集。

(iii) 无限多个紧集的并可能是非紧集。

3. 于欧几里得的  $R_1$  中, 定义  $A = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \}$ ,  $B = A - \{ P \}$ ,  $P$  是点  $(1, 1)$ . 给出一个覆盖  $B$  的开矩形族  $\mathcal{F}$ , 而  $\mathcal{F}$  不存在覆盖  $B$  的有限子族。

4. 设  $l_2$  是  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$  收敛序列  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  的空间,  $d(x, y)$

$$= \left( \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x, y \in l_2. \text{ 于这个距离空间中 } e_n =$$

$(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$  为第  $n$  个分量为 1 其他分量都为零的元素。证明集  $\{ e_n \}$  是  $l_2$  的有界非紧集。

5. 在  $R_1$  中, 开集族  $\mathcal{F} = \{ I_0 \} \cup \{ I_a : 0 < a \leq 1, I_a =$

$$\left( \frac{a}{2}, 2 \right) \}, I_0 = \left\{ x : -\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5} \right\}, \mathcal{F} \text{ 覆盖 } A = \{ x :$$

$0 \leq x \leq 1 \}$ . 对  $\mathcal{F}$  求一勒贝格引理中的  $\rho$  值。

6. 设  $R_2$  中矩形  $R = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$  被开集族  $\mathcal{F}$  所覆盖。证明可用平行于  $R$  的边的直线把  $R$  划分为彼此不含共同内点的矩形, 使这每一矩形含于  $\mathcal{F}$  的一开集内。

7. 设  $\mathcal{S}$  是只有有限个  $x_i \neq 0$  的序列  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  的空间。距离定义为  $d(x, y) = \max_{1 \leq i < \infty} |x_i - y_i|$ 。证明  $\mathcal{S}$  是

距离空间，求 $\mathcal{G}$ 中的一个有界闭非紧集。

8. 设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{R}_2$ 中覆盖圆周 $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ 的开集族。证明 $\exists$ 一正数 $\rho$ ， $\mathcal{F}$ 也能覆盖集 $A = \{(x, y) : (1 - \rho)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (1 + \rho)^2\}$ 。

9. 证明定理6.21。

10. 证明定理6.22。

11. 证明定理6.23。

## § 6.5 紧集上的函数

本节研究距离空间 $S$ 到 $\mathbb{R}_1$ 的函数， $\mathbb{R}_1$ 到 $\mathbb{R}_1$ 的函数的一些基本性质将得到推广。我们从极限和连续性的基本概念着手。

**定义** 设 $f$ 是距离空间 $S$ 到 $\mathbb{R}_1$ 的函数， $f$ 的定义域 $A \subset S$ ，记作 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_1$ 。称当 $p$ 通过点集 $A$ 的点趋向于 $p_0$ 点时， $f(p)$ 趋向于极限 $l \iff$  (i)  $p_0$ 是 $A$ 的极限点；(ii) 对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使 $A$ 内满足 $0 < d(P, p_0) < \delta$ 的点 $p$ ，有 $|f(P) - l| < \varepsilon$ 成立。记为

$$f(P) \rightarrow l \quad \text{当 } P \rightarrow p_0, P \in A \text{ 或 } \lim_{\substack{P \rightarrow p_0 \\ P \in A}} f(P) = l.$$

注意在极限定义中不要求 $p_0 \in A$ ，或 $l = f(p_0)$ 。当 $p_0 \in A$ ， $l = f(p_0)$ 成立时就是连续性定义。

**定义** 设 $A$ 是距离空间 $S$ 的子集，给定 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_1$ ， $p_0 \in A$ 。称 $f$ 在 $p_0$ 点关于 $A$ 连续 $\iff \lim_{\substack{P \rightarrow p_0 \\ P \in A}} f(P) = f(p_0)$ 。称 $f$ 在 $A$ 上

连续 $\iff$  对 $\forall p \in A$ ， $f$ 在 $p$ 点关于 $A$ 连续。

在 § 2·2 中所建立的定理, 除了复合函数定理之外 都能直接推广过来.

**定理 6·28 (极限唯一性)** 设  $A$  是距离空间  $S$  的子集,  $f: A \rightarrow R_1$ ,  $P \in A$  当  $P \rightarrow P_0$ ,  $f(P) \rightarrow L$  及  $f(P) \rightarrow M$ , 那么  $L = M$ .

**证明** 假定  $L \neq M$  将导致矛盾. 取  $\varepsilon = \frac{1}{2}|L - M|$ . 依极限定义, 对这一  $\varepsilon$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  及  $\delta_2 > 0$ , 使对  $A$  中分别满足  $0 < d(P, P_0) < \delta_1$ ,  $0 < d(P, P_0) < \delta_2$  的  $p$ , 相应地有

$$|f(P) - L| < \varepsilon, \quad |f(P) - M| < \varepsilon. \quad (6 \cdot 8)$$

$P_0$  既是  $A$  的极限点,  $\exists \bar{P} \in B(P_0, \delta)$ ,  $\bar{P} \in A$ , 这里  $\delta$  为  $\min \{ \delta_1, \delta_2 \}$ . 由 (6.8) 式, 得

$$|L - M| \leq |L - f(\bar{P})| + |f(\bar{P}) - M| < 2\varepsilon = |L - M|.$$

导致  $|L - M| < |L - M|$  的矛盾.

把上面的证明与定理 2·1 的证明对照一下, 可见只要把定理 2·1 中  $R_1$  的距离  $(d(x, y) = |x - y|)$  换成一般的距离, 把  $R_1$  的元素  $x$  换成距离空间的元素  $p$ , 就是定理 6·28 的叙述与证明. § 2·2 中除了定理 2·7 之外的九个定理从叙述到证明都能对照着推广过来.

第三章建立的闭区间上连续函数的基本性质, 在函数定义域是紧集的条件下, 有界性、极值性、一致连续性定理都能推广过来. 下面的三个定理就是相应定理的推广. 作为示范仅写出有界性定理的证明.

**定理 6·29** 设  $A$  是距离空间  $S$  中的紧集,  $f: A \rightarrow R$ , 在  $A$

上连续, 那么  $f$  的值域是有界的。

**证明** 若不然,  $f$  的值域无界将导致矛盾。当值域无界, 对  $\forall$  自然数  $n$ ,  $\exists P_n \in A$ , 使  $|f(P_n)| > n$ , 因为  $A$  是紧集,  $\{P_n\} \subset A$ ,  $\{P_n\}$  含有收敛子列  $\{q_n\}$ ,  $q_n \rightarrow \bar{P} \in A$ 。由  $f$  在  $A$  上连续, 有  $f(q_n) \rightarrow f(\bar{P})$ 。这与

$$|f(q_n)| = |f(P_{K_n})| > K_n \geq n \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

相矛盾。

注 读者对照定理6·29与定理3·9的证明可见两者同样都基于定义域是紧集。若  $A$  非紧结果不成立。

**定理6·30** 设  $A$  是距离空间中的紧集,  $f: A \rightarrow R_1$  在  $A$  上连续, 那么  $f$  的值域包含它的上确界、下确界。

**定义** 设  $A$  是距离空间  $S$  的子集,  $f: A \rightarrow R_1$  是给定的。称  $f$  在集  $B$  上一致连续  $\iff$  (i)  $B \subset A$  (ii) 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当  $P, q \in B$ ,  $d(P, q) < \delta$ , 便有  $|f(P) - f(q)| < \varepsilon$ 。

**定理6·31** 设  $f: A \rightarrow R_1$  在  $A$  的紧子集  $B$  上连续, 那么  $f$  在  $B$  上一致连续。

定理6·30、定理6·31的证明可仿照定理3·10、定理3·11写出。

## 习 题

习题1—7中的函数都是定义在距离空间  $S$  的集  $A$  上的。

1. 设  $C$  是常数,  $\forall P \in A$ ,  $f(P) = C$ .  $P_0$  是  $A$  的极限点, 那么

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f(P) = C. \quad (\text{常数极限定理})$$

2. 设  $P_0$  是  $A$  的极限点,  $f, g$  对  $\forall P \in (A - \{P_0\})$  有  $f(P) =$

$g(P)$ . 若  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f(P) = L$  证明  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} g(P) = L$ .

3. 设  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f_1(P) = L_1$ ,  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f_2(P) = L_2$ , 证明  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} (f_1(P) + f_2(P)) = L_1 + L_2$ .

4. 在习题3的假设下, 证明  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} (f_1(P) \cdot f_2(P)) = L_1 \cdot L_2$ .

5. 在习题3假设条件之下, 且  $L_2 \neq 0$ . 证明

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} (f(P_1)/f(P_2)) = L_1/L_2.$$

6. 设对  $\forall P \in A$   $f(P) \leq g(P)$ , 当  $P \rightarrow P_0$ ,  $P \in A$ ,  $f(P) \rightarrow L$  及  $g(P) \rightarrow M$ , 证明  $L \leq M$ .

7. 对距离空间集  $A$  上的实值函数叙述并证明 §2.2 定理2.10 (两边夹定理) 相应的定理.

8. 证明复合函数定理的如下推广. 设  $f: R_1 \rightarrow R_1$  在  $L$  连续,  $g: S \rightarrow R_1$ ,  $S$  是距离空间. 若当  $P \rightarrow P_0$ ,  $g(P) \rightarrow L$ , 那么  $f[g(P)] \rightarrow f(L)$ , ( $P \rightarrow P_0$ ).

9. 设  $A \subset R_1$   $f: A \rightarrow R_1$  在集  $A$  上连续. 举例说明当  $A$  不是区间时介值性定理可能不成立.

10. 证明定理6.30. (极值性定理)

11. 证明定理6.31. (一致连续定理)

12. 用定理6.26证明定理6.29.

13. 以勒贝格引理 (定理6.27) 证明定理6.31.

## §6.6 连通性

在区间上定义的连续函数介值性定理与区间的连通性有

关。直观地想象连通性是指点集的任意两点能以位于集内的“路径”联结，或换一种说法集不能分成两个或更多个“分块”。

**定义** 距离空间  $S$  的两个子集  $A, B$  称为是分离的（或不连通的） $\iff A \cap \overline{B}$  及  $B \cap \overline{A}$  都是空集。  $\overline{A}, \overline{B}$  分别是  $A, B$  的闭包。

集  $A$  称为连通的 $\iff A$  不能是两个非空分离集的并。

例如  $\mathbf{R}_1$  内的集  $A = \{x : 0 < x < 1 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$  是不连通的。事实上令  $B_1 = \{x : 0 < x < 1\}, B_2 = \{x : 1 < x < 2\}$ 。  $B_1 \cap \overline{B_2}$  及  $B_2 \cap \overline{B_1}$  都是空集，  $A = B_1 \cup B_2$ ，  $B_1, B_2$  是分离的，所以  $A$  是不连通集。如图6·9所示。

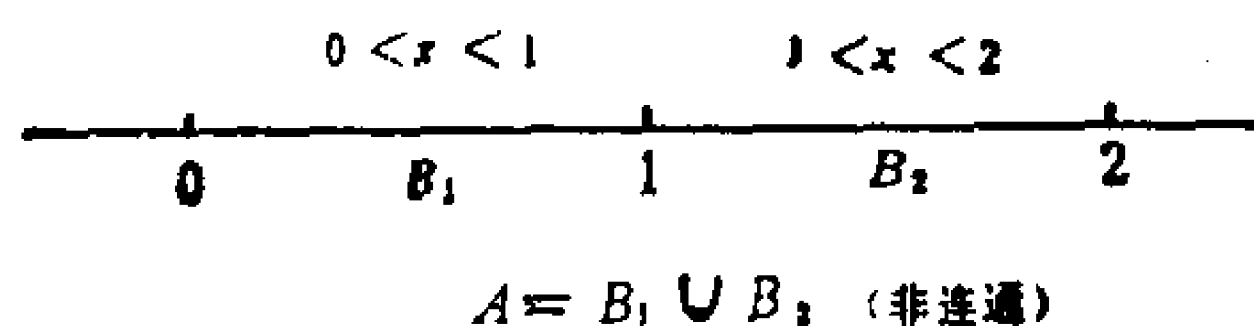


图 6·9

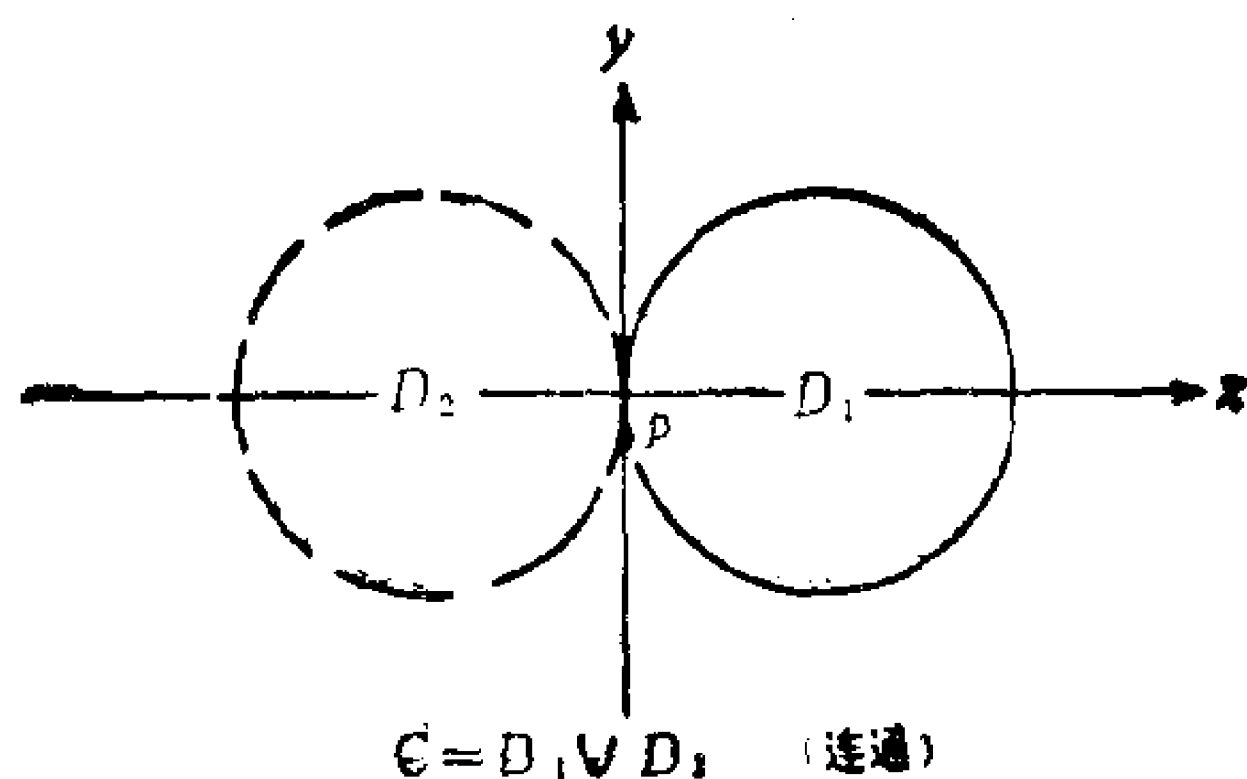


图 6·10

图6·10所示  $\mathbf{R}_2$  内的点集  $C = D_1 \cup D_2$  是连通的。其中

$D_1 = \{ (x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \}$ ,  $D_2 = \{ (x, y) : (x+1)^2 + y^2 < 1 \}$ . 虽然  $D_1$  与  $D_2$  不相交. 但  $P(0,0) \in D_1$ ,  $P(0,0)$  是  $D_2$  的极限点. 即  $D_1 \cap \overline{D_2} = \{ P \}$  不空,  $D_1$  与  $D_2$  不分离.

下面定理是定理3.7在距离空间的推广, 它表明连通性的作用.

**定理6.32(介值定理)** 设  $f$  是定义在距离空间  $X$  上的实值函数. 若  $f$  在  $X$  的连通的非空子集  $S$  上连续, 那么  $R(f|_S) = \{ f(P) : P \in S \}$  是  $\mathbb{R}_1$  的区间或一个点的集.

**证明** 若  $f|_S$  是常数,  $R(f|_S)$  是个单点集. 否则,  $R(f|_S)$  含有两个点, 仿效定理3.7的证明. 设  $y_1, y_2 \in R(f|_S)$ ,  $y_1 < y_2$ , 证明当  $C$  满足  $y_1 < C < y_2$ , 有  $C \in R(f|_S)$  就够了. 假定存在这样的  $C \notin R(f|_S)$ . 定义  $S_1 = \{ P : f(P) < C, P \in S \}$ ,  $S_2 = \{ P : f(P) > C, P \in S \}$ . 由定义  $S_1$  与  $S_2$  不相交, 并且  $S_1, S_2$  非空 (理由是  $y_1, y_2 \in R(f|_S)$ ,  $y_1 < C$ ,  $y_2 > C$ ),  $S = S_1 \cup S_2$ . 根据  $S$  是连通集的假设,  $S_1$  与  $S_2$  是非分离的, 即必有一  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) 包含另一集的极限点. 另一方面, 设  $P_0 \in S_1$ , 令  $\varepsilon = C - f(P_0) > 0$ , 对这一  $\varepsilon$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使  $S$  中满足  $d(P, P_0) < \delta$  的  $p$ , 有  $|f(P) - f(P_0)| < \varepsilon = C - f(P_0)$ . 也即对这样的  $p$ , 有  $f(P) < f(P_0) + C - f(P_0) = C$ . 于是  $B(P_0, \delta)$  中不含有  $S_2$  的点.  $p_0$  不是  $S_2$  的极限点. 同理,  $S_2$  的点不是  $S_1$  的极限点. 这与  $S$  的连通性相矛盾. 于是当  $C$  介于  $y_1, y_2$  之间, 便有  $C \in R(f|_S)$ . 这表明  $R(f|_S)$  是一区间.

下面关于连通集性质的定理留给读者去证明.

**定理6.33** 设  $\mathcal{S}$  是距离空间  $X$  的连通子集的族并且族

中的每两个元素都有公共点,那么 $\mathcal{S}$ 的并  $A = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$  是连通集。

**定理6·34** 若 $S$ 是一距离空间的连通子集,那么 $S$ 的闭包 $\overline{S}$ 是连通的。

**定理6·35**  $\mathbf{R}_1$ 中的区间是 $\mathbf{R}_1$ 的连通子集。

**证明** 因为任一区间或是闭区间或是闭区间递增序列的

并集。例如 $[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ , 这里  $a_n = a$ ,  $b_n = b -$

$\frac{b-a}{2^n}$ ,  $n=1,2,\dots$ ;  $[a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, a+n]$ 。据定理

6·33, 只要证明闭区间是连通集就够了。

设闭区间 $[a, b] = S_1 \cup S_2$ , 这里 $S_1, S_2$ 是不相交的非空集。令 $U_1 = \sup S_1$ ,  $U_2 = \sup S_2$ , 并设  $U_1 \leq U_2 \leq b$ 。设  $U_1 < b$ , 那么满足  $U_1 < x \leq b$  的  $x \in S_2$ , 因此  $U_2 = b$ 。这时, 若  $U_1 \in S_1$ , 显然 $U_1$ 是 $S_2$ 的极限点; 若  $U_1 \in S_2$ , 因  $U_1 = \sup S_1$ ,  $U_1$ 是 $S_1$ 的极限点。即 $S_1$ 与 $S_2$ 为非分离的集。若  $U_1 = b$ , 当然  $U_1 = U_2 = b$ ,  $b$ 是 $S_1$ 也是 $S_2$ 的极限点,  $S_1$ 与 $S_2$ 不是分离的。总之,  $[a, b]$ 不能表示成非空的两分离集的并, 它是连通集。

## 习 题

1. 证明定理6·33[提示: 用反证法。设  $A = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ,  $\Sigma_1, \Sigma_2$  互不相交且非空。 $\mathcal{S}$ 的某 $S$ 与 $\Sigma_1$ 及 $\Sigma_2$ 的交都不空导致矛盾]。



2. 证明定理6.34.
3. 设  $f: R_1 \rightarrow R_1$  在区间  $I$  上连续. 证明  $\{(x, y) : x \in I, y = f(x)\}$  是  $R_2$  内的连通集.

4. 设  $S_1 = \left\{ (x, y) : x > 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\}$  (6.9)

$$S_2 = \left\{ (x, y) : x < 0, y = \sin \frac{1}{x} \right\}$$

证明  $S_1 \cup S_2$  是非连通集. 即  $S_1$  与  $S_2$  是分离集.

5.  $S_1, S_2$  定义如 (6.9) 式. 证明集  $S = \{(x, y) : x = 0, |y| < \eta, 0 < \eta \leq 1\} \cup S_1 \cup S_2$  是连通集.
6.  $S_1, S_2$  定义如 (6.9) 式. 证明集  $S = \{(x, y) : x = 0, |y| > 1\} \cup S_1 \cup S_2$  是非连通集.
7. 证明: 若  $A$  是距离空间的连通集且  $A \subset B \subset \overline{A}$ , 那么  $B$  是连通集.
8. 设  $S$  是距离空间的闭子集, 且  $S$  非连通的, 那么存在  $S$  的不相交的非空且闭的子集  $S_1$  与  $S_2$ , 使  $S = S_1 \cup S_2$ .
9. 设  $A$  是  $R_1$  中有理点集, 证明  $A$  是非连通的.
10. 设  $A$  与  $B$  是距离空间中的连通集但  $A - B$  不连通. 假设  $A - B = C_1 \cup C_2$ ,  $C_1, C_2$  是分离集, 证明  $B \cup C_1$  是连通的.
11. 设  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  设  $f : I \rightarrow I$  的连续函数. 证明方程  $f(x) = x$  至少有一个解. [提示: 对函数  $F(x) = f(x) - x$  应用反证法, 假设  $F(x) \neq 0$  与介值定理矛盾.]

## § 6.7 距离空间之间的映象

现在把函数概念推广为集间的映象，并研究哪些实值连续函数定理能推广到从距离空间到距离空间的连续映象上来。

**定义** 从集 $A$ 到集 $B$ 的一关系是序偶 $(p, q)$ 的集， $p \in A, q \in B$ 。组成序偶集的 $(p, q)$ 的元素 $p$ 组成的集称为这一关系的定义域；而所有 $(p, q)$ 的 $q$ 组成的集称为这一关系的值域。当关系的序偶中没有两个同样第一元素的序偶时，关系称之为映象，或称之为函数、变换等。若 $f$ 是从 $A$ 到 $B$ 的映象，表示为 $f: A \rightarrow B$ ，以 $D(f) \subset A$ 记 $f$ 的定义域，以 $R(f)$ 记 $f$ 的值域，若 $p \in D(f)$ ， $f(p)$ 是 $B$ 中唯一元素 $q$ 满足 $(p, q) \in f$ 。若 $D(f) = A$ ，就说 $f$ 是 $A$ 上到 $B$ 内的映象。若 $R(f) = B$ 就说是到 $B$ 上的映象。若 $A_1 \subset D(f)$ ， $A_1$ 在 $f$ 之下的像是指集 $\{f(p) : p \in A_1\}$ 记为 $f(A_1)$ 。若 $B_1 \subset R(f)$ ， $B_1$ 在 $f$ 之下的逆像指集 $\{p : f(p) \in B_1, p \in D(f)\}$ ，记为 $f^{-1}(B_1)$ 。若 $T$ 是从 $A$ 到 $B$ 的关系，其逆关系 $T^{-1}$ 指集 $\{(q, p) : (p, q) \in T\}$ 。映象的逆关系不必是映象，当且仅当映象是1-1的，逆关系是映象。

注 三维空间中曲线的参数方程是

$$x=f(t), \quad y=g(t), \quad z=h(t).$$

这三个方程表示从 $R_1$ 到 $R_3$ 的映象。一般的，从 $R_N$ 到 $R_M$ 的映象可由 $M$ 个显式方程组给出：

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\vdots$$

$$y_M = f_M(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

每一  $f_i$  是从  $R_N$  到  $R_i$  的映象,  $f_i$  的有序组表示从  $R_N$  到  $R_M = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_i$  ( $M$  个因子) 的映射.

当映象的定义域及值域都是距离空间的集时, 容易把  $R_1$  到  $R_1$  的函数的极限、连续概念推广到这样的映象. 从而第三章中那些仅与  $R_1$  是距离空间有关的若干定理都能得到推广.

**定义** 设  $(S_1, d_1), (S_2, d_2)$  为两距离空间,  $f$  是从  $S_1$  到  $S_2$  内的映象,  $A \subset S_1, P \in A, P_0 \in S_1$ , 称当  $p \rightarrow p_0$  时,  $f(P) \rightarrow q_0 \iff$  (i)  $p_0$  是  $A$  的极限点; (ii) 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使  $d_2(f(P), q_0) < \varepsilon$  对所有  $A$  中满足  $0 < d_1(P, P_0) < \delta$  的  $p$  成立. 也说成当  $p$  趋向于  $p_0$ ,  $f(p)$  的极限是  $q_0$ , 表示为

$$f(p) \rightarrow q_0, \quad \text{当 } p \rightarrow p_0, p \in A$$

或

$$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f(P) = q_0.$$

映象  $f$  关于  $A$  在  $p_0$  点连续  $\iff$  (i)  $f(P_0)$  有定义; (ii)  $p_0$  为  $A$  的孤立点或为  $A$  的极限点, 且  $\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f(P) = f(P_0)$ .

$f$  在  $A$  的每一点都连续, 称在  $A$  上连续. 当  $A = S_1$  时, 上述诸定义中“关于  $A$ ”可以省略.

重要的是: 一个函数关于  $A$  在某点连续而在同一点关于别的集可能不连续. 例如  $f: R_1 \rightarrow R_1$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数.} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

它在各点都不连续。但是，若  $A$  是  $\mathbf{R}_1$  的有理数集，那么  $f$  关于  $A$  在每一有理点连续，理由是  $f$  在  $A$  上是常数。另一方面，尽管每一无理数都是  $A$  的极限点，但  $f$  关于  $A$  在任一无理数处不连续 $\left(\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in A}} f(P) \neq f(P_0)\right)!$

§ 6·5 中关于距离空间上的实值函数的定理能直接推广为值域也是距离空间的映射的相应的定理。这种推广可用值域的距离  $d_2$  代替  $\mathbf{R}_1$  的距离并在叙述中作相应的改变而得出。以复合函数定理为例来说明。其他作为习题留给读者。

**定理 6·36** 设  $f$  是从距离空间  $(S_1, d_1)$  到距离空间  $(S_2, d_2)$  内的映象， $g$  是  $(S_2, d_2)$  上到距离空间  $(S_3, d_3)$  内的映象。若  $h = g \circ f$  (即  $g \circ f(p) = g[f(p)]$ )，那么

(a) 当  $p \rightarrow p_0$ ,  $f(p) \rightarrow q_0$ ,  $g$  在  $q_0$  连续，则  $h(p) \rightarrow g(q_0)$ 。

(b) 当  $f$  在  $S_1$  上连续， $g$  在  $S_2$  上连续，则  $h = g \circ f$  在  $S_1$  上连续。

**证明** 仅需证明 (a)，(b) 是 (a) 的直接推论。

因为  $g$  在  $q_0$  点连续，对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当  $d_2(q, q_0) < \delta$ , 有  $d_3(g(q), g(q_0)) < \varepsilon$ 。又据  $p \rightarrow p_0$  时， $f(p) \rightarrow q_0$ ，对上述  $\delta > 0$ ,  $\exists \delta_1 > 0$ , 使  $d_2(f(p), q_0) < \delta$  对满足  $0 < d_1(p, p_0) < \delta_1$  的一切  $p$  成立。于是，对这样的  $p$ , 有  $d_2(f(p), q_0) < \delta$ , 进而  $d_3(g[f(p)], g(q_0)) < \varepsilon$  成立。即定理 (a) 成立。

在空间上连续的映象能用开集表述它的特征。如下面定理所叙。

**定理 6·37** 设  $f$  是距离空间  $(S_1, d_1)$  上到距离空间  $(S_2, d_2)$  内的映象，那么  $f$  在  $S_1$  上连续  $\iff$  对每一  $S_2$  内开集  $U$ ,

$f^{-1}(U)$  是  $S_1$  内的开集。

**证明** (a) 设  $f$  在  $S_1$  上连续,  $U$  是  $S_2$  内开集。我们证明  $f^{-1}(U)$  是  $S_1$  内的开集。考察  $\forall p_0 \in f^{-1}(U)$ 。由连续定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当  $d_1(p, p_0) < \delta$ , 有  $d_2(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$ 。由  $f(p_0) \in U$ ,  $U$  为开集, 选取  $\varepsilon$  足够小使开球  $B(f(p_0), \varepsilon) \subset U$ , 那么  $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U)$ 。由连续性, 当  $d_1(p, p_0) < \delta$ , 有  $d_2(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$ , 这表明  $B_1(p_0, \delta) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(U)$ 。即  $p_0$  是  $f^{-1}(U)$  的内点, 因此  $f^{-1}(U)$  是开集。

(b) 设对  $S_2$  内每个开集  $U$ ,  $f^{-1}(U)$  是  $S_1$  的开集。考察  $p_0 \in S_1$ , 及给定  $\varepsilon > 0$ 。开球  $B(f(p_0), \varepsilon)$  是  $S_2$  中开集, 那么  $f^{-1}[B(f(p_0), \varepsilon)]$  是  $S_1$  中开集。  $p_0 \in f^{-1}[B(f(p_0), \varepsilon)]$ , 可取一  $\delta > 0$ , 使  $S_1$  中开球  $B_1(p_0, \delta) \subset f^{-1}[B(f(p_0), \varepsilon)]$ 。这一  $\delta$  是满足连续定义相应于  $\varepsilon$  要求的  $\delta$ 。

**注** (i) 连续函数并不常把开集映象为开集。例如,  $R_1 \rightarrow R_1$  的函数  $f(x) = x^2$  映开区间  $I = \{x : -1 < x < 1\}$  为半开区间  $J = \{x : 0 \leq x < 1\}$ 。

(ii) 定理 6.37 也能以闭集代替开集叙述为:  $f$  在  $S_1$  上是连续的, 当且仅当对  $S_1$  的每个闭集  $A$ ,  $f^{-1}(A)$  是  $S_1$  内的闭集。同样, 连续函数并不常把闭集的映象为闭集。例如  $R_1 \rightarrow R_1$  的函数  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  把闭集  $A = \{x : 0 \leq x < \infty\}$  映射为半开区间  $I = \{x : 0 < x \leq 1\}$ 。

下面简单事实的证明留给读者。

**定理 6.38** 设  $f$  是从距离空间  $X$  到距离空间  $Y$  的映象,  $p_0 \in X$ ,  $S \subset X$ 。  $d, d'$  分别表  $X, Y$  的距离。

(a)  $f$  关于  $S$  在  $p_0$  点连续  $\iff f(p_0)$  有定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使  $p \in S$  且  $d(p, p_0) < \delta$  的  $p$ , 有  $d'(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$ 。

(b) 若  $p_0, p_n \in S, n = 1, 2, \dots, p_n \rightarrow p_0$ ,  $f$  关于  $S$  在  $p_0$

点连续, 那么  $f(p_n) \rightarrow f(p_0)$ .

**定理6.39** 设  $f$  是从距离空间  $X$  到距离空间  $Y$  内的映象,  $p_0 \in X$ . 若对于  $\forall \{p_n\} \subset X$ , 当  $p_n \rightarrow p_0$  便有  $f(p_n) \rightarrow f(p_0)$  那么  $f$  在  $p_0$  点连续.

**定理6.40** 设  $f$  是从距离空间  $X$  到距离空间  $Y$  的连续映象,  $g$  是从  $Y$  到距离空间  $Z$  内的连续映象, 那么复合映象  $g \circ f$  在其定义域上连续. 当  $f$  在  $X$  上连续,  $g$  在  $Y$  上连续, 那么  $g \circ f$  在  $X$  上连续.

**定义** 设  $(X, d)$  是距离空间,  $S \subset X$ , 把  $d$  限制在  $(S \times S)$  上记为  $d_s$ , 称距离空间  $(S, d_s)$  为由  $S$  导出的  $X$  的距离子空间.

$A \subset S$  称为  $A$  是  $S$  内的开集(闭集)  $\iff A$  作为  $(S, d_s)$  内的开集(闭集).

例如  $S$  是  $\mathbf{R}_1$  内的一些孤立点的集合, 那么作为距离空间  $S$ ,  $S$  的任何子集都是  $S$  内的开集. 但这样的集在  $\mathbf{R}_1$  内并不是开集.

**定理6.41** 设  $(A, d)$  是距离空间  $(S, d)$  的子空间.  $C \subset A$ , 那么

(a)  $C$  是  $A$  内的开集  $\iff \exists S$  的开集  $G$ , 使  $C = G \cap A$ .

(b)  $C$  是  $A$  内的闭集  $\iff \exists S$  的闭集  $F$ , 使  $C = F \cap A$ .

(c)  $C$  在  $A$  内是连通的  $\implies C$  在  $S$  内是连通的.

**证明** (a) 以  $B(P, r)$  表示  $S$  内以  $P$  为中心, 以  $r$  为半径的开球. 若  $P \in A$ , 以  $B_A(p, r)$  表示以  $P$  为中心, 以  $r$  为半径的  $A$  内的开球. 显然  $B_A(p, r) = A \cap B(p, r)$ . 现设  $C$  是  $A$  内的开集,  $\forall p \in A$ ,  $\exists B_A(p, r_p) \subset C$ . 取所有这些球的并

$\bigcup_{p \in C} B_A(p, r_p)$ , 易知

$$C = \bigcup_{p \in C} B_A(p, r_p).$$

因为  $B_A(p, r_p) = A \cap B(p, r_p)$ , 有

$$C = A \cap \left[ \bigcup_{p \in C} B(p, r_p) \right].$$

由任意的开集族的并是开集, 因而  $G = \bigcup_{p \in C} B(p, r_p)$  是  $S$  的开

集. 於是  $C = A \cap G$ .

再设  $C = A \cap G$ ,  $G$  是  $S$  内的开集. 证明  $C$  是  $A$  内的开集.  $\forall p \in C = A \cap G$ .  $p$  既是  $G$  的点, 它是含于  $G$  内的某开球  $B(p, r_p)$  的中心. 因而  $B_A(p, r_p) = A \cap B(p, r_p) \subset A \cap G = C$ . 即  $C$  的每一点关于  $A$  是内点, 由定义  $C$  是  $A$  内的开集.

(b) 可与 (a) 类似来证明. (c) 由 (a), (b) 以及连通性定义可得. 把它们留作习题.

**定义** 设  $f$  是从距离空间  $(S_1, d_1)$  到距离空间  $(S_2, d_2)$  的映象,  $A \subset S_1$ , 称  $f$  在集  $A$  上一致连续  $\iff$  (i)  $f$  的定义域含有  $A$ , (ii) 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当任意  $p, q \in A$ , 且  $d_1(p, q) < \delta$ , 有  $d_2(f(p), f(q)) < \varepsilon$  ( $\delta$  与  $\varepsilon$  有关, 而与  $p, q$  无关).

**注** 若映象  $f$  在集  $A$  上一致连续, 那么它在  $A$  的每一点关于  $A$  是连续的. 但是, 关于不同于  $A$  的集可以不连续. 例如  $f: R_1 \rightarrow R_1$ , 当  $x$  是有理数  $f(x) = 1$ ; 当  $x$  是无理数  $f(x) = 0$ .  $f$  在有理点集  $A$  上一致连续. 它在  $A$  的每一点关于  $A$  连续, 可是  $f$  关于  $R_1$  在任何点都不连续.

**定理 6.42** 设  $A$  是距离空间  $(S_1, d_1)$  的子集,  $f$  是  $A$  上到距离空间  $(S_2, d_2)$  内的连续函数.

(a) 若  $A$  是紧集, 那么  $f(A)$  是紧集.

(b) 若 $A$ 是连通的, 那么 $f(A)$ 是连通的.

(c) 若 $A$ 是紧集, 那么 $f$ 在 $A$ 上一致连续.

(d) 若 $A$ 是紧集且 $f$ 是1-1的, 那么 $f^{-1}$ 连续.

定理6.42的证明留给读者.

**定义** 设 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  是 $\mathbf{R}_1$ 内的区间,  $Z$ 是 $I$ 上到 $\mathbf{R}_N$ 内的连续映象. 称 $Z$ 是逐段线性的 $\iff \exists I$ 内的数 $t_0, t_1, \dots, t_K, a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$ ,  $Z$ 在每个子区间 $I_j = \{x : t_{j-1} \leq x \leq t_j\}$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ )上是线性映象 $Z^j = (Z_1^j, \dots, Z_N^j)$ ,  $Z_i^j = a_i^j x + b_i^j$ , ( $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, K$ ),  $a_i^j, b_i^j$ 是数.

**定理6.43** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内连通开集,  $u, v \in G$ . 那么 $\exists$ 逐段线性映象 $Z : I \rightarrow \mathbf{R}_N$ , 满足 $Z(a) = u, Z(b) = v, Z(I) \subset G$  ( $Z(I)$ 称为联结 $u, v$ 的折线).

**证明** 设 $u$ 是 $G$ 的一定点, 定义集 $G_1 = \{v : v \in G, \text{且} \exists \text{满足定理要求联结} u, v \text{的映象}\}$  因为 $G$ 含有以 $u$ 为中心的某一开球, 这球内的点都可用线性映象与 $u$ 相联结, 因此这一球含于 $G_1$ 内. 设 $v \in G_1$ , 那么 $\exists$ 逐段线性映象 $Z : I \rightarrow \mathbf{R}_N, Z(a) = u, Z(b) = v, Z(I) \subset G_1$ . 因 $G$ 是开集 $\exists$ 球 $B(v, \rho) \subset G$ . 当 $w \in B(v, \rho)$ , 取一大于 $b$ 的数 $c$ , 令 $J = \{x : a \leq x \leq c\}$ . 定义逐段线性映象 $\xi : J \rightarrow \mathbf{R}_N$ ,  $\xi$ 在 $I$ 上与 $Z$ 重合, 在 $J - I$ 上是联结 $\xi(b) = v, \xi(c) = w$ 的线性映象.  $\xi$ 是 $J$ 上合乎要求的逐段线性映象. 再用正比变换把 $\xi$ 变为 $I$ 上的联结 $u, w$ 的逐段线性映象. 于是有 $w \in G_1$ , 这即证明了 $B(v, \rho) \subset G_1$ , 因此 $G_1$ 是开集.

现证 $G = G_1$ . 假定 $G - G_1$ 是非空集. 因为 $G_1$ 是开集,  $G - G_1$ 的极限点不在 $G_1$ 内.  $G$ 是连通的应当有 $v' \in G - G_1$ ,



$v'$  是  $G_1$  的极限点。由  $G$  是开集, 对  $v' \in G$ ,  $\exists$  某开球  $B(v', \rho) \subset G$ 。  $v'$  是  $G_1$  的极限点,  $\exists w' \in G_1 \cap B(v', \rho)$  (图6·11)。

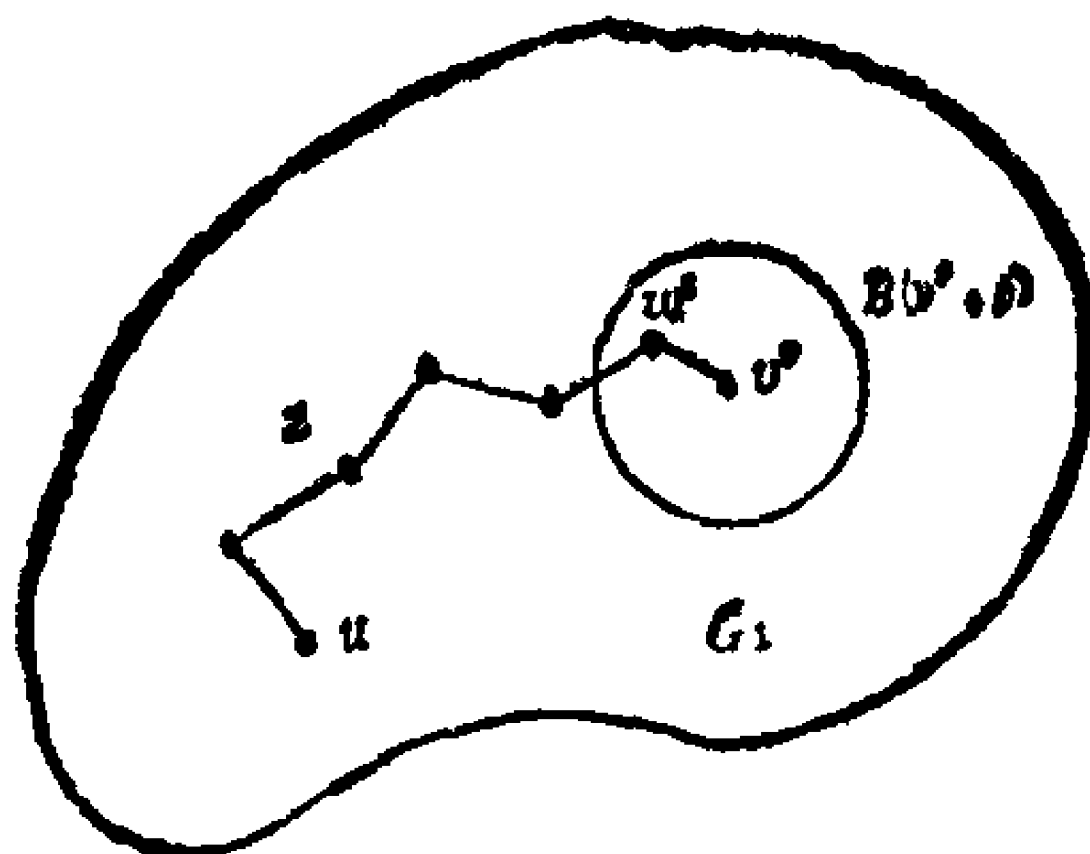


图 6·11

然  $v'$ ,  $w'$  都属于  $B(v', \rho)$ , 存在线性映象联结  $v', w'$ , 进而存在联结  $u, v'$  逐段线性映象。这样  $v' \in G_1$ , 与  $v' \in G - G_1$  相矛盾。于是  $G = G_1$ 。定理证毕。

**定理6·44** (a) 距离空间的集  $S$  是连通的  $\iff S$  不能是两个非空的不相交的  $S$  内的开子集的并。

(b) 距离空间的集  $S$  是连通的  $\iff S$  内的既开且闭的集仅有  $S$  及空集  $\varnothing$ 。

**证明** (a) 设  $S$  是不连通的。那么  $\exists S_1, S_2$  是非空的分离的集, 且  $S = S_1 \cup S_2$ 。由分离集的定义彼此不含有另一集的极限点, 这样  $\forall p \in S_1, p$  是与  $S_2$  不相交的某个球  $B(p, 2r_p)$  的中心。同理  $S_2$  的每一点  $q$  是不含  $S_1$  的点的某个球  $B(q, 2\rho_q)$  的中心。定义

$$G_1 = \bigcup_{p \in S_1} B(p, r_p), \quad G_2 = \bigcup_{q \in S_2} B(q, \rho_q).$$

显然  $G_1, G_2$  是分别包含  $S_1, S_2$  的开集。我们证明  $G_1 \cap$

$G_2 = \varnothing$ . 设  $\bar{p} \in G_1 \cap G_2$ . 那么  $\exists p \in S_1, q \in S_2, \bar{p} \in B(p, r_1) \cap B(q, \rho_1)$ . 由  $d$  是距离函数, 有

$$d(\bar{p}, p) < r_1 \leq \frac{1}{2}d(p, S_2) \leq \frac{1}{2}d(p, q),$$

$$d(\bar{p}, q) < \rho_1 \leq \frac{1}{2}d(q, S_1) \leq \frac{1}{2}d(p, q).$$

因此

$$\begin{aligned} d(p, q) &\leq d(p, \bar{p}) + d(\bar{p}, q) < \frac{1}{2}d(p, q) + \frac{1}{2}d(p, q) \\ &= d(p, q). \end{aligned}$$

导致  $d(p, q) < d(p, q)$  的矛盾. 于是  $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ . 注意到  $S = (S_1 \cap G_1) \cup (S_2 \cap G_2)$ , 所以  $S$  是  $S$  内的两非空开子集的并.

再证当  $S$  是  $S$  内两非空开子集  $T_1, T_2$  的并时,  $S$  是不连通的.  $T_1$  是  $S$  的开集,  $\exists$  距离空间的开集  $G_1$ , 使  $T_1 = G_1 \cap S$  (定理 6.41(a)). 那么  $\forall p \in T_1, \exists B(p, r) \subset G_1, B(p, r)$  不含  $T_2$  的点. 因此  $T_1$  不含  $T_2$  的极限点. 这恰好表明  $S$  是不连通的.

(b) 的证明容易由 (a) 得出.

## 习 题

1. 设  $(S_1, d_1), (S_2, d_2)$  是距离空间,  $A \subset S_1$ ,  $f$  是  $A$  上到  $S_2$  内的在  $p_0$  点关于  $A$  连续的映象. 假若  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  是  $A$  的序列,  $p_n \rightarrow p_0$ . 证明  $f(p_n) \rightarrow f(p_0)$ .
2. 证明若  $f$  在  $P_0$  点关于  $A$  是连续的,  $P_0 \in C \subset A$ , 那么  $f$  在  $P_0$  点关于  $C$  连续.
3. 设  $f$  是从距离空间  $(S_1, d_1)$  到距离空间  $(S_2, d_2)$  内的

映象。叙述并证明类似定理6·28的极限唯一性定理。

4. 证明定理6·36的(b)。
5. 举出 $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的连续函数 $f$ ，它把一开集映象为一闭集。
6. 设 $(S, d)$ 是距离空间， $A, C$ 是 $S$ 的子集且 $C \subset A$ ，证明若 $C$ 在 $A$ 内是闭的，那么 $C$ 在 $S$ 内是闭的。
7. 证明定理6·41的(b)。
8. 证明定理6·41的(c)。
9. 设 $(S_1, d_1), (S_2, d_2)$ 是距离空间且 $f$ 是 $S_1$ 上到 $S_2$ 内的映象。证明 $f$ 是连续的 $\iff S_2$ 的闭集 $A, f^{-1}(A)$ 是 $S_1$ 内的闭集。
10. 举出一 $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的函数，它在 $\mathbf{R}_1$ 的每一点连续但不一致连续。
11. 设 $(S_1, d_1), (S_2, d_2), (S_3, d_3)$ 都是距离空间， $f$ 是 $S_1$ 上到 $S_2$ 内一致连续映象， $g$ 是在 $S_2$ 上到 $S_3$ 内的一致连续的映象。证明 $g \circ f$ 是 $S_1$ 上一致连续的映象。
12. 证明定理6·42。(a) [提示：参看习题1。]
13. 证明定理6·42。(b)。
14. 证明定理6·42。(c)。
15. 证明定理6·42。(d)。
16. 设 $f, g$ 是在 $(S_1, d_1)$ 上到 $(S_2, d_2)$ 内的连续映象，令 $A$ 是 $S_1$ 中使 $f(p) = g(p)$ 的点 $p$ 的集。证明 $A$ 是闭集。  
[提示：证明 $S_1 - A$ 是开集。]
17. 设 $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \}$ 为 $\mathbf{R}_3$ 内的集。 $p_1 = \left( -\frac{3}{2}, 0, 0 \right), p_2 = \left( \frac{3}{2}, 0, 0 \right)$ 。构造一具体的从 $I = \{ x : 0 \leq x \leq 1 \}$ 到 $\mathbf{R}_3$ 的逐段线性映象 $Z$ ，其

值域属于  $S$ ,  $Z(0) = p_1$ ,  $Z(1) = p_1$ .

18. 证明定理 6·44 (b) .

## § 6·8 压缩映象定理

§ 6·4 的定理 6·22 指出: 距离空间中每个收敛序列是哥西序列. 一般说, 哥西序列却不一定是收敛的.

**定义** 距离空间  $S$  称为完备的  $\iff S$  内的每个哥西序列都收敛于  $S$  的一个点.

由定理 6·23, 凡紧空间是完备的. 我们知道  $R_1$  不是紧空间但它是完备的 (定理 3·12).  $R_N$  也是完备非紧的空间, 下面定理证明  $R_N$  的完备性.

**定理 6·45** 空间  $R_N$  伴之欧几里得距离它是完备的距离空间.

**证明** 我们已证明了  $R_1$  是完备的. 设  $N \geq 2$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  是  $R_N$  内的哥西序列,  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$ . 由

$$d(x_m, x_n) = \left[ \sum_{i=1}^N (x_m^i - x_n^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

固定  $j$ ,  $1 \leq j \leq N$ , 有

$$d(x_m, x_n) = \left[ \sum_{i=1}^N (x_m^i - x_n^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq |x_m^j - x_n^j|.$$

这表明序列  $\{x_n^j\}$  是  $R_1$  内的哥西序列, 它收敛于极限  $x_0^j$ , 由此便有  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N) \in R_N$ .

**定理6.46 (压缩映象定理)** 设 $S$ 是完备距离空间,  $f$ 是 $S$ 上到 $S$ 内的映象, 且对 $x, y \in S$ 有

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) \quad (6.10)$$

其中 $0 < K < 1$  ( $f$ 称为压缩映象), 那么  $\exists$  唯一不动点  $x_0 \in S$ , 使 $f(x_0) = x_0$ . 且对 $\forall x_1 \in S$ , 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ , 得到序列 $\{x_n\}$ , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 成立.

**证明** 于 $S$ 内任取 $x_1$ . 令 $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 由 $f$ 是压缩映象,  $d(x_2, x_3) \leq Kd(x_1, x_2)$ ,  $d(x_3, x_4) \leq Kd(x_2, x_3) \leq K^2d(x_1, x_2)$ . 一般地, 按归纳法有

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq K^{n-1}d(x_1, x_2) \quad (6.11)$$

设 $m > n$ , 都是自然数. 由距离的三角形不等式

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots \\ &\quad + d(x_{m-1}, x_m) \end{aligned}$$

应用不等式 (6.11) 于上式的右端各项, 得出

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_1, x_2) [K^{n-1} + K^n + \dots + K^{m-1}] \\ &= d(x_1, x_2) K^{n-1} [1 + K + \dots + K^{m-n-1}]. \end{aligned}$$

因此

$$d(x_n, x_m) < d(x_1, x_2) K^{n-1} \frac{1}{1-K}.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$ , 由 $0 < K < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} K^{n-1} = 0$ . 因此  $\exists N$ , 使 $n$

$> N$  有  $d(x_1, x_2) K^{n-1} \frac{1}{1-K} < \varepsilon$ , 即  $\{x_n\}$  是  $S$  内的哥西序

列. 由  $S$  是完备的,  $\{x_n\}$  有极限点  $x_0$ . 据 (6.10) 式,  $f$  在  $S$  上是连续的. 因此对  $x_{n+1} = f(x_n)$  取极限便得

$$x_0 = f(x_0).$$

现证不动点是唯一的. 假定另有  $x' \in S$ , 也满足  $x' = f(x')$ . 由 (6.10) 应有

$$d(x_0, x') = d[f(x_0), f(x')] \leq K d(x_0, x').$$

既然  $0 < K < 1$ , 必有  $d(x_0, x') = 0$ , 即  $x_0 = x'$ .

**推论** 设  $R_1$  中区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ , 若  $f : I \rightarrow I$  是在  $I$  内可微的函数, 且对  $I$  的每一内点  $x$  都有  $|f'(x)| \leq K$ ,  $0 < K < 1$ . 那么  $\exists$  唯一的  $x_0 \in I$ ,  $f(x_0) = x_0$ .

**例** 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上可微,  $f(a)$  及  $-f(b)$  属于区间  $J = \{x : 0 \leq x \leq b-a\}$ . 并且存在数  $K$  及  $K'$ , 对  $\forall x \in I$ ,  $-1 < K' \leq f'(x) \leq K < 0$  成立, 证明  $\exists x_0 \in I$ , 使  $f(x_0) = 0$ , 且从  $\forall x_1 \in I$  迭代  $x_{n+1} = f(x_n)$  的序列  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$ .

**解** 令  $g(x) = f(x) + x$ . 由  $f(a)$  及  $-f(b) \in J$ , 可知  $g(a)$ ,  $g(b)$  属于  $I$ , 且由  $g'(x) = 1 + f'(x) > 0$ ,  $g(x)$  是  $I$  上的递增函数, 因此  $g$  映象  $I$  到  $I$  内. 对  $g(x) - g(y)$  应用中值定理, 有

$$|g(x) - g(y)| = |(x - y)(1 + f'(\xi))|, \quad a < \xi < b.$$

于是

$$|g(x) - g(y)| \leq (1 + K)|x - y| = \alpha|x - y|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

由推论  $\exists x_0 \in I, g(x_0) = x_0$ . 于是  $x_0 + f(x_0) = x_0$ , 即  $f(x_0) = 0$ .

应用简单迭代方法求函数零点, 最早是牛顿提出的后来人们称之为牛顿方法, 这一简单方法发展成近代计算数学中的一个重要方法.

设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上有二阶导数,  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ , 且  $\exists M > 0$ , 及  $|f'(x)| \geq \frac{1}{M}$ ,  $f''(x) \leq 2M$ ,

$x \in I$ . 那么对  $\forall x_1 \in I$ , 在某种条件下迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1, 2, \dots$$

收敛于  $x_0 \in I, f(x_0) = 0$ .

由  $x_n$  确定  $x_{n+1}$  的几何意义如图 6.12 所示: 过  $y = f(x)$  在

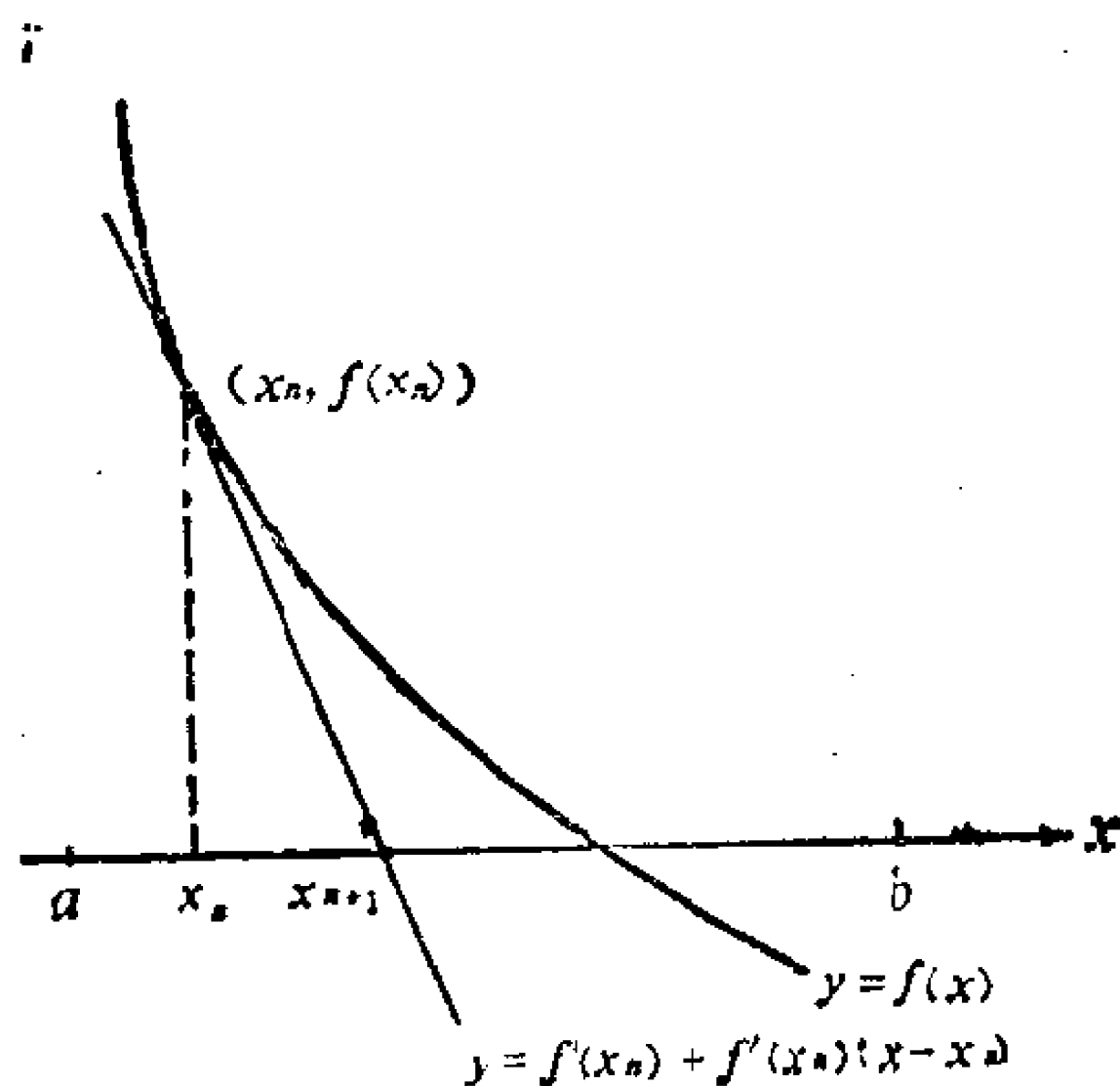


图 6.12

$(x_n, f(x_n))$  点作切线交  $x$  轴于  $x_{n+1}$ . 因此牛顿方法也称切线法.

为证明  $\{x_n\}$  收敛于  $x_0$ ，首先有

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M |f(x_n)|.$$

再对  $f$  在  $x_{n+1}$  点应用台劳定理（参看定理7.6）得

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2, \end{aligned}$$

这里  $\xi$  是介于  $x_n, x_{n+1}$  间的点，由  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  上式

成为  $f(x_{n+1}) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2$ 。因此

$$|f(x_{n+1})| \leq M |x_{n+1} - x_n|^2.$$

假定  $|f(x_1)| < 1$ ， $M < 1$  时，容易由归纳法证明， $x_n \rightarrow x_0$  ( $n \rightarrow \infty$ )，且  $f(x_0) = 0$ 。用不动点的术语来说，牛顿法是

定义  $F(x) = x - \frac{1}{f'(x)}f(x)$ ，构造  $x_{n+1} = F(x_n)$ ，迭代序列

$\{x_n\}$ ，在  $x_n$  收敛的情况下，极限点  $x_0$  是  $F$  的不动点。要注意的是， $x_0$  的存在性一般不能由定理6.46导出，原因是  $F$  一般不满足定理6.46的条件。

压缩映象存在不动点的定理，我们将在后面用它证明隐函数存在定理、微分方程解的存在唯一性定理。至于寻求更一般的不动点定理，用以研究各种方程的解的存在性，已构



成现代分析的重要内容。

## 习 题

1. 设  $f: x \rightarrow \frac{1}{4}(1 - x - \frac{1}{10}x^5)$ ,  $x \in I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ . 对  $g(x) = x + f(x)$  应用不动点定理 (定理 6.46) 证明  $f$  于  $I$  中有零点存在, 作出一迭代过程, 并求其前三项.
2. 研究函数  $f: x \rightarrow \sqrt{1+x^2}$   $x \in I = \{x: 0 \leq x < \infty\}$ . 证明  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  对一切  $x \neq y$  成立, 但  $f$  没有不动点. 由此说明定理 6.46 在  $K = 1$  时结论不真.
3. 证明定理 6.46 的推论.
4. 设  $f: (x, y) \rightarrow (x', y')$ , 是  $R_2 \rightarrow R_2$  的映象

$$\begin{array}{ll} (a) \quad x' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - 2 & x' = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos y + 2 \\ y' = \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y + 3 & y' = \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{2}\sin y - 1. \end{array} \quad (b)$$

证明  $f$  有不动点.

5. 设  $f$  是完备距离空间  $S$  到  $S$  内的映象, 如果  $f^2$  满足定理 6.46 的条件 (即  $f^2$  是  $S \rightarrow S$  的压缩映象), 证明  $f$  有唯一不动点. 如果  $\exists$  自然数  $n_0$ ,  $f^{n_0}$  是压缩映象结论如何?
7. 用牛顿法求  $e^{-x} - 5x = 0$ , 在  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$  内的根 (精确到第三位小数).
8. 用归纳法完成牛顿方法中  $x_n$  收敛性的证明 (在假定  $|f(x_1)| < 1$ ,  $M < 1$  的条件下).

9. 假如按公式:  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_1)}$   $n = 1, 2, \dots$  给出

一与牛顿法相似的迭代序列。试提出一使这一序列收敛的充分条件, 并给出证明。

## 第七章 $R_N$ 内的微分

### § 7.1 偏 导 数

$R_1$ 上实值函数的导数概念对于 $R_N$ 上函数推广为偏导数及全导数的概念.

用 $x, y, z$ 等字母表示 $R_N$ 的元素. $x$ 的分量表示为 $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . $R_N$ 内之欧几里得距离 $d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , 本章采用符号 $|x - y|$ 表示 $d(x, y)$ . $|x|$ 表示 $d(x, 0) = \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , 在 $N=1$ 时 $|x|$ 与 $x$ 的绝对值一致.

**定义** 设 $f: R_N \rightarrow R_1$ , 其定义域是 $R_N$ 的开集. 如下定义的 $N$ 个函数 $f_{,i}$ 称为 $f$ 的一阶偏导数:

$$\begin{aligned} & f_{,i}(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{h}. \end{aligned}$$

这里 $f_{,i}$ 在上述极限存在的点有定义, 称 $f_{,i}$ 为 $f$ 对第 $i$ 个变量 $x_i$ 的一阶偏导数.

$f_{,i}$ 是把 $f$ 的其他变量 $x_j (i \neq j)$ 当作常数 $a_j$ , 对 $R_1 \rightarrow R_1$ 的函数

$$\varphi(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_N) \quad (7.1)$$

求导数(在 $x_i = a_i$ 点), 得 $f_{,i}$ 在 $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ 的值:

$$f_{,i}(a) = \varphi'(a_i). \quad (7.2)$$

表示偏导数的符号有 $f_{,i}$ ,  $D_i f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $f_{x_i}$ 等. 我们将主要采用 $f_{,i}$ 及 $D_i f$ 这两种表示法.

我们知道, 在 $\mathbf{R}_N$ 内联结  $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  及  $a+h = (a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_N+h_N)$  两点的线段之参数方程是

$$x_1 = a_1 + th_1, \quad x_2 = a_2 + th_2, \quad \dots, \quad x_N = a_N + th_N,$$

$$0 \leq t \leq 1.$$

**定理7.1** 设 $\tau_i$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内联结 $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ 及 $(a_1, a_2, \dots, a_i+h_i, \dots, a_N)$ 的线段,  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的定义域包含 $\tau_i$ , 且 $f_{,i}$ 的定义域也包含 $\tau_i$ , 那么 $\exists \xi_i \in (a_i, a_i+h_i)$ , 满足

$$\begin{aligned} & f(a_1, \dots, a_i+h_i, \dots, a_N) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N) \\ &= h_i f_{,i}(a_1, \dots, \xi_i, \dots, a_N) \end{aligned} \quad (7.3)$$

**证明** 用(7.1)式来记(7.3)式之左端, 它成为

$$\varphi(a_i+h_i) - \varphi(a_i).$$

对 $\varphi(x_i)$ 这 $\mathbf{R}_1$ 上的函数应用微分中值定理(定理4.12)得到

$$\varphi(a_i+h_i) - \varphi(a_i) = h_i \varphi'(\xi_i),$$

即(7.3)式.

定理4.8, 有如下的推广.

**定理7·2** (微分的基本引理) 设 $f, f_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的定义域含有以 $a=(a_1, a_2, \dots, a_N)$ 点为中心的某开球, 且诸 $f_i$ 在 $a$ 点连续, 那么

(a)  $f$ 在 $a$ 连续.

(b)  $\exists$ 在 $x=0$ 连续的函数 $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_N(x)$ , 满足 $\varepsilon_1(0)=\varepsilon_2(0)=\dots=\varepsilon_N(0)=0$ 且

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^N [f_i(a)+\varepsilon_i(h)]h_i \quad (7\cdot4)$$

对 $h=(h_1, h_2, \dots, h_N)$ 属于以 $h=0$ 为中心 $r$ 为半径的某一球 $B(0, r)$ 成立.

**证明** 当 $N=2$ , 应用恒等式

$$\begin{aligned} & f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1, a_2) \\ &= [f(a_1+h_1, a_2)-f(a_1, a_2)] \\ &+ [f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1+h_1, a_2)] \end{aligned} \quad (7\cdot5)$$

由 $f, f_1$ 与 $f_2$ 在以 $a=(a_1, a_2)$ 为中心的一球内有定义. 这恒等式在 $h=(h_1, h_2)$ 属于以 $(0, 0)$ 为中心半径充分小的球内成立. 对(7·5)右端方括号内的项应用定理7·1,  $\exists \xi_1(h_1, h_2) \in (a_1, a_1+h_1)$ 及 $\xi_2(h_1, h_2) \in (a_2, a_2+h_2)$  (图7·1). 对 $(h_1, h_2)$ 属于以 $(0, 0)$ 为中心,  $r$ 为半径的球内成立着

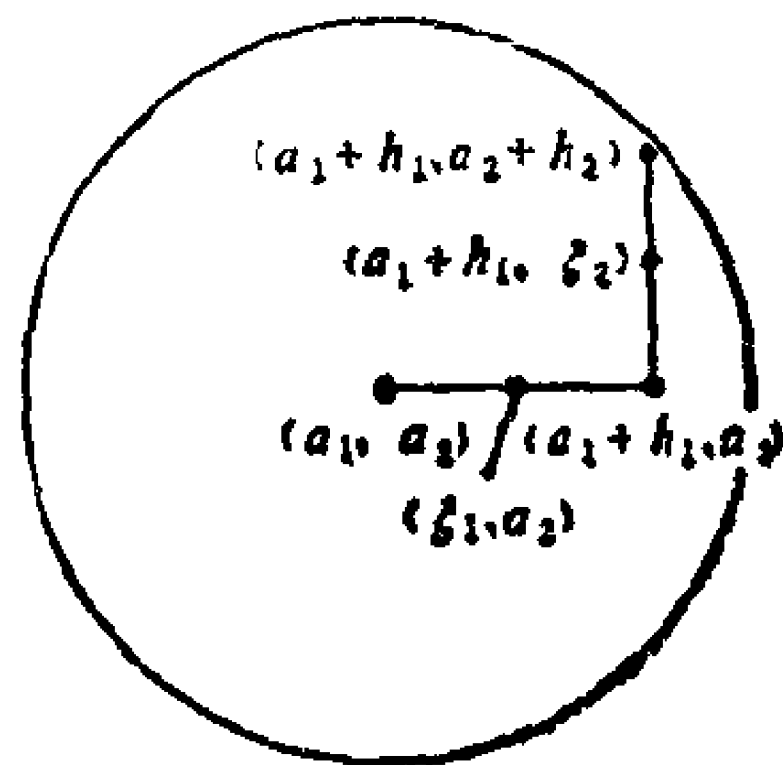


图 7·1

$$\begin{aligned}
& f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\
&= f_{,1}(\xi_1, a_2)h_1 + f_{,2}(a_1 + h_1, \xi_2)h_2.
\end{aligned} \tag{7.6}$$

定义

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1(h_1, h_2) &= f_{,1}(\xi_1, a_2) - f_{,1}(a_1, a_2) \\
\varepsilon_2(h_1, h_2) &= f_{,2}(a_1 + h_1, \xi_2) - f_{,2}(a_1, a_2)
\end{aligned} \tag{7.7}$$

定理要求证明 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 在 $(0, 0)$ 点连续。对 $\forall \varepsilon > 0$ , 由 $f_{,1}$ 与 $f_{,2}$ 在 $(a_1, a_2)$ 连续,  $\exists \delta > 0$ , 使当 $(x_1, x_2)$ 属于以 $a = (a_1, a_2)$ 为中心,  $\delta$ 为半径的球 $B(a, \delta)$ 内有

$$\begin{aligned}
|f_{,1}(x_1, x_2) - f_{,1}(a_1, a_2)| &< \varepsilon, \\
|f_{,2}(x_1, x_2) - f_{,2}(a_1, a_2)| &< \varepsilon.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

综合(7.7)与(7.8), 当 $h_1$ 及 $h_2$ 充分小(因而 $(\xi_1, \xi_2)$ 逼近 $(a_1, a_2)$ ), 便有

$$|\varepsilon_1(h_1, h_2)| < \varepsilon, \quad |\varepsilon_2(h_1, h_2)| < \varepsilon.$$

此外显然 $\varepsilon_1(0, 0) = 0, \varepsilon_2(0, 0) = 0$ . 把(7.7)式代入(7.6)式便得定理之(b). 至于 $f$ 在 $(a_1, a_2)$ 的连续性可立即从(7.4)式导出, 即定理之(a)成立.

对 $N > 2$ 的一般情况, 证明是相似的.

设映象 $g: R_M \rightarrow R_N, f: R_N \rightarrow R_1$ , 且 $g$ 的值域 $R(g)$ 含于 $f$ 的定义域 $D(f)$ 内. 对于 $x = (x_1, x_2, \dots, x_M) \in D(g), g(x) = (g^1(x), g^2(x), \dots, g^N(x)), g$ 的分量 $g^i$ 是 $R_M \rightarrow R_1$ 的函数.

如下定义的函数 $H(x)$ 称为 $f$ 与 $g$ 的复合函数:

$$H(x) = f[g^1(x), g^2(x), \dots, g^N(x)], \quad x \in D(g). \quad (7.9)$$

求复合函数偏导数的链法则是定理4.9的推广.

**定理7.3 (链法则)** 设 $g^i$ 对固定的 $i$ ,  $1 \leq i \leq N$  在  $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)$  点 $g^i$ 存在,  $i = 1, 2, \dots, N$ .  $f$ 及其偏导数 $f_{,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 在点 $a = (g^1(b), g^2(b), \dots, g^N(b))$ 处连续. 那么 (7.9) 式给出的函数 $H$ 于 $b$ 点关于 $x_i$ 可微并且

$$H_{,i}(b) = \sum_{i=1}^N f_{,i}[g^1(b), g^2(b), \dots, g^N(b)] g^i_{,i}(b).$$

**证明** 如下定义 $R_1 \rightarrow R_1$ 的函数:

$$\varphi(x_i) = H(b_1, \dots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_M)$$

$$\psi^i(x_i) = g^i(b_1, \dots, b_{i-1}, x_i, b_{i+1}, \dots, b_M),$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

那么据 (7.9) 式有

$$\varphi(x_i) = f[\psi^1(x_i), \psi^2(x_i), \dots, \psi^N(x_i)].$$

以 $h$ 表示一实数, 定义

$$\Delta \varphi = \varphi(b_i + h) - \varphi(b_i)$$

$$\Delta \psi^i = \psi^i(b_i + h) - \psi^i(b_i), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

因为每一 $\psi^i$ 在 $b_i$ 连续, 因而当 $h \rightarrow 0$ 时,  $\Delta \psi^i \rightarrow 0$ , 对 $\varphi$ 应

用定理7·2的 (7·4) 式, 且以  $\Delta \psi^i$  代替 (7·4) 式中  $h_i$ , 得出

$$\Delta \psi = \sum_{i=1}^N \{ f_{,i}[\psi^1(b), \dots, \psi^N(b)] + \varepsilon_i \} \Delta \psi^i. \quad (7 \cdot 10)$$

(7·10) 式中,  $\varepsilon_i = \varepsilon_i(\Delta \psi^1, \dots, \Delta \psi^N)$ , 且当  $\Delta \psi^K \rightarrow 0$  时,  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ ,  $K = 1, 2, \dots, N$ .

对充分小的  $|h|$ , 把 (7·10) 式写成

$$\frac{\Delta \varphi}{h} = \sum_{i=1}^N \{ f_{,i}[g'(b), \dots, g^N(b)] + \varepsilon_i \} \frac{\Delta \psi^i}{h},$$

并令  $h \rightarrow 0$  取极限便得链法则。

**定义** 设  $D \subset \mathbf{R}_N$ ,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 对  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  和实数  $k$ , 用  $kx$  表示  $(kx_1, kx_2, \dots, kx_N)$ . 称  $f$  是  $n$  次齐次函数  $\iff$  (i)  $x \in D$ , 有  $kx \in D$ ,  $k \neq 0$ ; (ii)  $f(kx) = k^n f(x)$ .

函数  $f$  是正  $n$  次齐次的  $\iff$  (i), (ii) 只对  $k > 0$ ,  $x \in D$  成立.

**注** 定义中之  $n$  不必是整数. 例如  $f: (x, y) \rightarrow x^{-\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}}$  是  $-\frac{1}{3}$  次齐次函数. 一个函数可能是正齐次而不是齐次的, 例如  $f: (x, y) \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$  是 1 次正齐次但非齐次.

**定理7·4 (欧拉定理)** 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  是  $n$  次正齐次函数且  $f_{,1}, \dots, f_{,N}$  在  $a \neq 0$  点连续. 那么

$$\sum_{i=1}^N a_i f_{,i}(a) = n f(a). \quad (7 \cdot 11)$$



证明留给读者.

## 习 题

1. 设  $D$  是  $\mathbf{R}_N$  内的连通开集.  $f: D \rightarrow \mathbf{R}_1$  具有性质:  $f_{,1} = f_{,2} = \cdots = f_{,N} = 0, x \in D$ . 证明  $f$  在  $D$  内恒等于常数.
2. 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1, g^1, g^2, \dots, g^N$  是  $N$  个  $\mathbf{R}_M \rightarrow \mathbf{R}_1$  的函数,  $h^1, h^2, \dots, h^M$  是  $M$  个从  $\mathbf{R}_p \rightarrow \mathbf{R}_1$  的函数. 若定义  $H(x) = f\{g^1[h^1(x), \dots, h^M(x)], g^2[h^1(x), \dots, h^M(x)], \dots, g^N[h^1(x), \dots, h^M(x)]\}$ , 给出  $H_{,i}(x)$  的链法则的公式.
3. 对  $N = 3$  写出定理 7.2.
- \*4. 设  $f: \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 其定义为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

- (a) 证明  $f$  在  $x = 0, y = 0$  点不连续.
  - (b) 证明  $f_{,1}, f_{,2}$  在  $x = y = 0$  存在.
  - (c) 试问 (a), (b) 是否与定理 7.2 相矛盾?
5. 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  是 0 次齐次函数, 通过直接计算验证  $f$  满

足欧拉微分方程:  $\sum_{i=1}^N x_i f_{,i} = 0$ .

6. 证明定理 7.4.

## § 7.2 高阶偏导数和台劳定理

**定义** 设 $f$ 是从 $R_N$ 到 $R_1$ 的函数。我们定义 $f$ 的二阶偏导数 $f_{,ij}$ 是一阶偏导数 $f_{,i}$ 对 $x_j$ 的偏导数,三阶偏导数 $f_{,ijk}$ 是 $f_{,ij}$ 对 $x_k$ 的偏导数,四阶、五阶等更高阶偏导数同样归纳地定义。

自然地提出 $i \neq j$ 时,  $f_{,ij}$ 与 $f_{,ji}$ 是否相等,即求导次序是否影响结果的问题。可以举出简单的例子说明求导次序不同结果不同(习题3)。下面定理给出可交换求导次序的充分条件。

**定理7.5** 设 $f: R_N \rightarrow R_1$ ,  $f, f_{,i}, f_{,ij}, f_{,iji}$ 在点 $a$ 处都是连续的,那么

$$f_{,iji}(a) = f_{,ijj}(a).$$

**证明** 对 $N=2, i=1, j=2$ 证明定理。一般情况的证明完全类似。

记 $a = (a_1, a_2)$ , 定义

$$\begin{aligned} \Delta_2 f &= f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) \\ &\quad - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2). \end{aligned} \quad (7.12)$$

我们将证明当 $h \rightarrow 0$ ,  $\frac{\Delta_2 f}{h^2}$ 既以 $f_{,1;2}(a_1, a_2)$ , 又以

$f_{,2;1}(a_1, a_2)$ 为极限。由此得出 $f_{,1;2}(a_1, a_2) = f_{,2;1}(a_1, a_2)$

$a_2$ ). 定义

$$\varphi(s) = f(a_1 + s, a_2 + h) - f(a_1 + s, a_2), \quad (7.13)$$

$$\psi(t) = f(a_1 + h, a_2 + t) - f(a_1, a_2 + t). \quad (7.14)$$

那么

$$\Delta_2 f = \varphi(h) - \varphi(0), \text{ 同时 } \Delta_2 f = \psi(h) - \psi(0). \quad (7.15)$$

对 (7.15) 右端应用微分中值定理便得

$$\Delta_2 f = \varphi'(s_1)h, \quad \Delta_2 f = \psi'(t_1)h, \quad (s_1, t_1 \text{ 都介于 } 0 \text{ 与 } h \text{ 间}). \quad (7.16)$$

由 (7.13), (7.14) 导出

$$\varphi'(s_1) = f_{,1}(a_1 + s_1, a_2 + h) - f_{,1}(a_1 + s_1, a_2), \quad (7.17)$$

$$\psi'(t_1) = f_{,2}(a_1 + h, a_2 + t_1) - f_{,2}(a_1, a_2 + t_1). \quad (7.18)$$

对 (7.17), (7.18) 式右端应用微分中值定理得

$$\varphi'(s_1) = f_{,1;2}(a_1 + s_1, a_2 + t_2)h,$$

$$\psi'(t_1) = f_{,2;1}(a_1 + s_2, a_2 + t_1)h, \quad s_2, t_2 \text{ 都介于 } 0,$$

$h$  间。把上述等式代入 (7.16) 得到

$$\frac{1}{h^2} \Delta_2 f = f_{,1;2}(a_1 + s_1, a_2 + t_2)$$

$$= f_{,2;1}(a_1 + s_2, a_2 + t_1),$$

令  $h \rightarrow 0$  注意到  $s_1, s_2, t_1$  及  $t_2$  都随  $h$  趋向于零, 由  $f_{,1;2}$  及  $f_{,2;1}$  于  $a$  点连续便有

$$f_{,1;2}(a_1, a_2) = f_{,2;1}(a_1, a_2).$$

定义  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbf{R}_N$ ,  $\alpha_i$  是非负整数, ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 称  $\alpha$  为多重指数. 定义  $\alpha$  的次数  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$ . 推广阶乘符号于多重指数  $\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdots \alpha_N!$ . 若  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)$  是另一多重指数, 定义  $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_N + \beta_N)$ .  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}_N$ ,  $x$  的  $\alpha$  幂定义为  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_N^{\alpha_N}$ .

显然定义中  $x^\alpha$  的次数为  $|\alpha|$ .  $\mathbf{R}_N$  上  $n$  次多项式指形如

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} c_\alpha x^\alpha \quad (7.19)$$

的函数,  $\alpha$  是多重指数,  $c_\alpha$  是常数.

例1 设  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4$ , 把  $f$  写成 (7.19) 形式.

解 令  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ , 因多项式是 3 次的, 所以  $|\alpha| \leq 3$ , 那么

$$f(x_1, x_2) = \sum_{|\alpha| \leq 3} c_{\alpha_1, \alpha_2} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

其中  $c_{30} = 1$ ,  $c_{12} = 3$ ,  $c_{21} = c_{03} = 0$ ,  $c_{20} = -3$ ,

$c_{11} = 0$ ,  $c_{02} = -3$ ,  $c_{10} = c_{01} = 0$ ,  $c_{00} = 4$ .

引理 7.1 (二项式定理) 设  $x, y \in \mathbf{R}_1$ ,  $n$  是自然数, 那么

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x^{n-j} y^j.$$

引理容易由归纳法证明，把它留给读者。

多项式定理是二项式定理的推广，它将应用于函数的展开。

**引理7.2 (多项式定理)** 设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in R_N$ ,  $n$  是自然数，那么

$$\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^n = \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a!} x^a = \sum_{a_1+a_2+\dots+a_N=n} \frac{n!}{a_1! \cdots a_N!} x_1^{a_1} \cdots x_N^{a_N}. \quad (7.20)$$

**证明** 对固定的整数  $n$ ，对  $N$  用归纳法证明 (7.20) 式。  
当  $N=1$ ，(7.20) 成为

$$x_1^n = \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a_1!} x_1^n = x_1^n,$$

显然为真。假定 (7.20) 对  $N=K$  成立，我们证明  $N=K+1$  成立。为此，先由二项式定理导出

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2 + \cdots + x_{K+1})^n &= [(x_1 + \cdots + x_K) + x_{K+1}]^n \\ &= \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} x_{K+1}^j (x_1 + \cdots + x_K)^{n-j}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

从归纳假设，(7.21) 右端成为

$$\sum_{j=0}^n \sum_{a_1+\dots+a_K=n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} \frac{(n-j)!}{a_1! \cdots a_K!} x_1^{a_1} \cdots x_K^{a_K} x_{K+1}^j \quad (7.22)$$

令 $a_{K+1} = j$ 且约去 $(n-j)!$ , (7.22)成为

$$\sum_{a_1 + \dots + a_{K+1} = n} \frac{n!}{a_1! \dots a_K! a_{K+1}!} x_1^{a_1} \dots x_K^{a_K} x_{K+1}^{a_{K+1}}$$

即(7.20)对 $N = K + 1$ 成立。按归纳法原理, 定理获证。

设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的开集, 且设 $f: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的二阶偏导数在 $\mathcal{G}$ 内连续, 我们知道 $f_{,i,j} = f_{,j,i}$ 对所有 $i, j$ 成立。表示 $f_{,i,j} = D_i[D_j f] = D_j \circ D_i(f)$ 。把 $D_i, D_j$ 视为映象,  $D_j \circ D_i$ 表 $D_i$ 与 $D_j$ 的复合映象。同样若 $f$ 有三阶或更高阶的导数, 那么

$$D_i \circ D_j \circ D_K(f) = D_i \{ D_j[D_K(f)] \}$$

$$D_i \circ D_j \circ D_K \circ D_L(f) = D_i(D_j \{ D_K[D_L(f)] \})$$

等。当微分次序可以交换时, 省略“ $\circ$ ”符号。微分映象的线性组合称为微分算子, 如 $a, b, c, d$ 是常数时,  $aD_1D_2D_3 + bD_2D_1D_3 + cD_1D_3 + dD_2$ 便是一个微分算子。微分算子可作用到 $\mathbf{R}_N$ 内开集上具有所要求阶数的连续导数的函数上。对于 $\mathbf{R}_N$ 内的形如

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \sum_{|\alpha| \leq n} C_\alpha \xi^\alpha \quad (7.23)$$

的多项式, 我们对应一微分算子,

$$P(D_1, D_2, \dots, D_N) = \sum_{|\alpha| \leq n} C_\alpha D^\alpha, \quad (7.24)$$

其中 $\alpha$ 是多重指数 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ , 那么 $D^\alpha$ 是算子 $D^\alpha =$

$D_1^{a_1} D_2^{a_2} \cdots D_N^{a_N}$ .  $D^\alpha f$  表示  $f$  先对  $x_N$  求  $a_N$  次导数再对  $x_{N-1}$  求  $a_{N-1}$  次导数, 一直计算到  $x_1$  的  $a_1$  次导数. 微分算子 (7.24) 的阶数与多项式次数一致. 多项式 (7.23) 称为算子 (7.24) 的伴随多项式.

**例2** 设  $f: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1} \cos x_2$ . 设多项式  $p(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 + 2\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4$ , 证明  $p(D_1, D_2)f = 0$ .

**解**  $D_1(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_1 + 1)e^{x_1} \cos x_2;$

$$D_1^2(f) = D_1[D_1(f)] = (x_1 + 2)e^{x_1} \cos x_2;$$

$$D_1^3(f) = (x_1 + 3)e^{x_1} \cos x_2; \quad D_1^4(f) = (x_1 + 4)e^{x_1} \cos x_2;$$

$$D_2(f) = -x_1 e^{x_1} \sin x_2; \quad D_2^2(f) = -x_1 e^{x_1} \cos x_2;$$

$$D_1^2 D_2^2(f) = -(x_1 + 2)e^{x_1} \cos x_2; \quad D_2^4(f) = x_1 e^{x_1} \cos x_2.$$

于是

$$p(D_1, D_2)f = D_1^4(f) + 2D_1^2 D_2^2(f) + D_2^4(f) = 0.$$

为了应用微分算子于台劳定理及讨论极值问题, 引进关于微分算子代数运算的一些定义与简单性质.

**定义** 设  $L_1, L_2, \dots, L_K$  是微分算子,  $C_1, C_2, \dots, C_K$  是实数.  $C_1 L_1 + C_2 L_2 + \dots + C_K L_K$  表示算子  $L$ , 其定义为  $L(f) = C_1 L_1(f) + C_2 L_2(f) + \dots + C_K L_K(f)$ ,  $f$  属于诸  $L_i$  定义域的交集.  $L_1 L_2$  定义为  $L_1 L_2(f) = L_1[L_2(f)]$ ,  $L_1 L_2$  的定义域是使  $L_2(f)$  属于  $L_1$  的定义域内的  $L_2$  定义域中那些  $f$  组成. 同样可定义  $L_1 L_2 L_3, L_1 L_2 L_3 L_4$  等.

**引理7·3** 设 $L_1, L_2, \dots, L_K$ 是微分算子,  $C_1, C_2, \dots, C_K$ 是实数. 设 $p_i(\xi)$ 是 $L_i$ 的伴随多项式,  $i=1, 2, \dots, K$ . 那么

$$(i) \sum_{i=1}^K C_i L_i \text{ 的伴随多项式是 } \sum_{i=1}^K C_i p_i(\xi)$$

(ii)  $L_1 L_2 \cdots L_K$  的伴随多项式

$$p(\xi) = p_1(\xi) p_2(\xi) \cdots p_K(\xi).$$

**证明** (i) 设 $n$ 是诸 $L_i$ 的次数之最大者. 可以把 $L_i$ 写为 (允许 $b_{i\alpha}$ 等于零)

$$L_i = \sum_{|\alpha| \leq n} b_{i\alpha} D^\alpha, \quad i=1, 2, \dots, K.$$

于是

$$L = \sum_{i=1}^K C_i L_i = \sum_{i=1}^K C_i \sum_{|\alpha| \leq n} b_{i\alpha} D^\alpha,$$

且与 $L$ 相伴随的多项式是

$$\sum_{i=1}^K C_i \sum_{|\alpha| \leq n} b_{i\alpha} \xi^\alpha = \sum_{i=1}^K C_i p_i(\xi).$$

就 $K=2$ 证明(ii), 一般结果借助归纳法导出. 设

$$L_1 = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha, \quad L_2 = \sum_{|\beta| \leq n} d_\beta D^\beta, \quad L^1 = L_1 L_2.$$

那么



$$L^1(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \cdot \sum_{|\beta| \leq n} d_\beta D^\beta(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq n} C_\alpha d_\beta D^\alpha D^\beta f$$

$$P^1(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sum_{|\beta| \leq n} C_\alpha d_\beta \xi^\alpha \xi^\beta = P_1(\xi) P_2(\xi).$$

**定义** 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  是给定的函数,  $a \in \mathbf{R}_N$ ,  $b \in \mathbf{R}_N$  且  $|b| = 1$ .  $f$  沿方向  $b$  在  $a$  点的方向导数, 表示为  $d_b f(a)$  其定义为

$$d_b f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tb) - f(a)}{t}. \quad (7.25)$$

注意 (7.25) 右端分子是  $f$  在  $\mathbf{R}_N$  内联结  $a$  与  $a + b$  的线段上点  $a + tb$  的值与在  $a$  点的值的差 (图 7.2).  $d_b f(a)$  是  $\mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  的

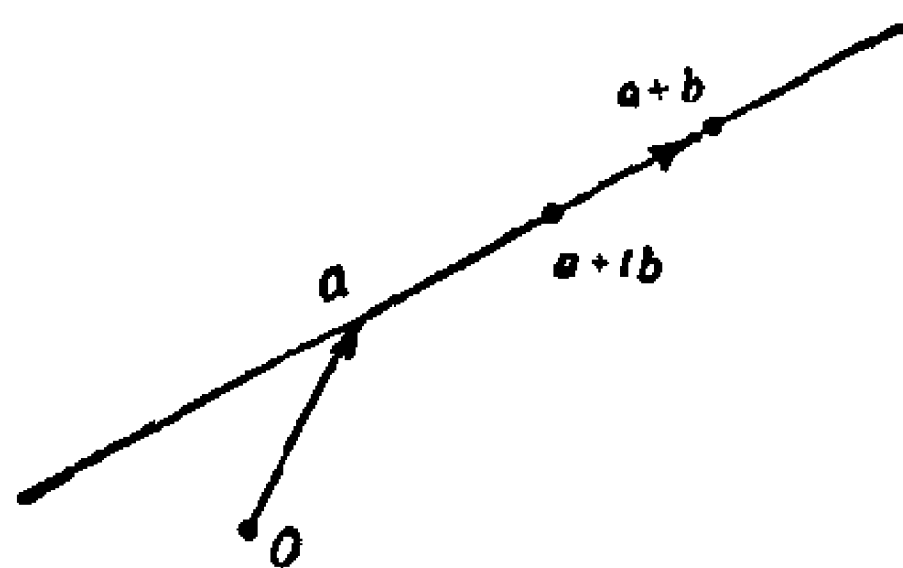


图 7.2

函数,  $d_b f(a)$  沿  $b$  在  $a$  点的方向导数  $d_b[d_b f](a)$  叫  $f$  沿  $b$  在  $a$  点的二阶方向导数记为  $(d_b)^2 f(a)$ . 同样可定义  $(d_b)^n f(a)$ .

**引理 7.4** 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  及其所有直到  $n$  阶偏导数在球  $B(a, r)$  内都连续, 那么

$$(d_b)^n f(a) = \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a!} b^a D^a f(a) \quad (7.26)$$

$n$ 阶方向导数可符号地记成算子

$$(d_b)^n = \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a!} b^a D^a.$$

**证明** 当  $n=1$ , 令  $\varphi(t) = f(a+tb)$  那么  $d_b f(a) = \varphi'(0)$ .

应用链法则求  $\varphi'(t)$ , 记  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ , 使得

$$d_b f(a) = b_1 D_1 f(a) + \dots + b_N D_N f(a),$$

即  $d_b = b_1 D_1 + \dots + b_N D_N$ . 对  $n$  用归纳法可得

$$(d_b)^n f = (b_1 D_1 + \dots + b_N D_N)^n f,$$

再由多项式定理 (引理7.2), 使得 (7.26) 式.

**定理7.6** (单变量函数台劳定理) 设  $f: \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$  在区间  $I = \{x: |x-a| < r\}$  上具有直到  $n+1$  阶的各阶导数. 那么对每个  $x \in I$ , 于  $a, x$  为端点的开区间内存在  $\xi$ , 使

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_{K=0}^n \frac{1}{K!} f^{(K)}(a) (x-a)^K \\ & + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) (x-a)^{n+1} \quad (7.27) \end{aligned}$$

**证明** 为了写起来简便, 设  $x > a$ . 对于开区间中固定

的 $x$ , 定义  $R_n = f(x) - \sum_{K=0}^n \frac{1}{K!} f^{(K)}(a) (x-a)^K$ . 我们来证明  $R_n$

满足 (7·27) 式. 为此于  $[a, x]$  上构造函数  $\varphi$ :

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j - R_n \frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}},$$

$$t \in [a, x].$$

容易根据  $R_n$  的定义算得  $\varphi(a) = \varphi(x) = 0$ . 对  $\varphi(t)$  应用罗尔定理 (定理4·11),  $\exists \xi, a < \xi < x$ , 使  $\varphi'(\xi) = 0$ . 我们计算  $\varphi'(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) + \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!} (x-t)^{j-1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!} (x-t)^j \\ &\quad + (n+1)R_n \frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}. \end{aligned}$$

将上式右端第二个和式之  $j$  换成  $j-1$ , 可得

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -f'(t) + f'(t) + \sum_{j=2}^n \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!} (x-t)^{j-2} \\ &\quad - \sum_{j=2}^n \frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!} (x-t)^{j-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (n+1)R_n \frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} \\
& = - \frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} \left[ \frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \right. \\
& \quad \left. - R_n \right].
\end{aligned}$$

于  $\varphi'(t)$  中代  $t = \xi$ , 并由  $\varphi'(\xi) = 0$  便得

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

于是得到

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \\
&+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}, \xi \text{ 介于 } a, x \text{ 间.}
\end{aligned}$$

注 (i) 定理中使用了  $f^{(0)}(x) = f(x)$  的约定.

(ii) 在  $n=0$  时, (7.27) 式就是中值定理. (7.27) 式中  $n$  次多项式

$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  称为  $f(x)$  在  $a$  点的台劳多项式, 用台劳多项式来逼近

$f(x)$ , 误差  $\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$  叫作余项.

现在基于定理 7.6 来证明  $R_N \rightarrow R_1$  函数的台劳定理, 后者又是前者的推广.

**定理 7.7 (带余项的台劳定理)** 设  $f: R_N \rightarrow R_1$  连同它的直到  $n+1$  阶偏导数在球  $B(a, r)$  内连续, 那么对每一  $x \in$

$B(a, r)$ , 在联结  $a, x$  的线段内存在点  $\xi$  使

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(\xi) (x-a)^\alpha \quad (7.28)$$

**证明** 若  $x = a$  结果显然. 若  $x \neq a$ , 定义  $b = (b_1, b_2, \dots, b_N)$  其中  $b_i = \frac{x_i - a_i}{|x - a|}$ . 注意到  $|b| = 1$ , 并定义  $\varphi(t) =$

$f(a + tb)$ . 这样, 我们有  $\varphi(0) = f(a)$ , 以及  $\varphi(|x - a|) = f(a + |x - a|b) = f(x)$ . 由链法则及归纳法可知  $\varphi$  具有直到  $n+1$  阶连续的导数. 现在应用定理 7.6 于  $\varphi$ . 那么

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) t^j + \frac{1}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(\tau) t^{n+1} \quad (7.29)$$

其中  $\tau$  介于 0,  $t$  之间. 据引理 7.4, 很明显

$$\begin{aligned} \varphi^{(j)}(t) &= (d_t)^j f(a + tb) \\ &= \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} b^\alpha D^\alpha f(a + tb). \end{aligned} \quad (7.30)$$

于 (7.29) 式中置  $t = |x - a|$ , 得出

$$\varphi(|x - a|) = f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) |x - a|^j$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\tau)|x-a|^{n+1}.$$

将 (7.30) 代入上式, 便有

$$f(x)=\sum_{j=0}^n\frac{1}{j!}\left[\sum_{|a|=j}\frac{j!}{a!}b^aD^af(a)|x-a|^j\right] \\ +\frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{|a|=n+1}\frac{(n+1)!}{a!}b^aD^af(\xi)|x-a|^{n+1}\right].$$

按定义  $|x-a|b_i=x_i-a_i$ , 因而  $(x-a)^a=b^a|x-a|^{|a|}$  代入上面  $f(x)$  展开式, 便得 (7.28) .

单变量可微函数极值点的必要条件是满足  $f'(x)=0$ . 当  $x=a$ ,  $f'(a)=0$  成立, 用  $f''(a)$  的正负能够判别  $a$  是  $f(x)$  的极值点. 详细地说: 若在  $a$  点  $f'(a)=0$ ,  $f''(a)<0$ ,  $a$  是  $f$  的极大值点; 若  $f'(a)=0$ ,  $f''(a)>0$ ,  $a$  是  $f$  的极小值点. 借助于台劳定理能够建立多变量函数的相应的结果.

**定义** 设  $f:R_N\rightarrow R_1$  是给定的. 称函数  $f$  在  $a$  点有局部极大(小)值  $\iff \exists$  球  $B(a, r)$ , 使  $x\in B(a, r)$  有  $f(x)-f(a)\leq 0$  ( $\geq 0$ ). 称函数  $f$  在  $a$  点有严格局部极大(小)值  $\iff \exists$  球  $B(a, r)$ , 使  $x\in B(a, r)$ ,  $x\neq a$  有  $f(x)-f(a)< 0$  ( $> 0$ ).  $a$  点称为极大(小)值点. 笼统地称为极值点.

若  $f\exists$  偏导数, 称  $a$  点为临界点  $\iff D_i f(a)=0, i=1, \dots, N$ .

容易由定义导出, 在  $f$  可微条件下, 极值点是临界点. 但临界点不必是极值点.

**定理7·8 (二阶导数判别法)** 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  及其直到二阶的偏导数在球  $B(a, r)$  内连续,  $a$  点是  $f$  的临界点. 对  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ , 定义  $\Delta f(a, h) = f(a+h) - f(a)$ ; 并且定义

$$Q(h) = \sum_{|a|=2} \frac{1}{a!} D^a f(a) h^a = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^N D_i D_j f(a) h_i h_j \quad (7.31)$$

(a) 若对  $\forall h \neq 0$ ,  $Q(h) > 0$  (即(7.31)是正定二次型), 那么  $f$  在  $a$  点有严格局部极小值.

(b) 若对  $\forall h \neq 0$ ,  $Q(h) < 0$  (即(7.31)是负定二次型), 那么  $f$  在  $a$  点有严格局部极大值.

(c) 若  $Q(h)$  有正的最大值及负的最小值, 那么  $\Delta f(a, h)$  在球  $B(a, \rho)$  内变号, 这里  $0 < \rho < r$ .

**证明** 我们仅证明(a), (b)及(c)可类似证明. 于台劳定理(定理7·7)中, 取  $n=1$ ,  $x=a+h$ , 得

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{|a|=1} D^a f(a) h^a + \sum_{|a|=2} \frac{1}{a!} D^a f(\xi) h^a, \quad (7.32)$$

其中  $\xi$  位于联结  $a$ ,  $a+h$  的线段上. 由  $a$  是  $f$  的临界点. 那么(7.32)式可写成

$$\Delta f(a, h) = \sum_{|a|=2} \frac{1}{a!} D^a f(a) h^a$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(a)] h^\alpha. \quad (7.33)$$

令

$$\varepsilon(h) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} [D^\alpha f(\xi) - D^\alpha f(a)] \frac{h^\alpha}{(|h|)^2},$$

(7.33) 式可写成

$$\Delta f(a, h) = Q(h) + (|h|)^2 \varepsilon(h) \quad (7.34)$$

由  $f$  的二阶偏导数在  $a$  点邻域内连续, 所以当  $h \rightarrow 0$  时  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$   
同时

$$\begin{aligned} Q(h) &= (|h|)^2 \sum_{i,j=1}^N D_i D_j f(a) \frac{h_i}{|h|} \cdot \frac{h_j}{|h|} \\ &\equiv (|h|)^2 Q_1(h), \end{aligned}$$

之中的  $Q_1(h)$  对  $h$  在  $\mathbf{R}_N$  的单位闭球上连续。据 (a) 的假设条件,  $Q_1(h)$  在单位闭球上的最小值  $m > 0$ , 即对一切  $h$

$$Q(h) \geq m(|h|)^2.$$

现取  $|h|$  使  $|\varepsilon(h)| < \frac{m}{2}$ . 将  $Q(h) \geq m(|h|)^2$  及  $|\varepsilon(h)| < \frac{m}{2}$  代

入 (7.34) 式, 得

$$\Delta f(a, h) > \frac{1}{2} (|h|)^2 m$$



对充分小的 $|h|$ ,  $h \neq 0$ 成立. 于是断定 $f$ 在 $a$ 点有严格局部极小值.

注 由(7.31)式给出的 $Q$ 是个二次型. 在线性代数中, 我们知道:  $Q$ 为正(负)定的 $\iff$ 矩阵 $(D_i D_j f(a))$ 的所有特征值都是正(负)的, 当矩阵 $(D_i D_j f(a))$ 的特征值有正也有负时,  $Q$ 的最大值为正, 最小值为负. 通常为了确定 $Q$ 的正(负)定或不定的性质, 不必求出矩阵的所有特征值, 而是化二次型为平方和便能确定 $Q$ 的性质. 因此实际应用定理7.8时, 要把二次型化为平方之代数和.

## 习 题

1. 设 $f: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_1$ 为 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ , 证明 $f$ 满足方程 $f_{,1;1} + f_{,2;2} + f_{,3;3} = 0$ .
2. 设 $f: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ 为 $f(x_1, x_2) = x_1^4 - 2x_1^3 x_2 - x_1 x_2$ ,  $L_1(D) = 2D_1 - 3D_2$ ,  $L_2(D) = D_1 D_2$ . 证明 $(L_1 L_2)(f) = (L_2 L_1)(f)$ .
3. 设 $f: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

证明  $f_{,1;2}(0, 0) = -1$ ,  $f_{,2;1}(0, 0) = 1$ .

4. 写出定理7.5一般情况的证明.
5. 证明二项式定理(引理7.1).
6. 对函数 $f: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ 及 $n=2$ 写出 $f$ 的台劳展开式.
7. 求函数 $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 3x_1 x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 + 4$ 的局部

极值.

8. 求函数  $f: \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_1$  的临界点.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ + 3x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_1 - 5x_2 + 7.$$

9. 给出定理7.8中(b)与(c)的证明.

习题10—12确定二次型  $Q: \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_1$  是正定、负定或是不定的性质.

$$10. Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ - 2x_1x_3.$$

$$11. Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ - 6x_2x_3.$$

$$12. Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3.$$

### § 7.3 多变量函数的微分

函数  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  的偏导数, 作为单变量函数导数的推广, 它有许多应用. 然而使人不满意的是: 它是从  $x \rightarrow a$  的各种方式中选取特殊方向上进行微分的. 现在把单变量导数作为差商与  $x \rightarrow a$  的方式无关的极限推广到多变量函数.

设  $A$  是  $\mathbf{R}_N$  的开集,  $f$  与  $g$  都是从  $A$  到  $\mathbf{R}_1$  内的函数. 以  $d(x, y)$  或  $|x - y|$  表示  $\mathbf{R}_N$  中  $x, y$  间的欧几里得距离.

**定义** 称函数  $f$  与  $g$  在  $a \in A$  点相切  $\iff$  (i)  $f(a) = g(a)$  且

$$(ii) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{|f(x) - g(x)|}{d(x, a)} = 0.$$

由定义, 易知若  $h$  与  $g$  也在  $a$  点相切, 那么  $f$  与  $h$  在  $a$  点相

切。事实上，这由

$$\frac{|f(x) - h(x)|}{d(x, a)} \leq \frac{|f(x) - g(x)|}{d(x, a)} + \frac{|g(x) - h(x)|}{d(x, a)}$$

在 $x \rightarrow a$ 时，右端两项趋向于零便知。

设 $L: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是线性函数：

$$L(x) = b_0 + \sum_{K=1}^N b_K x_K,$$

其中 $b_0, b_1, b_2, \dots, b_N$ 是常数。当函数 $f$ 在 $a$ 点与一线性函数相切，这线性函数是唯一的。

**定理7.9** 设 $L_1, L_2$ 都是与函数 $f$ 在 $a$ 点相切的线性函数，那么 $L_1 \equiv L_2$ 。

**证明** 为了方便，把 $L_1, L_2$ 写成

$$L_1(x) = C_0 + \sum_{K=1}^N C_K (x_K - a_K),$$

$$L_2(x) = C_0' + \sum_{K=1}^N C_K' (x_K - a_K).$$

首先由相切条件(i)  $L_1(a) = L_2(a) = f(a) \implies C_0 = C_0'$ 。此外，再由相切条件(ii)，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使当 $x$ 满足 $0 < d(x, a) < \delta$ ，便有

$$|L_1(x) - L_2(x)| \leq \varepsilon d(x, a) = \varepsilon \cdot |x - a|. \quad (7.35)$$

$$\text{即 } |L_1(x) - L_2(x)| = \left| \sum_{K=1}^N (C_K - C_K')(x_K - a_K) \right|$$

$$\leq \varepsilon |x - a|.$$

除以 $|x - a|$ 得

$$\left| \sum_{K=1}^N (C_K - C_K') \frac{x_K - a_K}{|x - a|} \right| \leq \varepsilon.$$

由此可以断定 $C_1 = C_1'$ ,  $C_2 = C_2'$ ,  $\dots$ ,  $C_N = C_N'$ . 事实上, 取 $x$ 满足 $0 < |x - a| < \delta$ , 且满足 $x_1 \neq a_1$ ,  $x_2 = a_2, \dots, x_N = a_N$ ,

那么  $\left| \sum_{K=1}^N (C_K - C_K') \frac{x_K - a_K}{|x - a|} \right| = |C_1 - C_1'| \leq \varepsilon$ , 由 $\varepsilon$ 的任

意性,  $C_1 - C_1' = 0$ , 即 $C_1 = C_1'$ . 同理 $C_2 = C_2'$ ,  $\dots$ ,  $C_N = C_N'$ .

**定义** 设 $f: A \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $A$ 是 $\mathbb{R}_N$ 的开集,  $a \in A$ . 称 $f$ 在 $a$ 点可微 $\iff \exists$ 线性函数 $L$ 与 $f$ 在 $a$ 点相切.

**定理7.10** 若 $f$ 在 $a$ 点可微, 那么 $f$ 在 $a$ 点连续.

定理7.10的证明留作习题.

如在§7.1中所见, 函数 $f$ 具有偏导数可以不连续. 定理7.10、定理7.11表明函数可微性比存在偏导数要求具有更强的条件.

**定理7.11** 若 $f$ 在 $a$ 点可微, 那么 $f$ 在 $a$ 点存在偏导数.

**证明** 设 $L$ 是在 $a$ 点与 $f$ 相切的线性函数

$$L(x) = f(a) + \sum_{K=1}^N C_K (x_K - a_K).$$

由相切定义

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{|f(x) - f(a) - \sum_{K=1}^N C_K (x_K - a_K)|}{d(x, a)} = 0. \quad (7.36)$$

取  $x = a + h$ ,  $h = (0, 0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$ , (7.36) 成为

$$\lim_{\substack{h_i \rightarrow 0 \\ h_i \neq 0}} \frac{|f(a + h) - f(a) - C_i h_i|}{|h_i|} = 0,$$

即

$$\lim_{\substack{h_i \rightarrow 0 \\ h_i \neq 0}} \left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h_i} - C_i \right| = 0, \quad (7.37)$$

由(7.37)断定  $f_{,i}(a)$  存在且

$$C_i = f_{,i}(a), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

在补充  $f_{,i}$  连续性条件下有逆定理.

**定理 7.12** 设  $f_{,i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  在  $a$  点连续, 那么  $f$  在  $a$  点可微.

定理 7.12 的证明容易由台劳定理取  $n = 0$  得出.

**定义** 设  $f: R_N \rightarrow R_1$ ,  $a \in R_N$ ,  $f$  在  $a$  点存在所有偏导数, 称  $R_N$  的元素  $(f_{,1}(a), f_{,2}(a), \dots, f_{,N}(a))$  为  $f$  的梯度, 表示

为 $\nabla f$ 或 $\text{grad} f$ .  $\nabla f$ 也称为 $f$ 的导数.

设 $A$ 是 $\mathbf{R}_N$ 的子集,  $f: A \rightarrow \mathbf{R}_1$ 在 $A$ 上可微,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbf{R}_N$ , 定义 $f$ 的全微分 $df$ 为 $A \times \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的函数

$$df(x, h) = \sum_{k=1}^N f_{,k}(x) h_k. \quad (7.38)$$

用内积概念 $df(x, h)$ 是 $\mathbf{R}_N$ 中元素 $\nabla f$ 与 $h$ 的内积, 写作

$$df(x, h) = \nabla f(x) \cdot h.$$

注 等式(7.38)表明 $f$ 的全微分是 $h$ 的线性函数, 它与相切的线性函数的差别仅在 $x=a$ ,  $h=0$ 时,  $df(a, 0)=0$ , 而相切的线性函数 $L(a)=f(a)$ . 由定理7.11可知 $L(a+h)=f(a)+df(a, h)$ .

**定理7.13** 设 $g^1, g^2, \dots, g^N$ 都是由 $\mathbf{R}_M$ 到 $\mathbf{R}_1$ 的函数, 且都在点 $b = (b_1, b_2, \dots, b_M)$ 可微,  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 在点 $a = (g^1(b), g^2(b), \dots, g^N(b))$ 点可微. 那么复合函数 $H(x) = f[g^1(x), g^2(x), \dots, g^N(x)]$ , 在 $b$ 点可微, 且

$$dH(b, h) = \sum_{i=1}^N f_{,i}[g(b)] dg^i(b, h).$$

定理7.13的证明与定理7.3证明相似, 把它留给读者.

## 习 题

1. 设 $f, g$ 都是 $\mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的函数, 且在 $a$ 点可微. 证明 $f+g$ ,  $af$  ( $a$ 是实数) 在 $a$ 点可微.
2. 设 $f: \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_1$ ,  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 e^{x_1 x_2} + x_2 x_3 e^{x_1 x_2} + x_1 x_2 e^{x_1 x_2}$ , 求 $\nabla f$ 及 $df(x, h)$ .
3. 设 $f, g$ 都是 $\mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的可微函数,  $\alpha, \beta$ 是实数, 证明

$$\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g, \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f.$$

4. 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ ,  $g: \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 且  $f$  的值域含于  $g$  的定义域内. 证明  $\nabla[g(f)] = g' \nabla f$ .
5. 若  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $a$  点可微, 那么  $f$  在  $a$  点连续.
6. 若  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $a$  点处所有偏导数连续, 证明  $f$  在  $a$  点可微 (定理 7.12).
7. 设函数  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ ,  $b \in \mathbf{R}_N$ ,  $|b| = 1$ ,  $f$  的偏导数在  $a$  点连续. 证明  $d_b f$  在  $a$  点存在, 且  $(d_b f)(a) = \nabla f(a) \cdot b$ .
8. 设  $A$  是  $\mathbf{R}_N$  内的开集,  $f$  在  $A$  的每一点可微. 把  $\nabla f$  的分量看作从  $\mathbf{R}_N$  到  $\mathbf{R}_1$  的映象在  $A$  的每一点可微. 证明  $f$  的二阶偏导数在  $a \in A$  存在, 且  $D_i D_j f = D_j D_i f$ .
9. 证明定理 7.13.
10. 设  $f, g$  是从  $\mathbf{R}_N$  到  $\mathbf{R}_M$  的映象, 以  $d_N$  及  $d_M$  表  $\mathbf{R}_N$  及  $\mathbf{R}_M$  各自的欧氏距离. 称  $f$  与  $g$  在  $a$  点相切  $\iff$  (i)  $f(a) = g(a)$ , 且

$$(ii) \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow a}} \frac{d_M(f(x), g(x))}{d_N(x, a)} = 0.$$

证明如果  $f$  与线性映象  $L: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_M$  (代数中  $L$  称为线性变换) 在  $a$  点相切, 则  $L$  是唯一的. [提示: 将  $L$  写成  $M$  个线性函数, 由定理 7.9 证明导出]

11. 设  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_M$ ,  $f$  的分量为  $f^1, f^2, \dots, f^M$ , 利用习题 10 定义  $f$  的可微性. 证明当  $f$  在  $a$  点可微, 则  $f^1, f^2, \dots, f^M$  在  $a$  点存在偏导数.
- \*12. 设  $A$  是  $\mathbf{R}_N$  的闭区域.  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  在含有  $A$  的区域上可微且  $f$  的最大值点  $a \in \partial A$ . 那么在  $a$  点,  $f$  沿  $\partial A$  指向  $A$  内部的法线的方向导数  $d_n f \leq 0$ .

## § 7.4 单一方程的隐函数定理

在 $\mathbf{R}_2$ 中给出形如

$$F(x, y) = 0 \quad (7.39)$$

的方程，它的解集定义了 $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的关系。如果在区间  $I = \{x : x_0 - h < x < x_0 + h\}$  上，对每个  $x \in I$  存在唯一的  $y$  满足  $F(x, y) = 0$ ，那么就说 (7.39) 定义了一个  $I$  上的隐函数。从图 7.3 所表示关系 (7.39) 的图象，可以看出在  $F = 0$  的不包

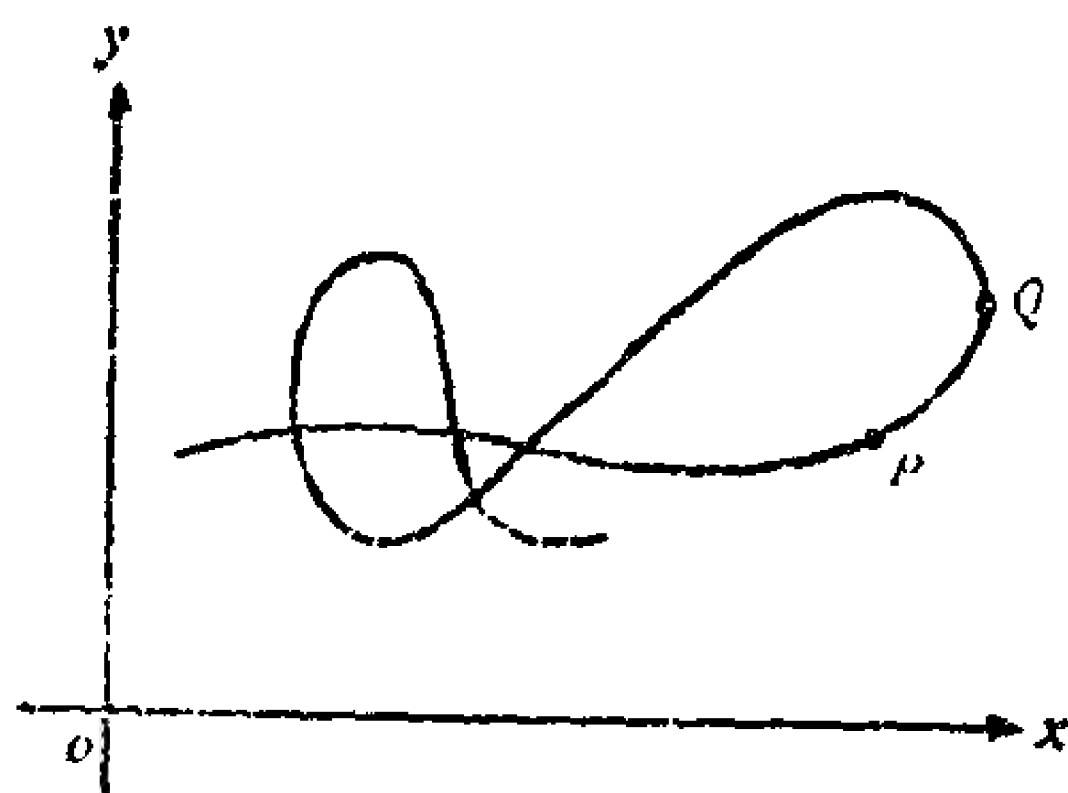


图 7.3

含  $Q$  的任一  $p$  点邻域内都定义一个函数  $x \rightarrow y$ ，而在含有  $Q$  点的邻域内便不能确定一  $x$  的函数  $y$ 。隐函数概念是局部意义的，即函数的定义域可能远小于关系 (7.39) 的定义域。 $F(x, y)$  应满足什么条件关系 (7.39) 在包含  $p$  的某邻域内确定一隐函数？



**定理7·14 (隐函数定理)** 设 $F, F_1, F_2$ 都在开集 $A \subset \mathbb{R}_2$ 上连续,  $p(x_0, y_0) \in A$ 并且 $F(x_0, y_0) = 0, F_2(x_0, y_0) \neq 0$ . 那么

(a)  $\exists$  正数 $h$ 与 $K$ , 矩形 $R = \{(x, y) : |x - x_0| < h, |y - y_0| < K\}$  含于 $A$ 内. 对 $\forall x \in I = \{x : |x - x_0| < h\}$ ,  $\exists$  唯一的 $y, y \in J = \{y : |y - y_0| < K\}$  满足方程 $F(x, y) = 0$ . 这些 $(x, y)$ 点的全体构成一定义在 $I$ 上, 在 $J$ 内取值的函数 $f$ .

(b) 函数 $f$ 及 $f'$ 在 $I$ 内连续.

**证明** 我们将给(a)两个证明. 一个是基于连续函数的基本性质, 另一个是应用不动点定理 (定理6·46).

(a)的第一个证明. 不妨假定 $F_2(x_0, y_0) > 0$ , 否则可用 $-F$ 代替 $F$ 进行讨论. 因为 $F_2(x, y)$ 连续, 那么  $\exists$  方形 $S = \{(x, y) : |x - x_0| \leq K, |y - y_0| \leq K\}$ ,  $K$ 是某个 (充分小) 正数,  $F_2$ 在 $S$ 上为正. 对于每个满足 $|x - x_0| < K$ 的 $x$ ,  $F(x, y)$ 作为 $y$ 的函数是递增的. 由 $F(x_0, y_0) = 0$ 显然有

$$F(x_0, y_0 + K) > 0, F(x_0, y_0 - K) < 0.$$

又 $F$ 在 $S$ 上连续,  $\exists$  正数 $h$  (充分小), 使在 $I = \{x : |x - x_0| < h\}$  上有 $F(x, y_0 + K) > 0$ 及 $F(x, y_0 - K) < 0$ . 固定 $x \in I$ , 由 $F(x, y)$ 关于 $y$ 连续、单增且 $F(x, y_0 + K) > 0$ 及 $F(x, y_0 - K) < 0$ , 根据介值性定理 (定理3·3), 于 $y_0 - K, y_0 + K$ 之间  $\exists \bar{y}, (x, \bar{y}) \in$  矩形 $R = \{(x, y) : |x - x_0| < h, |y - y_0| < K\}$  使 $F(x, \bar{y}) = 0$ . 由 $F_2 > 0$ , 这样的 $\bar{y}$ 是唯一的.  $\bar{y}$ 与 $x$ 相对应的函数 $f$ 便是我们所求的函数 (图7·4).

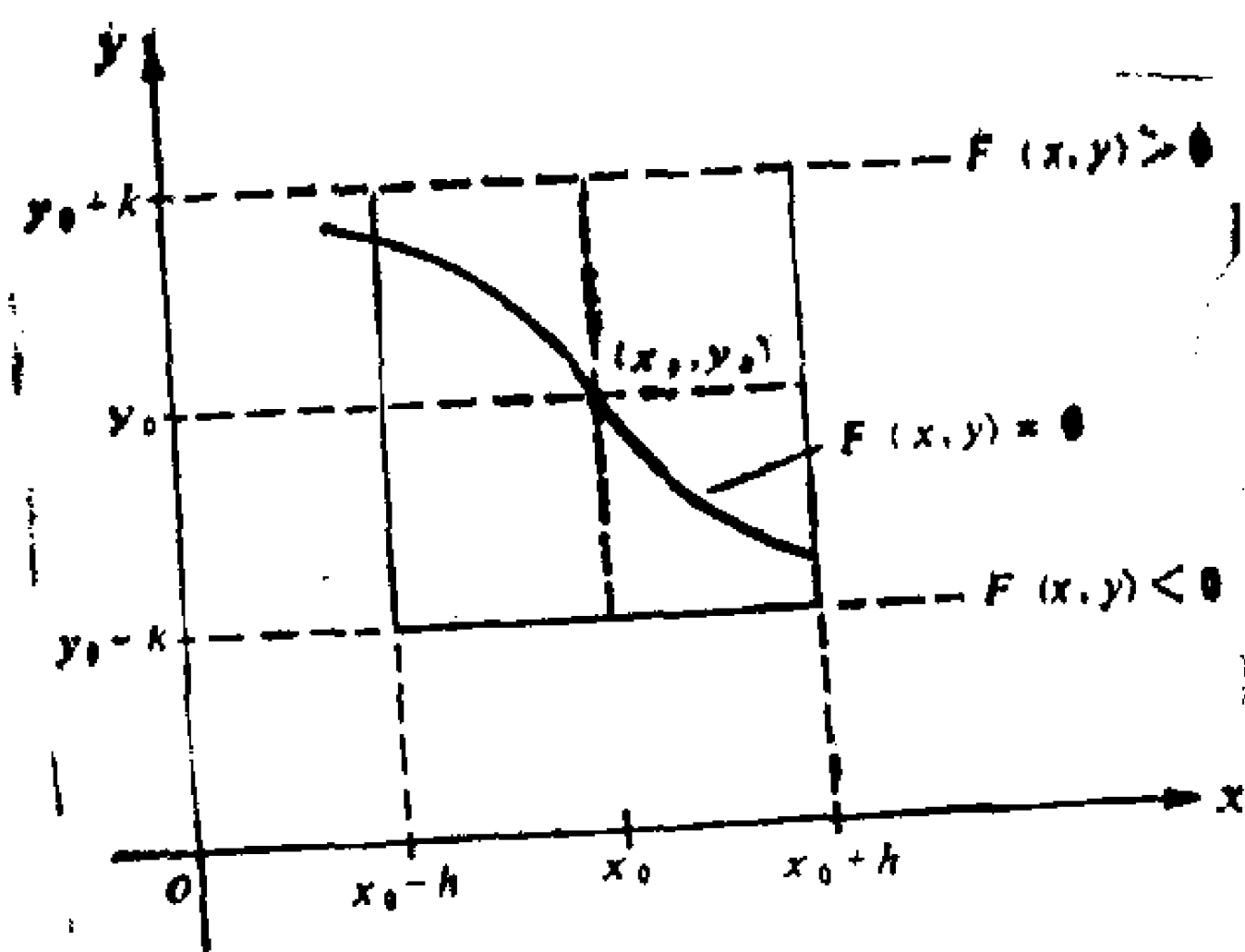


图 7.4

(b) 为了证明  $f$  在  $x_0$  点连续, 对  $\forall \varepsilon > 0$  且  $\varepsilon < K$ , 那么能以  $\varepsilon$  代替 (a) 证明中的  $K$ , 这样的方形记作  $S_\varepsilon$ . 那么  $\exists 0 < h' \leq h$ , 使  $f$  为  $I' = \{x : |x - x_0| < h'\}$  上的函数. 因此, 对  $|x - x_0| < h'$  的  $x$  有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即  $f$  在  $x_0$  点连续. 在任意另外的点  $x' \in I$ , 构造以  $(x_1, f(x_1))$  点为中心的矩形  $S_1$ , 重复上述论证便得  $f$  在  $x_1$  点的连续性.

下面用微分基本引理 (定理 7.2) 证明  $f'$  存在及连续性. 设  $x \in I$ , 选取  $\rho$  使  $(x + \rho) \in I$ . 那么

$$F(x + \rho, f(x + \rho)) = 0, \quad F(x, f(x)) = 0.$$

记  $\Delta f = f(x + \rho) - f(x)$ , 对  $F(x, y)$  用定理 7.2, 有

$$\begin{aligned} & [F_{,1}(x, f) + \varepsilon_1(\rho, \Delta f)]\rho + [F_{,2}(x, f) \\ & + \varepsilon_2(\rho, \Delta f)]\Delta f = 0 \end{aligned} \quad (7.40)$$

这里  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  当  $\rho \rightarrow 0, \Delta f \rightarrow 0$  时趋向于零. 由 (7.40) 有

$$\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho} = - \frac{F_{,1}(x, f(x)) + \varepsilon_1(\rho, \Delta f)}{F_{,2}(x, f(x)) + \varepsilon_2(\rho, \Delta f)}.$$

上式右端当  $\rho \rightarrow 0$  时, 存在极限, 即

$$f'(x) = - \frac{F_{,1}(x, f)}{F_{,2}(x, f)}. \quad (7.41)$$

由定理假设, (7.41) 右端连续, 所以  $f'$  是连续的.

(a) 的第二个证明. 令

$$A = F_{,1}(x_0, y_0), \quad B = F_{,2}(x_0, y_0)$$

且定义  $\varphi$  为:

$$\varphi(x, y) = F(x, y) - A(x - x_0) - B(y - y_0).$$

由假设  $B = F_{,2}(x_0, y_0) \neq 0$ , 令

$$C = \frac{A}{B}, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{B} \varphi(x, y), \quad G(x, y) = \frac{1}{B} F(x, y).$$

显然地

$$G(x, y) = (y - y_0) + C(x - x_0) + \psi(x, y).$$

由  $F$  有连续的偏导数,  $G, \psi$  同样有连续的偏导数, 并由  $A, B$  的定义及  $F(x_0, y_0) = 0$  可知

$$\psi(x_0, y_0) = 0, \quad \psi_{,1}(x_0, y_0) = 0, \quad \psi_{,2}(x_0, y_0) = 0.$$

由连续性,  $\exists K > 0$ , 使当  $(x, y) \in S = \{(x, y) : |x - x_0| < K, |y - y_0| < K\}$ , 有

$$|\psi_1(x, y)| \leq \frac{1}{2}, \quad |\psi_2(x, y)| \leq \frac{1}{2}. \quad (7.42)$$

可以取 $K$ 充分小, 使 $S$ 含于 $\psi$ 的定义域内. 对于 $I_1 = \{x: |x - x_0| < K\}$ 内的每个定点 $x$ , 定义

$$T_x(y) = y_0 - C(x - x_0) - \psi(x, y),$$

$$y \in J = \{y: |y - y_0| < K\}.$$

现在 $F(x, y) = 0 \iff G(x, y) = 0 \iff T_x(y) = y$ . 换句话说对 $I_1$ 内固定的 $x$ ,  $F(x, y) = 0$ 的解是 $y = T_x(y)$ 的不动点. 我们来证明 $\exists x_0$ 的邻域, 在其中的 $x$ ,  $T_x$ 有不动点存在. 设 $0 < h \leq K$ 且 $|x - x_0| \leq h$ , 那么由 (7.42)

$$|T_x(y) - y_0| \leq |C|h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h.$$

当选取 $h$ 这样小, 能使 $(1 + |C|)h \leq K$ , 这时

$$|T_x(y) - y_0| \leq K,$$

即 $T_x(y)$ 是映象 $J$ 到 $J$ 内的. 令 $I = \{x: |x - x_0| < h\}$ , 对 $\forall x \in I$ , 及 $y_1, y_2 \in J$ , 据微分中值定理 (定理4.12) 有

$$|T_x(y_1) - T_x(y_2)| = |-\psi(x, y_1) + \psi(x, y_2)|$$

$$\leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|.$$

因此, 对 $\forall x \in I$ ,  $T_x$ 是 $J$ 到 $J$ 内的压缩映象, 于是 $J$ 内存在唯一的 $y_x$ 使 $T_x(y) = y$ , 即对于 $y$ 有 $F(x, y) = 0$ 成立. 所以 $y$ 是

由 $F(x, y) = 0$ 定义的 $x$ 的函数。

上述定理7·14首先能推广为 $R_{N+1} \rightarrow R_1$ 的关系 $F(x_1, x_2, \dots, x_N, y) = 0$ ，来定义 $R_N \rightarrow R_1$ 的隐函数 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 。

**定理7·15** 设 $F, F_{,1}, F_{,2}, \dots, F_{,N+1}$ 在 $R_{N+1}$ 的开集 $A$ 内连续， $P(x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0, y^0) \in A$ 。记 $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ， $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$ 并设 $F(x^0, y^0) = 0$ ， $F_{,N+1}(x^0, y^0) \neq 0$ 。那么

(a)存在正数 $h$ 及 $K$ ，确定一含于 $A$ 内的 $R_{N+1}$ 中的方格 $R = \{(x, y) : |x_i - x_i^0| < h, i = 1, 2, \dots, N, |y - y^0| < K\}$ ，使对 $x \in I_N = \{x : |x_i - x_i^0| < h, i = 1, 2, \dots, N\}$   $\exists$ 唯一的 $y \in J = \{y : |y - y^0| < K\}$ ，满足方程 $F(x, y) = 0$ ，即 $y$ 是 $x$ 的函数 $y = f(x)$ 。 $f$ 的定义域含有 $I_N$ ，值域在 $J$ 内。

(b)函数 $f$ 及其偏导数 $f_{,1}, f_{,2}, \dots, f_{,N}$ 在 $I_N$ 上连续。

定理7·15的证明可仿照定理7·14写出，两者仅是叙述形式上有点不同，证明的细节留给读者。

第四章关于反函数的定理4·17、定理4·18可以看作定理7·14中 $F(x, y) = y - f(x) = 0$ 的特例。

**推论（反函数定理）** 设 $f$ 是定义在 $R_1$ 内的开集 $A$ 上的实值函数，且设 $f'$ 在 $A$ 内连续， $f(x_0) = y_0$ ， $f'(x_0) \neq 0$ 。那么存在一包含 $y_0$ 的区间 $I$ ，在 $I$ 上存在 $f$ 的反函数 $f^{-1}$ ， $f^{-1}$ 有连续导数且

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \quad (7.43)$$

其中 $y = f(x)$ 。

因为 $f^{-1}(f(x)) = x$ ，可用链法则得(7·43)。但是(7·43)

也可由 (7·41) 取  $F(x, y) = y - f(x)$  得出:

$$[f^{-1}(y)]' = -\frac{F_{,2}}{F_{,1}} = -\frac{1}{-f'(x)} = \frac{1}{f'(x)}.$$

**例1** 设关系

$$F(x, y) = y^3 + 2x^2y - x^4 + 2x + 4y = 0, \quad (7·44)$$

证明在  $R_1$  上定义一个的函数  $y$ .

**解** 因为  $F_{,2} = 3y^2 + 2x^2 + 4$  对  $(x, y) \in R_2$  都不小于4, 对于任一固定的  $x$ ,  $F(x, y)$  是  $y$  的递增函数. 并由 (7·44) 可知当  $y \rightarrow -\infty$  时  $F(x, y) \rightarrow -\infty$ ; 当  $y \rightarrow +\infty$  时  $F(x, y) \rightarrow +\infty$ .  $F$  对  $y$  是连续的. 因此对  $\forall x$ , 相应地仅有一  $y$  值能使  $F(x, y) = 0$ . 根据定理 7·14 我们断定  $\exists R_1$  上的函数  $f$ ,  $f(x)$  是  $R_1$  上的连续可微函数, 满足

$$F(x, f(x)) = 0.$$

**例2** 设关系

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0, \quad (7·45)$$

分别求  $x$  值 ( $y$  值) 使 (7·45) 在  $x$  点 ( $y$  点) 的某邻域内定义  $y$  是  $x$  ( $x$  是  $y$ ) 的函数.

**解** 关系 (7·45) 的图象如图 7·5 所示. 求得

$$F_{,1} = 3x^2 - 6y, \quad F_{,2} = 3y^2 - 6x.$$

我们应当找出  $F(x, y) = 0$  图象上使  $F_{,1}$  或  $F_{,2}$  等于零的点. 容易看出  $(0, 0)$  点处  $F_{,1} = F_{,2} = 0$ . 此外, 当  $F_{,2} = 0$  即  $x = \frac{1}{2}y^2$ , 把它代入 (7·45), 求得  $x = 2\sqrt[3]{4}$ ,  $y = 2\sqrt[3]{2}$ , 在图 7·5 中表示为  $p$  点, 此处曲线的切线平行于  $y$  轴. 据定理 7·14 除  $x =$

0,  $x = 2\sqrt[3]{4}$  之外, 对  $\forall x$ , 在它的某邻域内  $y$  可表示为  $x$  的函数, 同理, 除原点及  $Q = (2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4})$  点之外, 对  $\forall y$ , 在它的某邻域内  $x$  可表示为  $y$  的函数。

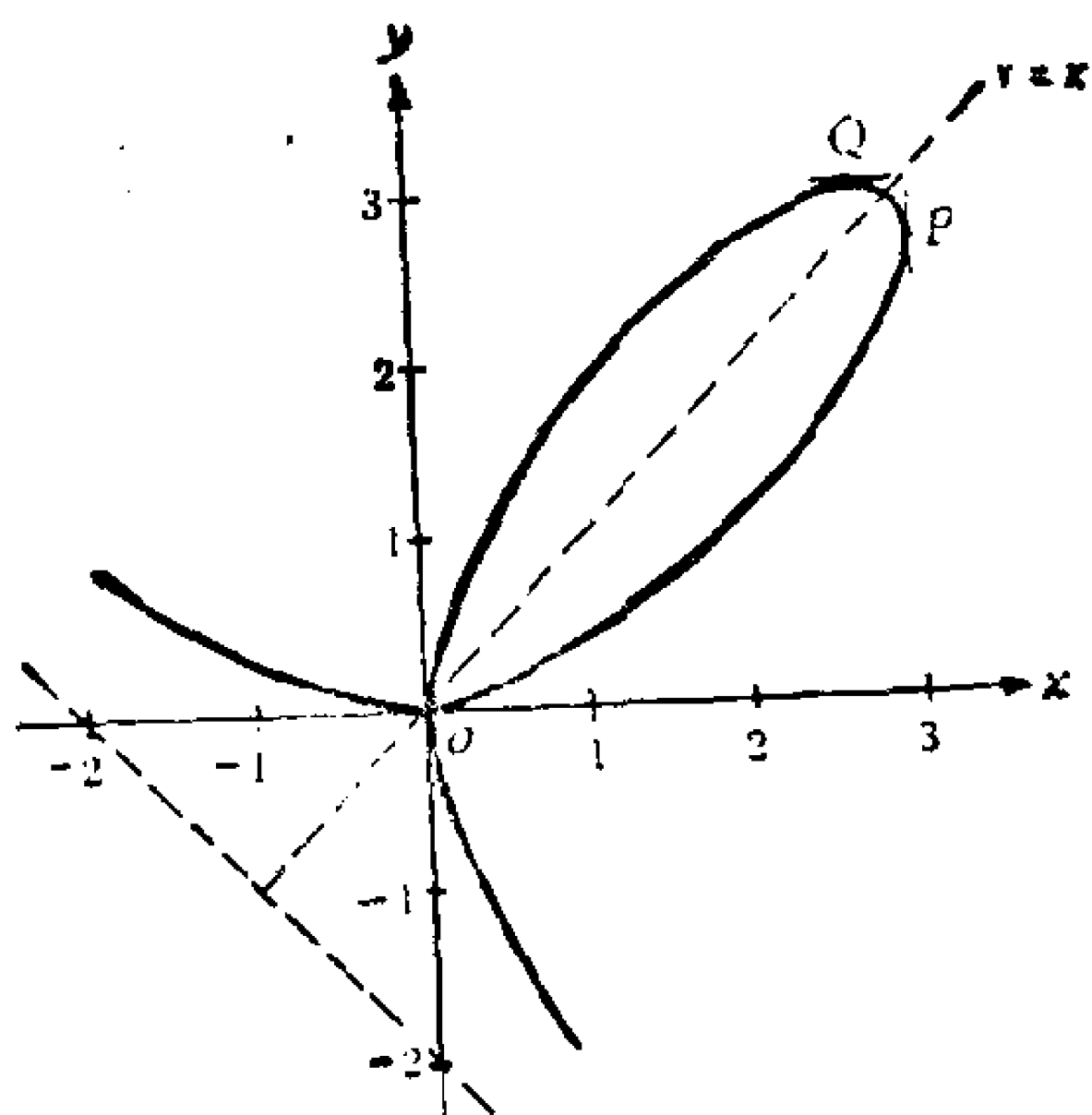


图 7.5

## 习 题

习题1—4, 证明关系  $F(x, y) = 0$  在包含  $x_0$  的某区间  $I$  上  $y$  是  $x$  的函数, 以  $f$  表示这一函数, 求  $f'(x)$ .

1.  $F(x, y) = y^3 + y - x^2 = 0; \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$
2.  $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 3\sqrt{3}).$
3.  $F(x, y) = xy + 2\ln x + 3\ln y - 1 = 0, \quad (x_0, y_0) = (1, 1).$
4.  $F(x, y) = \sin x + 2\cos y - \frac{1}{2} = 0, \quad (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right).$
5. 给出一关系  $F(x, y) = 0$ , 使  $F(x_0, y_0) = 0, F_{,2}(x_0, y_0)$

$= 0$ 但在 $x_0$ 的某邻域内 $y$ 是 $x$ 的函数。这样的例子说明定理7·14的条件是充分非必要的。

习题6—9. 证明在给定点 $p(x_1^0, x_2^0, y^0)$ 的某邻域内关系 $F(x_1, x_2, y) = 0$ 定义 $y$ 为 $(x_1, x_2)$ 的函数。以 $f$ 表示这一函数, 计算 $f, _1$ 及 $f, _2$ 在 $p$ 点的值。

$$6. \quad F(x_1, x_2, y) = x_1^3 + x_2^3 + y^3 - 3x_1x_2y - 4 = 0,$$

$$p(x_1^0, x_2^0, y^0) = (1, 1, 2).$$

$$7. \quad F(x_1, x_2, y) = e^y - y^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

$$p(x_1^0, x_2^0, y^0) = (1, 0, 0).$$

$$8. \quad F(x_1, x_2, y) = x_1 + x_2 - y - \cos(x_1x_2y) = 0,$$

$$p(x_1^0, x_2^0, y^0) = (0, 0, -1).$$

$$9. \quad F(x_1, x_2, y) = x_1 + x_2 + y - e^{x_1x_2y} = 0,$$

$$p(x_1^0, x_2^0, y^0) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

10. 证明定理7·15.

11. 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的函数, 记为 $y = F(x_1, x_2)$ . 指出 $F$ 满足什么条件能保证 $x_2$ 是 $x_1, y$ 的函数.

12. 设 $F(x, y, z) = 0$ , 按隐函数定理 $z = f(x, y)$ ,  $x = g(y, z)$ ,  $y = h(z, x)$ 都存在. 证明

$$f, _1 \cdot g, _1 \cdot h, _1 = -1. (\text{习惯上写作}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1).$$

13. 举出一关系 $F(x_1, x_2, y) = 0$ 在点 $p(x_1^0, x_2^0, y^0)$ 处有 $F(x_1^0, x_2^0, y^0) = F, _3(x_1^0, x_2^0, y^0) = 0$ . 而在 $p$ 点某一邻域内 $y$ 是 $(x_1, x_2)$ 的函数.

14. 设 $F(x, y) = 0$ 满足隐函数定理的条件, 定义了 $y = f(x)$ ,



用 $F$ 的偏导数表示 $f'$ ,  $f''$ .

15. 设 $F(x_1, x_2, y) = 0$ 满足隐函数定理条件, 定义了 $y = f(x_1, x_2)$ , 用 $F$ 的偏导数表示 $f_{,1;1}$ ,  $f_{1,2}$ ,  $f_{,2;2}$ .

## § 7.5 关于方程组的隐函数定理

把隐函数定理推广为方程组的情况.  $R_m$ 中的点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ 也称为矢, 即称 $x$ 为以 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 为分量的 $m$ 维矢.  $R_n$ 中的矢 $y$ 其分量表示为 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ . 把 $R_{m+n}$ 中的矢记为 $(x, y)$ . 研究 $R_{m+n}$ 到 $R_n$ 的矢函数 $F(x, y)$ ,  $F$ 有 $n$ 个分量

$$F^1(x, y), F^2(x, y), \dots, F^n(x, y),$$

每一 $F^i$ 是 $R_{m+n}$ 到 $R_1$ 的函数.

现在的问题是: 由 $F(x, y) = 0$ 在什么条件下, 能确定 $R_m \rightarrow R_n$ 的映象 $f$ , 使 $F(x, f(x)) = 0$ . 用分量写出来是 $n + m$ 个未知量,  $n$ 个方程的方程组

$$F^1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

$$F^2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

.....

$$F^n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

在 $F^1, F^2, \dots, F^n$ 满足什么条件下, 能解出 $n$ 个函数

$$y_1 = f^1(x_1, x_2, \dots, x_m), y_2 = f^2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots$$

$$y_n = f^n(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ 呢?}$$

为了能与定理7·14相类比,用矢量关系来叙述. 在这里 $F(x, y) = 0$ , 等号右端是 $\mathbf{R}_n$ 中的0矢. 与定理7·14中 $F, _1, F, _2$ 相当的是如下定义的矩阵.

**定义** 设 $G$ 是 $\mathbf{R}_{m+n}$ 内的开集,  $F: G \rightarrow \mathbf{R}_n$ 具有连续的一阶偏导数 (指 $F^i$ 有一阶连续偏导数 $F^i, _j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m+n$ ), 定义 $n \times m$ 矩阵 $\nabla_x F$ 及 $n \times n$ 矩阵 $\nabla_y F$ , 分别是

$$\nabla_x F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F^1, & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_m} F^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F^n, & \dots, & \frac{\partial}{\partial x_m} F^n \end{pmatrix},$$

$$\nabla_y F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} F^1, & \dots, & \frac{\partial}{\partial y_n} F^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} F^n, & \dots, & \frac{\partial}{\partial y_n} F^n \end{pmatrix}.$$

容易验证当 $m = n = 1$ ,  $F(x, y)$ 是两个变量的函数时,  $\nabla_x F, \nabla_y F$ 分别就是 $F, _1, F, _2$ . 为了得到 $\nabla_x F, \nabla_y F$ 的性质需要若干线代数的知识.

**定义** 设 $A$ 是 $m \times n$ 的矩阵

$$\begin{bmatrix} a^1_1, & a^1_2, & \dots, & a^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^m_1, & a^m_2, & \dots, & a^m_n \end{bmatrix}$$

定义  $A$  的模  $|A| = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ . 对于矢可看作  $1 \times n$  的

矩阵, 它的模就是它的欧几里得长度.

**引理 7.5** 设  $A$  是  $m \times n$  的矩阵;  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$  是  $n \times 1$  的矩阵即  $n$  个分量的列矢,  $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^m)$  是  $m$  个分量的列矢, 且满足

$$\eta = A\xi$$

或等价地

$$\eta^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi^j \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.46)$$

那么

$$|\eta| \leq |A| |\xi| \quad (7.47)$$

**证明** 固定 (7.46) 中的  $i$ , 两端平方并对右端应用 许瓦兹不等式 (§ 6.1) 得

$$(\eta^i)^2 = \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi^j \right)^2 \leq \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2 \right] \left[ \sum_{j=1}^n (\xi^j)^2 \right].$$

把这一不等式对  $i$  求和并取平方根便是 (7.47) .

**引理 7.6** 设  $b$  是  $R_1 \rightarrow R_n$  在区间  $I = \{t : \alpha \leq t \leq \beta\}$  上连续的矢函数,  $\xi$  是一列矢, 其定义为

$$\xi = \int_{\alpha}^{\beta} b dt \quad \text{即} \quad \xi^i = \int_{\alpha}^{\beta} b^i dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

其中  $b^i: \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$  是  $b$  的分量。那么

$$|\zeta| \leq \int_a^\beta |b| dt.$$

**证明** 不妨设  $|\zeta| \neq 0$ , 令  $\lambda_i = \frac{\zeta^i}{|\zeta|}$ , 按  $|\zeta|$  定义, 便有

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta^i = \sum_{i=1}^n \frac{(\zeta^i)^2}{|\zeta|} = \frac{1}{|\zeta|} \sum_{i=1}^n (\zeta^i)^2 = |\zeta|.$$

于是

$$|\zeta| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \zeta^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^\beta b^i dt = \int_a^\beta \sum_{i=1}^n \lambda_i b^i dt.$$

应用引理7.5.  $\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i b^i \right| \leq |\lambda| |b|$ , 并注意  $|\lambda| = 1$  可得

$$|\zeta| \leq \int_a^\beta |\lambda| |b| dt = \int_a^\beta |b| dt.$$

**引理7.7** 设  $G$  是  $\mathbf{R}_{m+n}$  内的开集且  $F: G \rightarrow \mathbf{R}_n$  是具有连续一阶偏导数的矢函数.  $L$  是联结  $G$  内  $(\overline{x}, \overline{y})$  及  $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$  点的直线段, 并且  $\exists$  正数  $M_1, M_2$  使  $(x, y) \in L$ , 有  $|\nabla_x F| \leq M_1$  及  $|\nabla_y F| \leq M_2$ . 那么

$$|F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F(\overline{x}, \overline{y})| \leq M_1 \cdot |\overline{\overline{x}} - \overline{x}| + M_2 |\overline{\overline{y}} - \overline{y}|.$$

**证明** 联结  $(\overline{x}, \overline{y})$  与  $(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$  的闭线段上的点可表示为  $(\overline{x} + t(\overline{\overline{x}} - \overline{x}), \overline{y} + t(\overline{\overline{y}} - \overline{y}))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . 定义函数

$$f(t) = F(\overline{x} + t(\overline{\overline{x}} - \overline{x}), \overline{y} + t(\overline{\overline{y}} - \overline{y}))$$

并用等式

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt.$$

因为  $f(1) = F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}})$ ,  $f(0) = F(\overline{x}, \overline{y})$ , 上式化成

$$\begin{aligned} & F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F(\overline{x}, \overline{y}) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(\overline{x} + t(\overline{\overline{x}} - \overline{x}), \overline{y} + t(\overline{\overline{y}} - \overline{y})) dt. \end{aligned}$$

对每一分量  $F^i$  用链法则, 可得

$$\begin{aligned} & F^i(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F^i(\overline{x}, \overline{y}) \\ &= \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (F^i)(\overline{\overline{x}}_j - \overline{x}_j) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial y_k} (F^i)(\overline{\overline{y}}_k - \overline{y}_k) \right\} dt \end{aligned}$$

写成矩阵表示式为

$$\begin{aligned} & F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F(\overline{x}, \overline{y}) \\ &= \int_0^1 [\nabla_x F \cdot (\overline{\overline{x}} - \overline{x}) + \nabla_y F \cdot (\overline{\overline{y}} - \overline{y})] dt \end{aligned}$$

由引理7.6及引理7.5有

$$|F(\overline{\overline{x}}, \overline{\overline{y}}) - F(\overline{x}, \overline{y})|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 |\nabla_x F(\bar{x} - \bar{x}) + \nabla_y F \cdot (\bar{y} - \bar{y})| dt \\
&\leq \int_0^1 [|\nabla_x F| \cdot |\bar{x} - \bar{x}| + |\nabla_y F| \cdot |\bar{y} - \bar{y}|] dt \\
&\leq M_1 \cdot |\bar{x} - \bar{x}| + M_2 |\bar{y} - \bar{y}|.
\end{aligned}$$

注 上述引理7.7是最普遍形式的近似的中值定理.我们将用它证明方程组的隐函数定理.

**引理7.8** 设 $B$ 是 $n \times n$ 的矩阵, 且 $|B| < 1$ .  $I$ 表示恒等矩阵,  $A = I - B$ , 那么 $A$ 是非奇异的.

**证明** 考察 $R_n \rightarrow R_n$ 的映象 $y = Ax$ ,  $x \in R_n$ . 证明这一映象是1-1的, 因而它是非奇异的.

设 $x_1, x_2 \in R_n$ . 按 $A = I - B$ , 有

$$Ax_1 - Ax_2 = (x_1 - x_2) - (Bx_1 - Bx_2).$$

并且

$$\begin{aligned}
|Ax_1 - Ax_2| &\geq |x_1 - x_2| - |Bx_1 - Bx_2| \\
&\geq |x_1 - x_2| - |B| \cdot |x_1 - x_2| \\
&\geq |x_1 - x_2| (1 - |B|).
\end{aligned}$$

因此当 $x_1 \neq x_2$ 时,  $|Ax_1 - Ax_2| > 0$ , 即 $Ax_1 \neq Ax_2$ . 可见 $A$ 是1-1的映象, 它是非奇异的.

有了上述准备, 现在来证明隐函数定理. 先用不动点定理证明特殊情况定理.

**定理7.10** 设 $G$ 是 $n_{m+n}$ 的开集,  $G$ 包含原点,  $\psi: G \rightarrow R_n$ 在 $G$ 内包括它的所有一阶偏导数都连续, 并且

$$\psi(0, 0) = 0, \quad \nabla_x \psi(0, 0) = 0, \quad \nabla_y \psi(0, 0) = 0 \quad (7 \cdot 48)$$

再设  $C$  是  $n \times m$  的常数矩阵, 且定义  $F: G \rightarrow R_n$  为

$$F(x, y) = y - Cx - \psi(x, y).$$

那么

(a) 存在正数  $h$  及  $K$ , 使  $B_m(0, h) \times B_n(0, K)$  ( $B_m(0, h)$ ,  $B_n(0, K)$  分别表示以  $R_m$ ,  $R_n$  的原点为中心, 以  $h$ ,  $K$  为半径的开球,  $B_m(0, h) \times B_n(0, K)$  是笛卡尔积), 含于  $G$  内且对  $\forall x \in B_m(0, h)$ ,  $\exists$  唯一的  $y \in B_n(0, K)$ , 满足

$$F(x, y) = 0 \quad \text{或等价的} \quad y = Cx + \psi(x, y).$$

(b) 若以  $g$  表示这一从  $B_m(0, h)$  到  $B_n(0, K)$ , 由序偶  $(x, y)$  给出的函数, 那么  $g$  及其所有一阶偏导数均在  $B_m(0, h)$  内连续.

**证明** (a) 由  $G$  是开集且  $\psi$  在  $G$  内连续,  $\exists$  正数  $K$ , 使闭集  $B = \overline{B_m(0, K) \times B_n(0, K)}$  含于  $G$  内, 且  $\psi$  在  $B$  上连续, 由 (7·48) 式及  $\psi$  及其偏导数在  $G$  内连续,  $K$  可以选取得这样的小, 使

$$|\nabla_x \psi| \leq \frac{1}{2}, \quad |\nabla_y \psi| \leq \frac{1}{2} \quad \text{在 } B \text{ 上成立.}$$

固定  $B_m(0, K)$  中的  $x$ , 定义从  $B_n(0, K)$  到  $R_n$  内的映象:

$$T(y) = Cx + \psi(x, y). \quad (7 \cdot 49)$$

应用引理 7·7 于  $\psi(x, y)$ ,  $(x, y) \in B_m(0, K) \times B_n(0, K)$ ,

$$|\psi(x, y)| = |\psi(x, y) - \psi(0, 0)|$$

$$\begin{aligned} &\leq \max |\nabla_x \psi| \cdot |x-0| + \max |\nabla_y \psi| \cdot |y-0| \\ &\leq \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y|. \end{aligned}$$

因此, 对  $x \in B_m(0, K)$ ,  $y \in B_n(0, K)$  有

$$|T(y)| \leq |C| \cdot |x| + \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|y|. \quad (7.50)$$

$C$  是常数矩阵, 那么  $\exists$  正数  $M$  使  $|C| \leq M$ . 现在选取正数  $h$ , 让  $h < \frac{K}{2M+1}$ . 把映象 (7.49) 限于  $B_m(0, h)$  内, 那么对固定的

的  $\forall x \in B_m(0, h)$  及  $y \in B_n(0, K)$ , 有

$$|T(y)| \leq \left(M + \frac{1}{2}\right)h + \frac{1}{2}K < \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K = K.$$

因此  $T$  映射  $B_n(0, K)$  到  $B_n(0, K)$  内, 且对  $y_1, y_2 \in B_n(0, K)$

$$\begin{aligned} |T(y_1) - T(y_2)| &= |\psi(x, y_1) - \psi(x, y_2)| \\ &\leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

上式右端不等式由引理 7.7 导出. 于是  $T$  是压缩映象, 据定理 6.46, 对固定的  $\forall x \in B_m(0, h)$ ,  $\exists$  唯一的  $y \in B_n(0, K)$ , 使

$$y = T(y) \quad \text{或} \quad y = Cx + \psi(x, y).$$

以  $g$  表示使  $y$  与  $x$  对应的函数,  $y = g(x)$  满足

$$F(x, g(x)) = 0.$$



(b) 证明  $g$  是连续的. 设  $x_1, x_2 \in B_m(0, h)$ ,  $g(x_1) = y_1 \in B_n(0, K)$ ,  $g(x_2) = y_2 \in B_n(0, K)$  或

$$y_1 = Cx_1 + \psi(x_1, y_1), \quad y_2 = Cx_2 + \psi(x_2, y_2).$$

那么由引理 7.7 及  $|C| < M$ , 有

$$|y_1 - y_2| \leq |C(x_2 - x_1)| + |\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)|$$

$$\leq M \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2}(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|).$$

或等价的

$$|y_2 - y_1| \leq (2M + 1)|x_2 - x_1|,$$

即  $|g(x_2) - g(x_1)| \leq (2M + 1)|x_2 - x_1|$ . 因此  $g$  在  $B_m(0, h)$  内连续.

设  $g$  的分量为  $g^1, g^2, \dots, g^n$ , 证明  $\frac{\partial}{\partial x^p} g^i (1 \leq p \leq m)$  存在且连续. 在  $R_m$  内以  $e^p$  表示第  $p$  个单位矢, 即  $e^p = (e_1^p, e_2^p, \dots, e_m^p)$ , 其中  $e_p^p = 1$ ,  $e_j^p = 0$ ,  $j \neq p$ . 固定  $\bar{x} \in B_m(0, h)$ , 并取一足够小的正数  $t_0$ , 使对  $|t| \leq t_0$ , 都有  $\bar{x} + te^p \in B_m(0, h)$ . 现令  $x = \bar{x} + te^p$ , 并记

$$g(x) = Cx + \psi(x, g(x)).$$

这等式的第  $i$  个分量为

$$g^i(x) = \sum_{j=1}^m C_j^i x_j + \psi^i(x, g(x)),$$

其中  $C_j^i$  为矩阵  $C$  的分量。定义  $\Delta g^i$  为

$$\Delta g^i = g^i(\bar{x} + te^p) - g^i(\bar{x}).$$

由定理假设  $\psi$  的一阶偏导数连续，应用微分的基本引理（定理7.2），导出

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g^i}{t} &= C_j^i + \frac{\partial}{\partial x_p} \psi^i(\bar{x}, g(\bar{x})) + \bar{\varepsilon}_p^i(te^p, \Delta g) \\ &\quad + \sum_{K=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial y_K} \psi^i(x, g(\bar{x})) + \bar{\varepsilon}_K^i(te^p, \Delta g) \right] \frac{\Delta g^K}{t}, \end{aligned}$$

这里  $\bar{\varepsilon}_p^i(\rho, \sigma)$  及  $\bar{\varepsilon}_K^i(\rho, \sigma)$  在  $(0, 0)$  点连续且在  $(0, 0)$  点为零。按  $e^p$  的定义，上式可以写成

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g^i}{t} &= \sum_{j=1}^m C_j^i e_j^p + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \psi^i(\bar{x}, g(\bar{x})) e_j^p \\ &\quad + \sum_{j=1}^m \bar{\varepsilon}_j^i(te^p, \Delta g) e_j^p \\ &\quad + \sum_{K=1}^n \left[ \frac{\partial}{\partial y_K} \psi^i(\bar{x}, g(\bar{x})) + \bar{\varepsilon}_K^i(te^p, \Delta g) \right] \frac{\Delta g^K}{t} \end{aligned} \quad (7.51)$$

这里  $\bar{\varepsilon}_j^i(\rho, \sigma)$ ,  $j=1, 2, \dots, m$ , 在  $(0, 0)$  点连续，在  $(0, 0)$  点值为零。定义矩阵

$$A_1(t) = C + \nabla_x \psi(\bar{x}, g(\bar{x})) + \varepsilon(te^p, \Delta g),$$

$$A_2(t) = \nabla_y \psi(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) + \bar{\varepsilon}(te^p, \Delta g),$$

这里  $\bar{\varepsilon}$  的分量为  $\bar{\varepsilon}_j^i$ ,  $\bar{\varepsilon}$  的分量为  $\bar{\varepsilon}_K^i$ ,  $i, K = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . 那么 (7.51) 可以写成矢量方程:

$$\frac{\Delta g}{t} = A_1 e^p + A_2 \frac{\Delta g}{t}. \quad (7.52)$$

以  $I$  表  $n \times n$  单位矩阵, 定义  $B = I - A_2$ , 那么 (7.52) 成为

$$B \frac{\Delta g}{t} = A_1 e^p. \quad (7.53)$$

根据 (7.48) 有  $|A_2(0)| \leq \frac{1}{2}$ . 因此, 据引理 7.8 矩阵  $B(0)$  是非奇异的. 因为  $g$  在  $B_m(0, h)$  内连续, 当  $t \rightarrow 0$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$ . 所以矩阵  $A_1(t)$ ,  $A_2(t)$ ,  $B(t)$  在  $t = 0$  点连续. 于是对充分逼近于 0 的  $t$ ,  $B(t)$  是非奇异的. 令 (7.53) 中的  $t \rightarrow 0$ , 由此断定

$$\frac{\Delta g}{t} \text{ 在 } t \rightarrow 0 \text{ 时极限存在, 且 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{t} = B^{-1}(0) A_1(0) e^p.$$

可见

$$\frac{\partial}{\partial p} g^i = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta g^i}{t}$$

存在且由上式它是连续的.

**定理 7.17** (关于方程组的隐函数定理) 设  $G$  是  $R_{m+n}$  内的开集, 点  $(\bar{x}, \bar{y}) \in G$ .  $F: G \rightarrow R_n$  在  $G$  内有连续的一阶偏导数, 且

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \det \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0 \quad (\det \text{ 为行列式符号}).$$

那么  $\exists$  正数  $h$  与  $K$ , 满足: (a)  $\overline{B_m(\bar{x}, h)} \times \overline{B_n(\bar{y}, K)} \subset G$ ;  
 (b) 对  $\forall x \in B_m(\bar{x}, h)$ ,  $\exists$  唯一的  $y \in B_n(\bar{y}, K)$ , 使  $F(x, y) = 0$ . 若以  $f$  表示由序偶  $(x, y)$  的集所定义的从  $B_m(\bar{x}, h)$  到  $B_n(\bar{y}, K)$  的函数, 那么  $F(x, f(x)) = 0$ ; 并且  $f$  在  $B_m(\bar{x}, h)$  内有连续的一阶偏导数.

**证明** 定义矩阵  $A = \nabla_x F(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $B = \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y})$ , 并记  $F$  为

$$F(x, y) = A(x - \bar{x}) + B(y - \bar{y}) + \varphi(x, y). \quad (7.54)$$

$\varphi$  由 (7.54) 式定义, 显然  $\varphi$  具有性质:

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \nabla_x \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \nabla_y \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

由假设  $B$  非奇异, 存在  $B^{-1}$ , 以  $B^{-1}$  乘 (7.54) 得

$$B^{-1}F = B^{-1}A(x - \bar{x}) + (y - \bar{y}) + B^{-1}\varphi(x, y).$$

分别以  $B^{-1}F$ ,  $(x - \bar{x})$ ,  $(y - \bar{y})$ ,  $-B^{-1}A$ ,  $B^{-1}\varphi$  为定理 7.16 中的  $F$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $C$ ,  $\psi$ , 则定理 7.16 条件都被满足. 于是定理结论对  $B^{-1}F$  成立. 而因  $B^{-1}$  是常数的非奇异矩阵, 结果对  $F$  也成立.

**注** 隐函数  $f$  的一阶偏导数可由  $F$  的一阶偏导数表示出来. 为此, 设

$$F = (F^1, F^2, \dots, F^n), \quad f = (f^1, f^2, \dots, f^n) \text{ 并记}$$

$$F^i(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad (7.55)$$

其中  $y_i = f^i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . 为了求  $f^i$  的偏导数, 依链法则对 (7.55) 关于  $x_p$  求导数可得

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_p} + \sum_{K=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial y_K} \frac{\partial f^K}{\partial x_p} = 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad p=1,2,\dots,m. \quad (7.56)$$

对固定的 $p$ , 把 $\frac{\partial f^K}{\partial x_p}$ 作为未知量, (7.56) 是 $n$ 元 $n$ 个方程的线性方程组, 其系数矩阵在 $(\bar{x}, \bar{y})$ 点的行列式 $\det \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , 由克莱姆法则, 方程组有唯一的解.

**例1** 设 $F(x, y)$ 是 $R_4 \rightarrow R_2$ 的函数:

$$F^1(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + y_2^2 + 4$$

$$F^2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 2x_1x_2 + x_2^2 - 2y_1^2 + 3y_2^4 + 8.$$

$P(\bar{x}, \bar{y}) = (2, -1, 2, 1)$ , 验证 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ ,  $\nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$ , 并求 $F$ 在 $p$ 点所定义的隐函数 $y = f(x)$ 的偏导数.

**解**  $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ 显然成立. 而

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1} = -3y_1^2, \quad \frac{\partial F^1}{\partial y_2} = 2y_2, \quad \frac{\partial F^2}{\partial y_1} = -4y_1, \quad \frac{\partial F^2}{\partial y_2} = 12y_2^3.$$

在 $p$ 点

$$\det(\nabla_y F) = \frac{\partial F^1}{\partial y_1} \frac{\partial F^2}{\partial y_2} - \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \frac{\partial F^2}{\partial y_1} = -128 \neq 0.$$

$$\text{而} \quad \frac{\partial F^1}{\partial x_1} = 2x_1, \quad \frac{\partial F^1}{\partial x_2} = -2x_2,$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_1} = 2x_2, \quad \frac{\partial F^2}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2,$$

将它们在 $p$ 点的值代入 (7.56), 得到分别以 $\frac{\partial f^1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f^2}{\partial x_1}$

及  $\frac{\partial f^1}{\partial x_2}, \frac{\partial f^2}{\partial x_2}$  为未知量的两个二元一次线性方程组, 解

得

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_1} = \frac{3}{8}, \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_1} = \frac{7}{16}, \quad \frac{\partial f^1}{\partial x_2} = \frac{5}{32},$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_2} = -\frac{1}{16}.$$

例2 设  $F: R_5 \rightarrow R_3$ ,

$$F^1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3y_1^2 + 4y_1y_2 - y_2^2 + y_3^3$$

$$F^2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1^2 + 3x_2 - 4x_1x_2 + 4y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2$$

$$F^3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1^3 - x_2^3 + 4y_1^2 + 2y_2 - 3y_3^2.$$

如果  $p(x, y)$  是使  $F(x, y) = 0$ , 且  $\nabla_x F$  非奇异的一个点. 用  $f$  表示方程  $F(x, y) = 0$  定义的隐函数, 求  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  在  $p$  点的值.

解 根据 (7.56) 得线性方程组

$$(-6y_1 + 4y_2) \frac{\partial f^1}{\partial x_1} + (4y_1 - 2y_2) \frac{\partial f^2}{\partial x_1} + 3y_3^2 \frac{\partial f^3}{\partial x_1} = -2x_1$$

$$8y_1 \frac{\partial f^1}{\partial x_1} + (-4y_2) \frac{\partial f^2}{\partial x_1} + 2y_3 \frac{\partial f^3}{\partial x_1} = 4x_2 - 1$$

$$8y_1 \frac{\partial f^1}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial f^2}{\partial x_1} - 6y_3 \frac{\partial f^3}{\partial x_1} = -3x_1^2.$$

解这一方程组得  $\frac{\partial f^1}{\partial x_1}, \frac{\partial f^2}{\partial x_1}, \frac{\partial f^3}{\partial x_1}$  的表示式. 同理可以  
 求出  $\frac{\partial f^1}{\partial x_2}, \frac{\partial f^2}{\partial x_2}, \frac{\partial f^3}{\partial x_2}$ , 细节请读者完成.

**定义** 设  $G$  是  $R_m$  内的开集,  $F: G \rightarrow R_n$  是给定的矢函数,  $K$  是自然数, 称  $F$  属于  $C^K(G)$  类  $\iff F$  在  $G$  上有直到  $K$  阶的连续的偏导数.

定理 7.15 的推论 (关于反函数定理) 很自然地推广到矢函数.

**定理 7.18 (反函数定理)** 设  $G$  是  $R_m$  内包含  $\bar{x}$  点的开集. 假定  $f: G \rightarrow R_n$  属于  $C^1(G)$  类且

$$\bar{y} = f(\bar{x}), \quad \det \nabla_x f(\bar{x}) \neq 0.$$

那么  $\exists$  正数  $h$  与  $K$ , 使球  $B_m(\bar{x}, K) \subset G$  及对  $\forall y \in B_n(\bar{y}, h)$ ,  $\exists$  唯一的点  $x \in B_m(\bar{x}, K)$ , 满足  $f(x) = y$ . 若以  $g$  表示由序偶  $(y, x)$  的集所定义的  $f$  的反函数,  $g$  是由  $B_n(\bar{y}, K)$  到  $B_m(\bar{x}, K)$  内的  $C^1$  类的函数, 且  $f(g(y)) = y$  对  $y \in B_n(\bar{y}, h)$  成立.

**证明** 在定理 7.16 中取  $F(x, y) = y - f(x)$ , 便得定理 7.17.

**注** 单变量函数的反函数定理具有性质: 函数的导数在函数的定义域内不为零, 函数在整个定义域上是 1-1 的. 在定理 7.17 中, 条件  $\det \nabla_x f \neq 0$  不能保证反矢函数在其定义域上是 1-1 的. 例如, 函数  $f: R_2 \rightarrow R_2$  其定义为

$$f^1 = x_1^2 - x_2^2, \quad f^2 = 2x_1 x_2, \quad (7.57)$$

定义域是  $G = \{(x_1, x_2) : r_1 < (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} < r_2\}$ ,  $r_1, r_2$  为正数, 计算出

$$\nabla_x f = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix}$$

$\det \nabla_x f = 4(x_1^2 + x_2^2)$  在  $G$  上恒为正. 可是, 由 (7.57)  $y = f(x)$  对同一  $y$  的值相应地有两个不同的  $x$ , 即在整个  $G$  上对应于每一给定的  $y = (y_1, y_2)$ , 有两不同的  $x = (x_1, x_2)$  与  $y$  相对立.  $y = f(x)$  的逆关系在整个  $G$  上不是函数, 而在  $G$  内的充分小的球内是函数

## 习 题

习题 1—4, 对给定的  $F$  及点  $p$ , 验证隐函数定理成立.

以  $f$  表示这一隐函数, 求  $f$  在  $p$  点的各个一阶偏导数.

1.  $F = (F^1, F^2)$ ,  $P = (0, 0, 0, 0)$ ,

$$F^1 = 2x_1 - 3x_2 + y_1 - y_2, \quad F^2 = x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2.$$

2.  $F = (F^1, F^2)$ ,  $P = (0, 0, 0, 0)$ ,

$$F^1 = 2x_1 - x_2 + 2y_1 - y_2, \quad F^2 = 3x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2.$$

3.  $F = (F^1, F^2)$ ,  $P = (3, -1, 2, 1)$ ,

$$F^1 = x_1 - 2x_2 + y_1 + y_2 - 8,$$

$$F^2 = x_1^2 - 2x_2^2 - y_1^2 + y_2^2 - 4.$$

4.  $F = (F^1, F^2)$ ,  $p = (2, 1, -1, 2)$ ,

$$F^1 = x_1^2 - x_2^2 + y_1 y_2 - y_2^2 + 3,$$

$$F^2 = x_1 + x_2^2 + y_1^2 + y_1 y_2 - 2.$$

5. 设  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $F: \mathbb{R}_4 \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $F$  在  $(x, y)$  点满足隐函数定理条件, 以  $f$  表示由  $F(x, y) = 0$  定义的

隐函数, 求用  $F$  的一阶偏导数表示  $\frac{\partial f^1}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial f^1}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial f^2}{\partial x_1}$ ,



$\frac{\partial f^2}{\partial x_2}$  的公式.

6. 设  $F(x, y)$  是  $\mathbf{R}_{m+2} \rightarrow \mathbf{R}_2$  的函数  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  满足隐函数定理的条件, 以  $f$  表示  $F(x, y) = 0$  定义的隐函数. 用  $F$  的一阶偏导数表示  $\frac{\partial f^i}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ ,

$j = 1, 2, \dots, m$ .

7. 完成例2的解.

8. 设  $F: \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2$ ,  $F = (F^1, F^2)$  其  $F^1 = e^{2x+y}$ ,  $F^2 = (4x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 3y)^{\frac{2}{3}}$ . 证明不存在  $x$  的值, 对这一  $x$  能满足隐函数定理. 求  $F^1$  与  $F^2$  之间的一个关系.

习题9—12, 对给出的矢函数  $f: \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2$ , 验证反函数定理成立并求出反函数.

9.  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_1^2 + x_2$

10.  $y_1 = 2x_1 - 3x_2$ ,  $y_2 = x_1 + 2x_2$ .

11.  $y_1 = x_1 / (1 + x_1 + x_2)$   $y_2 = x_2 / (1 + x_1 + x_2)$ ,  
 $x_1 + x_2 > -1$ .

12.  $y_1 = x_1 \cos(\pi x_2 / 2)$ ,  $y_2 = x_1 \sin(\pi x_2 / 2)$ ,  
 $x_1 > 0$ ,  $-1 < x_2 < 1$ .

13. 设函数  $f: \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_3$ ,  $f^1 = e^{x_1} \cos x_1$ ,  $f^2 = e^{x_1} \sin x_1$ ,  
 $f^3 = 2 - \cos x_3$ . 求反函数定理成立的点  $p(x_1, x_2, x_3)$ .

14. 设函数  $f: \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_2$  满足反函数定理, 以  $x = g(y)$  来记这一反函数. 求用  $f^1$ ,  $f^2$  的偏导数表示  $g^1$ ,  $g^2$  的偏导数的公式, 并求  $\frac{\partial^2 g^1}{\partial y_1^2}$  的公式.

15. 给定  $F: \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_2$ , 对所有满足  $F(x, y) = 0$  的  $x = (x_1, x_2)$

及  $y = (y_1, y_2)$ , 叙述方程  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = 0$  成立的充分条件.

## § 7.6 条件极值与拉格朗日乘数法

在 § 7·2 给出了  $f: \mathbf{R}_n \rightarrow \mathbf{R}_1$  的局部极值点的必要条件是  $f_{,i} = 0, i = 1, 2, \dots, m$ . 还证明了用二阶导数的判别法 (定理 7·8). 在很多应用中, 要求的是对  $f$  的定义域给定一定限制条件——称为  $f$  的约束——之下的局部极值. 约束通常用方程组给出:

[illegible]

(7.58)称为约束条件或边界条件、附加条件.

假定  $f, \varphi^1, \dots, \varphi^K$  都是从  $R_m$  的开集  $D$  上到  $R_1$  的  $C^1$  类函数, 并且  $K < m$ . 这里假定  $K < m$  的理由, 在于当  $K \geq m$  时, (7.58) 可能无解或其解集只含有一个点, 那么满足约束条件 (7.58) 的  $f$  的可能取值不多于一个, 无需讨论  $f$  的极值了. 还假定  $K \times m$  矩阵

$$\begin{pmatrix} \varphi_{;1}^1, & \varphi_{;2}^1, & \cdots, & \varphi_{;m}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{;1}^K, & \varphi_{;2}^K, & \cdots, & \varphi_{;m}^K \end{pmatrix}$$

的秩是 $K$ ，即上述矩阵至少有一 $K \times K$ 的子式的行列式在 $D$

的各点的值异于零。不失一般性，设矩阵的前 $K$ 列上的方阵在 $D$ 内各点行列式的值不为零（如有必要可交换列的次序）。在这些假设条件下，据隐函数定理，在 $\forall \bar{x} \in D$ 的某邻域内用 $x_{K+1}, x_{K+2}, \dots, x_m$ 表示 $x_1, x_2, \dots, x_K$ ，即 $\exists C^1$ 类函数 $g^1, g^2, \dots, g^K$ ，(7.58)可写成

$$\begin{aligned} x_1 &= g^1(x_{K+1}, \dots, x_m) \\ x_2 &= g^2(x_{K+1}, \dots, x_m) \\ &\dots \dots \\ x_K &= g^K(x_{K+1}, \dots, x_m) \end{aligned} \quad (7.59)$$

求函数 $f$ 满足约束条件(7.58)的局部极值，可首先从(7.58)解出 $x_1, x_2, \dots, x_K$ 得到(7.59)，然后把(7.59)代入 $f$ 得到 $x_{K+1}, \dots, x_m$ 的函数

$$\begin{aligned} &H(x_{K+1}, \dots, x_m) \\ &\equiv f[g^1(x_{K+1}, \dots, x_m), g^2(x_{K+1}, \dots, x_m), \dots, \\ &g^K(x_{K+1}, \dots, x_m), x_{K+1}, \dots, x_m]. \end{aligned}$$

最后按§7.2的方法求 $x_{K+1}, \dots, x_m$ 的函数 $H$ 的（无条件）极值。即求出方程组

$$H_{,i} = \sum_{j=1}^K f_{,i} g_{,i}^j + f_{,i} = 0 \quad i = k+1, k+2, \dots, m. \quad (7.60)$$

的解 $x_{K+1}, \dots, x_m$ ，将 $x_{K+1}, \dots, x_m$ 的值代入(7.59)求出 $x_1, x_2, \dots, x_K$ 得到满足约束(7.58)的临界点。再由二

阶导数判别是否是极大值或极小值点。

拉格朗日乘数法则是使用一种简单的技巧，求满足约束条件极值的方法。这种方法在(7·58)不能或难于解成(7·59)的 $g^1, g^2, \dots, g^K$ 时，就更显出它的优越性。

拉格朗日法则是引进 $K$ 个新的参数，表示为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K)$ ，并构造 $m + K$ 个变量的函数

$$F(x, \lambda) = F(x_1, \dots, x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_K)$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^K \lambda_i \varphi^i(x).$$

对 $F$ 来求 $x \in D, \lambda \in \mathbf{R}_K$ 的临界点。即解如下 $m + K$ 个方程的联立方程组：

$$\begin{aligned} F_{,i} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, \\ F_{,j} &= 0, & j &= m+1, \dots, m+K. \end{aligned} \quad (7.61)$$

要证明由解(7·61)得到的 $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 的集包含(7·60)的解。

设 $D$ 内满足约束条件(7·58)的一切点的集为 $D_0$ ，即 $D_0 = \{x : x \in D, \text{ 且 } \varphi^i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, K\}$ 。  $f$ 在 $D_0$ 的点 $x^0$ 取极小值，并且假定 $\exists$ 函数 $g = (g^1, g^2, \dots, g^m)$ 是从 $I = \{t : -t_0 < t < t_0\}$ 到 $\mathbf{R}_m$ 的 $C^1$ 类函数， $g$ 具有性质：

$$g(0) = x^0, \quad \varphi^j[g(t)] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K, \quad t \in I. \quad (7.62)$$

定义 $I \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的函数 $\varphi$ ，

$$\varphi(t) = f[g(t)], \quad t \in I. \quad (7.63)$$

★ 这样定义的  $\varphi$  在  $t=0$  处取极小值。由取极值的必要条件应当有  $\varphi'=0$ ，对 (7.63) 微分并令  $t=0$  得

$$\sum_{i=1}^m f_{,i}(x^0) \frac{d^i g(0)}{dt} = 0. \quad (7.64)$$

对 (7.62) 微分并令  $t=0$  可得

$$\sum_{i=1}^m \varphi_{,i}^j(x^0) \frac{dg^j(0)}{dt} = 0, \quad j=1, 2, \dots, K. \quad (7.65)$$

现设  $h=(h_1, h_2, \dots, h_m)$  是  $R_m$  内的一个与  $K$  个矢  $(\varphi_{,1}^j(x^0), \varphi_{,2}^j(x^0), \dots, \varphi_{,m}^j(x^0))$  ( $j=1, 2, \dots, K$ ) 相正交的矢。即  $h$  满足

$$\sum_{i=1}^m \varphi_{,i}^j(x^0) h_i = 0 \quad \text{或} \quad \nabla^j \varphi(x_0) \cdot h = 0,$$

$$j=1, 2, \dots, K.$$

根据隐函数定理，(7.58) 可解出  $x_1, x_2, \dots, x_K$  都是  $x_{K+1}, \dots, x_m$  的函数：

$$x_i = \mu^i(x_{K+1}, \dots, x_m), \quad i=1, 2, \dots, K.$$

若记  $x^0=(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ，且定义

$$g^i(t) = \begin{cases} \mu^i(x_{K+1}^0 + th_{K+1}, \dots, x_m^0 + th_m) & i=1, 2, \dots, K, \\ x_i + th_i & i=K+1, \dots, m. \end{cases}$$

那么  $g=(g^1(t), g^2(t), \dots, g^m(t))$  满足条件 (7.62)，(7.64) 及 (7.65)，于是证明了下面的引理。

**引理7·9** 设 $f, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^K$ 都是在 $R_m$ 的开集 $D$ 上的 $C^1$ 类函数,  $x^0 \in D$ , 且 $\nabla \varphi^1(x^0), \dots, \nabla \varphi^K(x^0)$ 是 $R_m$ 中的线性无关的 $K$ 个矢,  $D_0 = \{x : x \in D, \varphi^i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, K\}$ ,  $x_0$ 为限制 $f$ 在 $D_0$ 上的相对极小值点, 如果 $h$ 是 $R_m$ 中与 $\nabla \varphi^1(x^0), \dots, \nabla \varphi^K(x^0)$ 正交的任一矢, 那么

$$\nabla f(x^0) \cdot h = 0.$$

下一引理是一简单的线代数定理, 在证明拉格朗日法则时要用。

**引理7·10** 设 $b^1, b^2, \dots, b^K$ 是矢空间 $R_m$ 中线性无关的矢组. 若矢 $a$ 具有性质: 凡与 $b^1, \dots, b^K$ 正交的矢 $h$ , 都和 $a$ 正交. 那么 $\exists$ 数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ , 满足

$$a = \sum_{i=1}^K \lambda_i b^i.$$

**证明** 设 $B$ 是 $R_m$ 中由 $b^1, b^2, \dots, b^K$ 所张成的子空间. 那么存在矢 $c^{K+1}, c^{K+2}, \dots, c^m$ 与 $b^1, b^2, \dots, b^K$ 一起组成 $R_m$ 的一个基. 若 $h$ 正交于每一 $b^i$ ,  $h$ 在基 $(b^1, b^2, \dots, b^K, c^{K+1}, \dots, c^m)$ 之下的前 $K$ 个分量都应当等于零, 即 $h_1 = h_2 = \dots = h_K = 0$ . 在这一基之下, 凡与 $b^1, b^2, \dots, b^K$ 正交的 $h$ 都与 $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 正交, 也即

$$\sum_{j=1}^m a_j h_j = \sum_{j=K+1}^m a_j h_j = 0$$

对一切 $h = (0, 0, \dots, 0, h_{K+1}, \dots, h_m)$ 成立,  $h_{K+1}, h_{K+2},$

...,  $h_m$  可取一切数。因此必有  $a_{K+1} = a_{K+2} = \cdots = a_m = 0$ 。于是

$$a = \sum_{i=1}^K a_i b^i. \text{ 取 } a_i = \lambda_i, \text{ 便得 } a = \sum_{i=1}^K \lambda_i b^i.$$

**定理7·19 (拉格朗日乘数法则)** 设  $f, \varphi^1, \dots, \varphi^K$  及  $x^0$  满足引理7·9的条件。定义

$$F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^K \lambda_i \varphi^i(x).$$

那么存在数  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_K^0$  满足

$$F_{x_i}(x^0, \lambda^0) = 0, \quad (7 \cdot 66)$$

$$F_{\lambda_j}(x^0, \lambda^0) = 0.$$

**证明** 由  $F(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^K \lambda_i \varphi^i(x)$ , 方程 (7·66)

就是

$$\nabla f(x^0) = \sum_{i=1}^K \lambda_i^0 \nabla \varphi^i(x^0) \text{ 及 } \varphi^j(x^0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K.$$

令  $a = \nabla f(x^0)$ ,  $b^i = \nabla \varphi^i(x^0)$ 。由引理7·9, 凡与  $b^j$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) 正交的矢  $h$  与  $a$  正交。再由引理7·10  $\exists \lambda_1^0$ ,

$\lambda_2^0, \dots, \lambda_K^0$  使  $\nabla f(x^0) = a = \sum_{i=1}^K \lambda_i^0 b^i = \sum_{i=1}^K \lambda_i^0 \nabla \varphi^i(x^0)$ , 也

即 (7·66) 被满足。

注 这一定理说明  $f$  在约束  $\varphi^i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, K$ ) 之下的相对极小值点 (或极大值点), 包含在  $F$  的无约束的极小值点 (极大值点) 之中。

**例** 求函数  $f = x_1 + 3x_2 - 2x_3$  在球面  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$  上的最大值。

**解** 设  $F(x_1, x_2, x_3, \lambda) \equiv x_1 + 3x_2 - 2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 14)$ 。那么

$$F_{,1} = 1 + 2\lambda x_1, \quad F_{,2} = 3 + 2\lambda x_2, \quad F_{,3} = -2 + 2\lambda x_3,$$

$$F_{,4} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 14.$$

令  $F_{,i} = 0, i = 1, 2, 3, 4$ , 解这一方程组得

$$x_1 = -\frac{1}{2\lambda}, \quad x_2 = -\frac{3}{2\lambda}, \quad x_3 = \frac{1}{\lambda}, \quad 14 = \frac{14}{4\lambda^2}.$$

即方程组  $F_{,i} = 0 (i = 1, 2, 3, 4)$  的解有两组:  $(1, 3, -2, -\frac{1}{2})$  及  $(-1, -3, 2, \frac{1}{2})$ 。

因为  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14$  的球面是  $\mathbf{R}_3$  中的有界闭集,  $f$  在这有界闭集上能达到最大值、最小值。因此  $(-1, -3, 2)$  及  $(1, 3, -2)$  点应当一个是最大值点, 另一是最小值点。直接计算:  $f(-1, -3, 2) = -14, f(1, 3, -2) = 14$ 。由此可见  $(1, 3, -2)$  为  $f$  在球面上的最大值点, 而  $(-1, -3, 2)$  为  $f$  在球面上的最小值点。

## 习 题

用拉格朗日乘数法则解答下列问题。

1. 求  $x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$  在约束条件  $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 15 = 0$  下的极小值。



2. 求  $2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2$  在约束条件  $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 13 = 0$  下的极小值。

3. 求  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  满足约束条件：
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 9 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 18 = 0 \end{cases}$$
 的极小值。

4. 求  $4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$  满足约束 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 9 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 19 = 0 \end{cases}$$
 的极小值。

5. 求  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  满足约束  $2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 5 = 0$  的极小值。

6. 求  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$  满足约束 
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 6 = 0 \end{cases}$$
 的极小值。

7. 求曲线  $x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 25$  上到原点最近的点。

8. 求曲线  $7x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 = 25$  上到原点最近的点。

9. 求曲线  $x_1^4 + x_2^4 + 3x_1x_2 = 2$  上到原点最远的点。

10. 设  $b_1, b_2, \dots, b_K$  是正数, 求  $\sum_{i=1}^K b_i x_i$  满足约束  $\sum_{i=1}^K x_i^2 = 1$  的最大值。

11. (a) 求  $x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2$  满足约束  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$  的最大值。

(b) 若  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ , 证明  $(x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}$ .

(c) 若  $a_1, a_2, \dots, a_n$  都是正数, 证明

$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

## 第八章 $R_N$ 内的积分

### § 8.1 $R_N$ 内的体积

为了在 $R_N$ 内建立黎曼积分理论,首先要研究 $R_N$ 内点集的体积理论。我们将把§5.4所给出的面积理论推广到 $R_N$ 中的点集上来。

**定义** 设 $a=(a_1, a_2, \dots, a_N), b=(b_1, b_2, \dots, b_N)$ 是 $R_N$ 的两个点,  $a_i < b_i, i=1, 2, \dots, N$ . 开方格 $R = \{x: a_i < x_i < b_i, i=1, 2, \dots, N\}$ 与闭方格 $\bar{R} = \{x: a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, N\}$ 的体积都定义为 $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_N - a_N)$ . 当 $b_1 - a_1 = b_2 - a_2 = \cdots = b_N - a_N$ 成立时方格称为超立方。超立方的体积为 $(b_1 - a_1)^N$ .

对应于 $N=2$ 时所给出的理论,划分 $R_N$ 为闭超立方:

$$\frac{K_i - 1}{2^n} \leq x_i \leq \frac{K_i}{2^n}, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (8.1)$$

这里 $K_i (i=1, 2, \dots, N)$ 是整数。每一超立方的体积为 $\frac{1}{2^{nN}}$ .

设 $S$ 是 $R_N$ 内包含于开方格 $R = \{x: A_i < x_i < B_i, i=1, 2, \dots, N\}$ 中的有界集。为了方便,  $A_1, A_2, \dots, A_N, B_1, B_2, \dots, B_N$ 都取整数。

**定义**  $R_N$ 被划分为(8·1)式所给出的超立方称为 $n$ 阶格. 每个完全含于 $S$ 内的 $n$ 阶格的超立方称为 $S$ 的内立方; 包含 $S$ 的点又非 $S$ 的内立方的超立方称为 $S$ 的边界立方; 不含 $S$ 点的超立方称 $S$ 的外立方.

**定义**

$V_n^-(S) = 2^{-Nn}$  乘 $S$ 的内立方数.

$V_n^+(S) = V_n^-(S) + 2^{-Nn}$  乘 $S$ 的边界立方数.

类似于引理5·2, 有下面引理.

**引理8·1** 设 $R = \{x : A_i < x_i < B_i, i = 1, 2, \dots, N\}$ 是个开方格,  $A_i, B_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是整数,  $S \subset R$ . 那么对于 $R_N$ 的划分(8·1)所有 $S$ 的内立方及边界立方都含于 $R$ 内.

**定理8·1** 在引理8·1的假设下, 有

$$(i) \quad 0 \leq V_n^-(S) \leq V_n^+(S) \leq (B_1 - A_1)(B_2 - A_2) \cdots (B_N - A_N);$$

$$(ii) \quad V_n^-(S) \leq V_{n+1}^-(S), \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(iii) \quad V_{n+1}^+(S) \leq V_n^+(S), \quad n = 1, 2, \dots;$$

(iv) 序列  $\{V_n^-(S)\}$  及  $\{V_n^+(S)\}$  是收敛数列, 记

$$V^-(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^-(S), V^+(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n^+(S), \text{ 那么}$$

$$0 \leq V^-(S) \leq V^+(S) \leq \prod_{i=1}^N (B_i - A_i);$$

(v) 量  $V_n^-(S), V_n^+(S), V^-(S), V^+(S)$  与  $R$  的选取无关.

定理8·1在 $N=2$ 时就是定理5·19, 定理8·1的证明与定理5·19的证明类似, 把它留给读者。

**定义**  $V^-(S)$ 、 $V^+(S)$ 分别称为 $S$ 的内、外体积。当且仅当 $V^-(S) = V^+(S)$ 时称 $S$ 具有体积, 它的体积就是这一共同值, 记为 $V(S)$ 或 $V_N(S)$  ( $N$ 是维数)。  $\mathbf{R}_N$ 内具有体积的点集称为图形。

**定理8·2** 设 $S_1$ 与 $S_2$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的有界集。

(a) 若 $S_1 \subset S_2$ , 那么 $V^-(S_1) \leq V^-(S_2)$ ,  $V^+(S_1) \leq V^+(S_2)$ 。

(b)  $V^+(S_1 \cup S_2) \leq V^+(S_1) + V^+(S_2)$ 。

(c) 若 $S_1$ 与 $S_2$ 不含有共同内点, 那么

$$V^-(S_1 \cup S_2) \geq V^-(S_1) + V^-(S_2).$$

(d) 若 $S_1$ 与 $S_2$ 是图形且 $S_1$ ,  $S_2$ 不存在共同内点, 那么

$$V(S_1 \cup S_2) = V(S_1) + V(S_2).$$

(c) 开方格 $R = \{x : a_i < x_i < b_i, \quad i = 1, 2, \dots, N\}$

及闭方格 $\overline{R}$ 都是图形, 且 $V(R) = V(\overline{R}) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$ 。

当 $N=2$ 时定理8·2成为定理5·20, 两者的证明也相似。

**定理8·3** 设 $S_1$ ,  $S_2$ 都是 $\mathbf{R}_N$ 内的图形, 那么 $S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 \cap S_2$ 及 $S_1 - S_2$ 都是图形。凡图形其边界的体积是零。

定理8·3的证明与定理5·21证明相似。定理8·2与定理8·3容易按归纳法推广到有限个 $S_1, S_2, \dots, S_k$ 的情况。

## 习 题

1. 给出 $\mathbf{R}_N$ 内的有界集 $S$ 使 $V^-(S) < V^+(S)$ 。

2. 研究开方格  $R = \{x : a_i < x_i < b_i\}$ ,  $a_i, b_i$  都是无理数,  $i = 1, 2, \dots, N$ . 证明对  $\forall n$  有  $V_n^-(R) < V_n^+(R)$ .
3. 证明引理 8.1. 若  $\{A_i\}$  和  $\{B_i\}$  是有理数. 按 (8.1) 式给出的  $n$  阶格. 对充分大的  $n$ , 引理 8.1 的结果是否成立?
4. 给出一非空有界集  $S \subset \mathbf{R}_N$  使对  $\forall n$  有  $V_n^-(S) = V_n^+(S)$ .
5. 证明定理 8.1
6. 叙述与证明相似于引理 5.3 的命题.
7. 举出  $\mathbf{R}_N$  的两个集  $S_1, S_2$ , 它们不是图形, 但其并  $S_1 \cup S_2$ , 交  $S_1 \cap S_2$  是图形.  $S_1 - S_2$  可能是图形吗?
8. 证明定理 8.2.
9. 证明定理 8.3
10. 证明若  $S_1, S_2, \dots, S_K$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形, 那么  $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_K$  及  $S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_K$  都是图形. 若  $S_1, S_2, \dots, S_K, \dots$

是图形的无限族, 那么  $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$  还是图形吗?

## § 8.2 $\mathbf{R}_N$ 内的达布积分

我们可以平行于 § 5.1 中  $\mathbf{R}_1$  内达布积分来建立  $\mathbf{R}_N$  内的达布积分.

**定义** 设  $\mathbf{R}_N$  中的有界集  $F$  是一个图形.  $F$  的一个划分是把  $F$  分解为有限个图形  $F_1, F_2, \dots, F_n$  的族, 任两个子图形不含有共同内点, 即  $\text{Int}(F_i) \cap \text{Int}(F_j) = \emptyset$  ( $i \neq j$ ) 是空集 ( $\text{Int}$  表集的内部), 且  $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n = F$ . 用  $\Delta$  来记  $F$  的

划分。

划分 $\Delta'$ 称为 $\Delta$ 的细分 $\iff \Delta'$ 的每个子图形整个地包含在 $\Delta$ 的某子图形内。 $F$ 的划分 $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ 及 $\Delta_2 = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 。若 $\Delta'$ 是一切非空的 $F_i \cap G_j$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ ) 所组成的划分, 那么称 $\Delta'$ 是 $\Delta_1$ 与 $\Delta_2$ 的共同细分。

显然, 任何两个划分总存在共同细分。但要注意任给两个划分 $\Delta_1, \Delta_2$ , 可能 $\Delta_1$ 不是 $\Delta_2$ 的细分,  $\Delta_2$ 也不是 $\Delta_1$ 的细分。

类似于 $R_1$ 中的上和、下和定义, 设 $D$ 是 $R_N$ 内的集, 图形 $F \subset D, f: D \rightarrow R_1$ 在 $F$ 上有界。对于 $F$ 的划分 $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $M_i, m_i$ 分别表示 $f$ 在 $F_i$ 上的上、下确界。即于 $F_i$ 上

$$M_i = \sup f, \quad m_i = \inf f.$$

**定义** 关于划分 $\Delta, f$ 的上和、下和分别为

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i V(F_i),$$

$$S_-(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i V(F_i).$$

**定理8.4** 设 $F$ 是 $R_N$ 内的图形,  $f$ 在 $F$ 上有界,  $m \leq f(x) \leq M$ 。

(a) 若 $\Delta$ 是 $F$ 的划分, 那么

$$mV(F) \leq S_-(f, \Delta) \leq S^+(f, \Delta) \leq MV(F).$$

(b) 若  $\Delta'$  是  $\Delta$  的细分, 那么

$$S_-(f, \Delta) \leq S_-(f, \Delta'), \quad S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta).$$

(c) 若  $\Delta_1, \Delta_2$  都是  $F$  的划分, 那么

$$S_-(f, \Delta_1) \leq S^+(f, \Delta_2).$$

**证明** (a) 的证明与定理 5.1 (a) 之证明相同.

(b) 设  $\Delta' = \{F_1', F_2', \dots, F_m'\}$  是  $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  的细分. 以  $F_1', F_2', \dots, F_k'$  表示含于  $F_1$  内的划分  $\Delta'$  的子图形. 并记

$$m_1 = \inf_{x \in F_1} f(x), \quad m_i' = \inf_{x \in F_i'} f(x), \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

因为  $F_i' \subset F_1$ , 所以  $m_1 \leq m_i', \quad i = 1, 2, \dots, K$ . 又因为  $V(F_1) = V(F_1') + V(F_2') + \dots + V(F_k')$ , 有

$$\begin{aligned} m_1 V(F_1') &\leq m_1' V(F_1') + \dots \\ &+ m_k' V(F_k'). \end{aligned} \quad (8.2)$$

对于  $F_2, F_3, \dots, F_n$  同样的不等式都成立. 将这些不等式求和便得  $S_-(f, \Delta) \leq S_-(f, \Delta')$ . 类似可得  $S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta)$ .

(c) 若  $\Delta_1, \Delta_2$  是两个划分,  $\Delta'$  是它们的共同细分. 那么由 (a), (b) 可得

$$\begin{aligned} S_-(f, \Delta_1) &\leq S_-(f, \Delta') \\ &\leq S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta_2). \end{aligned}$$

**定义** 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形,  $f$  是  $F$  上的实值有界函数.  $f$  的



上、下积分分别为

$$\overline{\int}_F f dV = \inf S^+(f, \Delta), \quad \int_{-F} f dV = \sup S_-(f, \Delta),$$

这里下确界、上确界是对所有划分 $\Delta$ 取的。

当上、下积分相等时，称 $f$ 达布可积，即

$$\overline{\int}_F f dV = \int_{-F} f dV = \int_F f dV.$$

为了标明积分是 $N$ 维的，也把 $\int_F f dV$ 记为 $\int_F f dV_N$ 。

下列 $\mathbf{R}_N$ 积分的基本性质与 $\mathbf{R}_1$ 的积分相应的基本性质定理完全一样。其证明仅需将 $\mathbf{R}_1$ 中的区间改成 $\mathbf{R}_N$ 的图形便得。

**定理8.5** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的图形。 $f, f_1, f_2$ 都是定义在 $F$ 上的实值有界函数。

(a) 若对 $\forall x \in F, m \leq f(x) \leq M$ ，那么

$$mV(F) \leq \int_{-F} f dV \leq \overline{\int}_F f dV \leq MV(F).$$

(b) 若 $K$ 是一正数， $g = Kf$ ，那么

$$\int_{-F} g dV = K \int_{-F} f dV, \quad \overline{\int}_F g dV = K \overline{\int}_F f dV.$$

若 $K$ 是一负数,  $g = Kf$ , 那么

$$\int_F g dV = K \int_F f dV, \quad \bar{\int}_F g dV = K \bar{\int}_F f dV.$$

$$(c) \quad \int_F (f_1 + f_2) dV \geq \int_F f_1 dV + \int_F f_2 dV;$$

$$\bar{\int}_F (f_1 + f_2) dV \leq \bar{\int}_F f_1 dV + \bar{\int}_F f_2 dV.$$

(d) 若 $f_1(x) \leq f_2(x)$ , 对 $\forall x \in F$ 成立, 那么

$$\int_F f_1(x) dx \leq \int_F f_2(x) dx, \quad \bar{\int}_F f_1(x) dx \leq \bar{\int}_F f_2(x) dx.$$

(e) 设 $G$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的另一图形,  $G$ 与 $F$ 无共同内点, 若 $f$ 在 $F \cup G$ 上有定义且有界, 那么

$$\int_{F \cup G} f dV = \int_F f dV + \int_G f dV;$$

$$\bar{\int}_{F \cup G} f dV = \bar{\int}_F f dV + \bar{\int}_G f dV.$$

当定理8.5中的函数是达布可积的, 那么 (a) — (e) 可以改成与定理5.3推论同样的定理8.5的推论.

**定理8.6** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的图形,  $f$ 是 $F$ 上的实值有界函数.

(a)  $f$ 在 $F$ 上达布可积 $\iff$ 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists F$ 的划分 $\Delta$ , 使 $S^+(f, \Delta) - S^-(f, \Delta) < \varepsilon$ .

- (b) 若  $f$  在  $F$  上一致连续, 那么  $f$  在  $F$  上达布可积.
- (c) 若  $f$  在  $F$  上达布可积, 那么  $|f|$  在  $F$  上达布可积.
- (d) 若  $f_1, f_2$  都在  $F$  上达布可积, 那么  $f_1 f_2$  在  $F$  上达布可积.
- (e) 若  $f$  是在  $F$  上达布可积的,  $H$  是含于  $F$  中的一个图形, 那么  $f$  在  $H$  上达布可积.

对于  $\mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_1$  的函数  $f$ , 当  $f$  在区间  $I$  上非负, 那么  $\int_I f(x) dx$  表示  $y = f(x)$  曲线的下方图形的面积. 当  $N \geq 2$ ,  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内一图形,  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$  是非负的, 那么  $\int_F f dV$  给出了“超曲面  $f$  之下”的  $N+1$  维的体积. 严格地叙述为下面的定理 8·8.

为了证明定理 8·8, 需要关于图形  $F$  与  $G$  直积体积的定理 8·7, 它是  $N$  维方格体积等于  $N$  个棱长之积的推广.

**定理 8·7** 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内图形,  $G$  是  $\mathbf{R}_M$  内的图形, 那么集  $B = \{(x, y) : x \in F, y \in G\} \subset \mathbf{R}_{N+M}$  是  $\mathbf{R}_{N+M}$  内的图形, 且

$$V_{N+M}(B) = V_N(F) \cdot V_M(G), \quad (8.3)$$

**证明提要** 将  $\mathbf{R}_{N+M}$  划分为边长为  $2^{-n}$  的超立方时, 相应地  $F, G$  分别被划分为  $N$  维、 $M$  维的超立方.  $B$  的内超立方是  $F$  与  $G$  的内超立方的直积. 于是有

$$V_n^-(B) = V_n^-(F) \cdot V_n^-(G),$$

令  $n \rightarrow +\infty$  求得  $V^-(B) = V^-(F) \cdot V^-(G)$ . 同理可得  $V^+(B) = V^+(F) \cdot V^+(G)$ . 因为  $F, G$  是图形, 便得定理

的结论。

**定理8·8** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的图形， $f$ 是 $F$ 上的实值有界函数。取常数 $C$ ，使对 $\forall x \in F$ 都有 $f(x) > C$ ，并定义

$$G_1 = \{ (x, y) : x \in F, y \in \mathbf{R}_1, C \leq y < f(x) \},$$

$$G_2 = \{ (x, y) : x \in F, y \in \mathbf{R}_1, C \leq y \leq f(x) \}.$$

$$(a) \int_F [f(x) - C] dV_N = V_{N+1}^-(G_1) \leq V_{N+1}^+(G_2),$$

$$\int_F [f(x) - C] dV_N \geq V_{N+1}^+(G_2) \geq V_{N+1}^+(G_1)$$

(b) 若 $f$ 与 $g$ 在 $F$ 上可积且对 $\forall x \in F$ ， $f(x) \geq g(x)$ 。定义 $G = \{ (x, y) : x \in F, \text{及} f(x) \leq y \leq g(x) \}$ ，那么 $G$ 是 $\mathbf{R}_{N+1}$ 内的图形且

$$V_{N+1}(G) = \int_F [f(x) - g(x)] dV_N.$$

**证明** 因为 $G_2 \supset G_1$ ，(a)的不等式显然地成立。其余的部分可由达布上、下积分及 $\mathbf{R}_N$ 内点集的内、外体积定义导出。

因为每一 $V_{N+1}(G)$ 的体积元素是一 $N$ 维超立方与一维长度的积（图8·1），由定理8·7导出(b)。

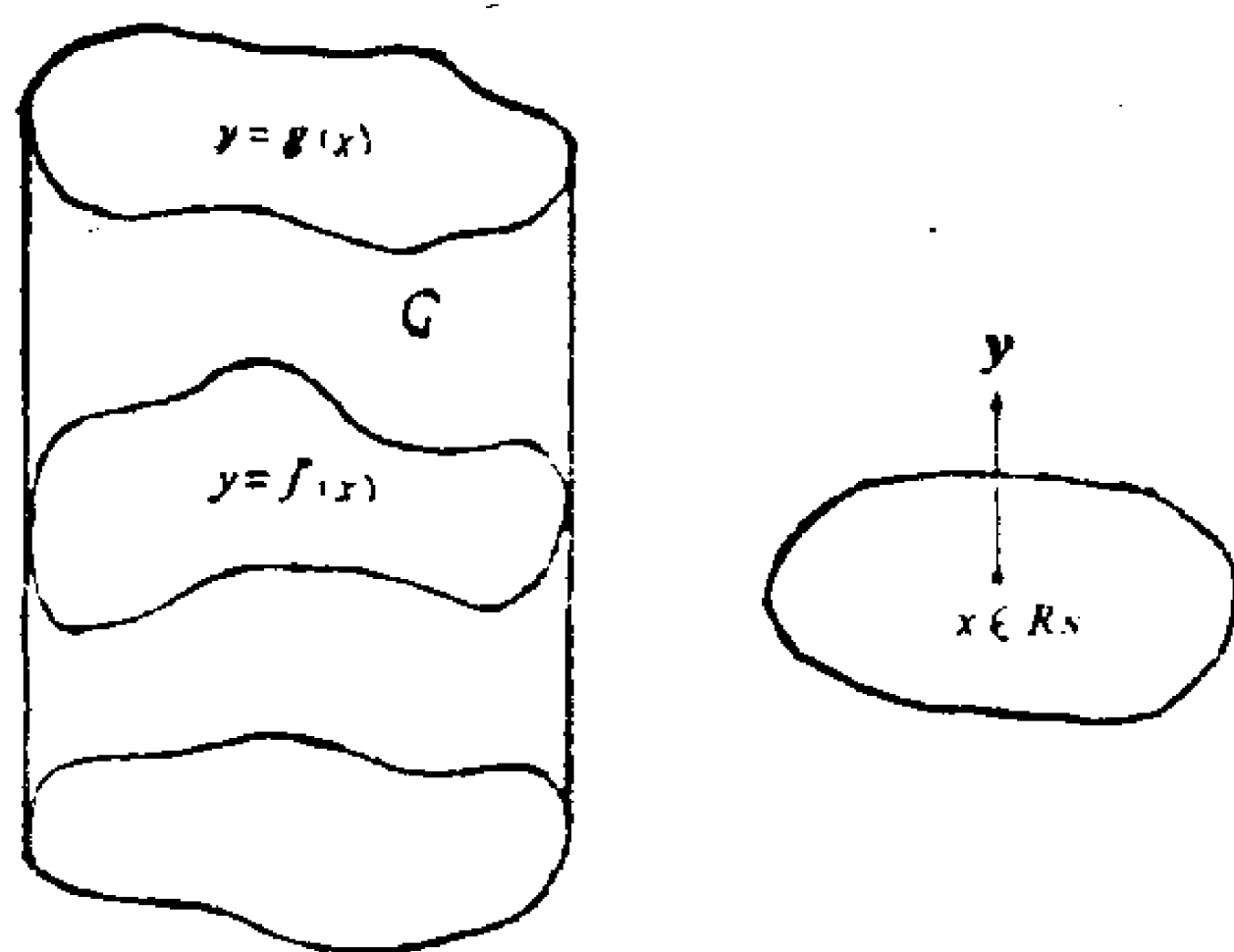


图 8.1

### 习 题

1. 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的一图形, 给出  $F$  上有界函数  $f$ , 使得

$$\int_{\underline{F}} f dV \neq \int_{\overline{F}} f dV.$$

2. 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形,  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$  于  $F$  上连续,  $\Delta$  是  $F$  的划分,  $\Delta'$  是  $\Delta$  的任意的一细分, 且  $S_-(f, \Delta) = S_-(f, \Delta')$  都成立,  $f$  具有何种性质?

3. 写出定理 8.4 (a) 的证明.

4. 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形,  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $F$  上一致连续. 于  $\mathbf{R}_{N+1}$  内定义集,  $A \{(x, y): x \in F, y = f(x)\}$ , 证明

$$V_{N+1}(A) = 0.$$

5. 对  $f: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  证明与引理 5.1 同样的引理.

6. 证明定理 8.5.

7. 证明定理 8.6 之 (c), (d) 及 (e).

8. 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形,  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $F$  上连续. 如果对每一在  $F$  上连续的实值函数  $g$ , 都有

$$\int_F fg dV = 0, \text{ 证明在 } F \text{ 上 } f \equiv 0.$$

9. 完成定理 8.7 的证明.  
10. 设  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$  是图形  $F$  上可积的函数, 说明

$$\int_F f dV, \int_F |f| dV \text{ 的几何意义.}$$

11. 写出定理 8.8 的详细证明.  
12. 用公式 (8.3) 求  $\mathbf{R}_5$  内图形  $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, x_4^2 + x_5^2 \leq 1\}$  的体积.

### § 8.3 $\mathbf{R}_N$ 内的黎曼积分

与上节推广达布积分类似, 能把  $\mathbf{R}_1$  中的黎曼积分推广到  $\mathbf{R}_N$ .

**定义** 设  $A$  是具有距离  $d(x, y)$  的距离空间中的集,  $A$  的直径定义为,  $\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$ .

图形  $F \subset \mathbf{R}_N$  的划分  $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ , 划分的网孔  $\|\Delta\|$  定义为:  $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\text{diam } F_i\}$ .

**定义** 设  $f$  是  $\mathbf{R}_N$  内图形  $F$  上的函数. 称  $f$  在  $F$  上黎曼可积  $\iff \exists$  一数  $L$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  相应于  $\varepsilon$  的  $\delta$ , 使当  $F$  的划分  $\Delta$  的

网孔  $\|\Delta\| < \delta$  时, 对  $\forall x_i \in F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x_i) V_N(F_i) - L \right| < \varepsilon.$$

$L$  称为  $f$  在  $F$  上的黎曼积分, 记为  $L = \int_F f dV$ .

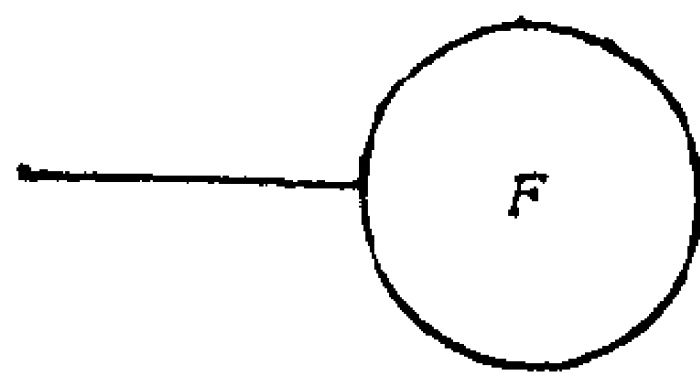
**定理8.9** 函数的黎曼积分是唯一的.

这是极限唯一性 (定理2.1) 的直接推论.

**定义** 称  $R_N$  内图形  $F$  是一正规的图形  $\iff$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $F$  具有划分  $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $\|\Delta\| < \varepsilon$  且

$$V_N(F_i) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

注 与  $R_1$  中积分同样, 若  $f$  在图形  $F \subset R_N$  上黎曼可积, 改变  $f$  在体积为零的集之上的值, 不影响  $f$  的可积性及积分值. 图8.2所示  $R_1$  内  $F$  是一圆盘及伸出一线段, 改变伸出线段上  $f$  的值不影响  $f$  的积分. 这一图形是不正规的, 我们使  $f$  的值在伸出线段上可以为无界的, 也不影响  $f$  的可积性. 对于正规图形仍有类似于定理5.10的定理.



$F$  包含伸出的线段

图 8.2

**定理8.10** 设  $F$  是  $R_N$  内的正规图形.  $f: F \rightarrow R_1$  在  $F$  上黎曼可积, 那么  $f$  在  $F$  上有界.

**证明** 设  $L = \int_F f dV$ . 由可积定义, 取  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使

划分  $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  在  $\|\Delta\| < \delta$  时, 对  $\forall x^i \in F_i$ ,

都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x^i) V(F_i) - L \right| \leq 1.$$

因此

$$\left| \sum_{i=1}^n f(x^i) V(F_i) \right| \leq 1 + |L|. \quad (8.4)$$

设 $\Delta$ 是一个每一 $F_i$ 都有 $V(F_i) > 0$ 的划分,  $i=1, 2, \dots, n$ .  $x^1$ 是 $F_1$ 中的点. 由(8.4)式, 有

$$|f(x^1)| V(F_1) \leq 1 + |L| + \sum_{i=2}^n |f(x^i)| V(F_i),$$

或

$$|f(x^1)| \leq \frac{1}{V(F_1)} [1 + |L| + \sum_{i=2}^n |f(x^i)| V(F_i)]. \quad (8.5)$$

固定 $x^2, x^3, \dots, x^n$ , 让 $x^1$ 在 $F_1$ 中变化, (8.5)式表明 $f$ 在 $F_1$ 上有界. 同理可证 $f$ 在 $F_i$  ( $i=2, 3, \dots, n$ )上有界, 从而 $f$ 在 $F$ 上有界.

**定理8.11** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的正规图形,  $f: F \rightarrow \mathbf{R}_1$ 在 $f$ 上黎曼可积, 那么 $f$ 在 $F$ 上达布可积而且两种积分值相等.

定理的证明与定理5.11的证明相似, 定理8.11的逆包含在下面的定理当中.

**定理8.12** 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的图形, 且 $f$ 是 $F$ 上的实值有界函数. 那么



(a) 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  使当  $\|\Delta\| < \delta$  的划分  $\Delta$ , 都有

$$S^+(f, \Delta) < \int_F f dV + \varepsilon, \quad S_-(f, \Delta) > \int_F f dV - \varepsilon, \quad (8.6)$$

(b) 若  $f$  在  $F$  上达布可积, 那么  $f$  在  $F$  上黎曼可积, 并且两种积分值相等.

**证明** 注意到黎曼和介于  $S_-(f, \Delta)$  与  $S^+(f, \Delta)$  之间,

因此当  $f$  达布可积, 即  $\int_F f dV = \int_{-F} f dV$  时,  $f$  黎曼可积, 并且两

种积分值相同. 由此可见 (b) 是 (a) 的直接结果.

我们来证明 (8.6) 之第一不等式. 后一不等式的证明类似可得.

由  $f$  在  $F$  上有界,  $\exists M$ , 使对  $\forall x \in F$ ,  $|f(x)| < M$ . 设  $\varepsilon$  是给定正数, 根据达布上积分定义,  $\exists$  划分  $\Delta_0 = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  使

$$S^+(f, \Delta_0) < \int_F f dV + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.7)$$

以  $F_i^{(0)}$  表示  $F_i$  内点的集, 对某些  $i$ ,  $F_i^{(0)}$  可能为空集.

对于每个非空的  $F_i^{(0)}$  选取含于  $F_i^{(0)}$  内的闭图形  $G_i$ , 且满足

$$V(F_i - G_i) < \frac{\varepsilon}{4Mm}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

(图8.3是  $R_2$  内图形的示意图). 不难证明可选取  $G_1, G_2,$

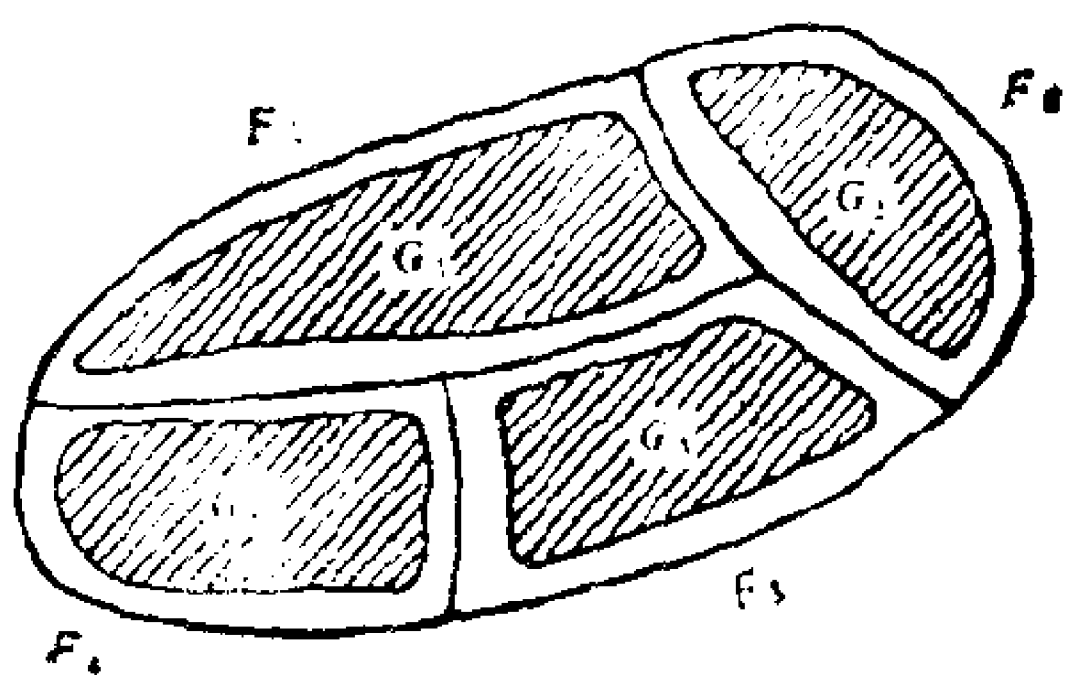


图 8.3

...,  $G_m$  为有界的。例如对充分小的网格,  $G_i$  取为  $F_i$  的闭的内超立方之并。

因为每个  $G_i$  是含于  $F_i^{(0)}$  内的有界闭集,  $G_i$  是紧集。由定理 6.26,  $\exists \delta > 0$ , 对  $\forall x \in G_i$ , 使球  $B(x, \delta) \subset F_i^{(0)}$ 。现设  $\Delta$  是任意的  $\|\Delta\| < \delta$  的划分, 证明对  $\Delta$ , (8.6) 的第一个不等式成立。

把  $\Delta$  的子图形分成两类:  $J_1, J_2, \dots, J_n$  为包含某  $G_i$  点的子图形;  $K_1, K_2, \dots, K_q$  为其余的子图形。

以  $\Delta'$  表示  $\Delta$  与  $\Delta^0$  的共同细分, 由  $\delta$  的选取方法, 每一  $J_i$  整个地含于某一  $F_K^{(0)}$  之内。所以  $J_i$  是  $\Delta'$  的子图形。  $\Delta'$  其余的子图形为  $K_i \cap F_j, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, m$ 。这样便有不等式

$$\sum_{k=1}^q V(K_k) < \sum_{i=1}^m V(F_i - G_i) < m \cdot \frac{\varepsilon}{4M \cdot m} = \frac{\varepsilon}{4M}.$$

引进记号

$$M_i = \sup_{x \in J_i} f(x), \quad M'_i = \sup_{x \in K_i} f(x), \quad M_{ij} = \sup_{x \in K_i \cap F_j} f(x)$$

由  $S^+(f, \Delta)$  及  $S^+(f, \Delta')$  定义:

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i V(J_i) + \sum_{i=1}^q M_2'(K_i),$$

$$S^+(f, \Delta') = \sum_{i=1}^n M_i V(J_i) + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m M_{ij} V(K_i \cap F_j).$$

显然

$$V(K_i) = \sum_{j=1}^m V(K_i \cap F_j).$$

由此

$$\begin{aligned} S^+(f, \Delta) - S^+(f, \Delta') &= \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m (M_i' - M_{ij}) V(K_i \cap F_j) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m V(K_i \cap F_j) \\ &\leq 2M \sum_{i=1}^q V(K_i) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

又据定理8.4的 (b), 有  $S^+(f, \Delta') \leq S^+(f, \Delta_0)$ . 综合 (8.7) 与 (8.8) 便得

$$S^+(f, \Delta) < \int_F f dV + \varepsilon,$$

这即 (8.6) 的第一个不等式.

下面定理是化多重积分为累次积分的基础.

**定理8.13** 设  $F$  是  $\mathbf{R}_M$  内的图形,  $G$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形. 设  $f$  是定义在  $F \times G$  上的有界函数, 那么

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} \geq \int_F \left[ \int_G f dV_N \right] dV_M,$$

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} \geq \int_G \left[ \int_F f dV_M \right] dV_N,$$

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} \leq \int_F \left[ \int_G f dV_N \right] dV_M,$$

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} \leq \int_G \left[ \int_F f dV_M \right] dV_N.$$

**证明** 各不等式的证明彼此类似,只证其中第一不等式. 设  $\varepsilon > 0$  是给定的,  $\exists \delta > 0$  使当  $F \times G$  的划分  $\Delta$  的  $\|\Delta\| < \delta$ , 便有

$$S^+(f, \Delta) < \int_{F \times G} f dV_{M+N} + \varepsilon. \quad (8.9)$$

现令  $\{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  及  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  分别是  $F$  及  $G$  的网孔小于  $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$  的划分. 那么由  $F_i \times G_j$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) 组成的  $F \times G$  的划分  $\Delta$ , 其网孔小于  $\delta$  (参看定理 7).

记  $M_{ij} = \sup_{(x,y) \in F_i \times G_j} f(x, y)$ , 那么由定理 8.7,

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} V_{M+N}(F_i \times G_j)$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} V_M(F_i) V_N(G_j).$$

又对  $\forall x \in F_i$ , 都有

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} V_N(G_j) \geq \int_G f(x, y) dV_N.$$

定义  $M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} V_N(G_j)$ , 便有

$$S^+(f, \Delta) = \sum_{i=1}^m M_i V_M(F_i) \geq \int_F \left[ \int_G f(x, y) dV_N \right] dV_M.$$

据此及 (8.9) 得

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} + \varepsilon > \int_F \left[ \int_G f(x, y) dV_N \right] dV_M.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 便得

$$\int_{F \times G} f dV_{M+N} \geq \int_F \left[ \int_G f(x, y) dV_N \right] dV_M.$$

**推论** 设  $F$  是  $\mathbf{R}_M$  的图形, 对  $\forall x \in F$  有  $G_x$  是  $\mathbf{R}_N$  的图形. 定义  $B = \{ (x, y) : x \in F, y \in G_x \}$ , 设  $f: B \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $B$  上可积且对  $\forall x \in F$ ,  $f$  在  $G_x$  上可积, 那么

$$\varphi(x) = \int_{G_x} f(x, y) dV_N$$

在  $F$  上可积, 并且

$$\int_B f(x, y) dV_{M+N} = \int_F \left[ \int_{G_x} f(x, y) dV_N \right] dV_M.$$

注 图8·4是推论关于  $R_1$  内函数的具体说明. 设  $B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ,  $F = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $G_x = \{y : g(x) \leq y \leq h(x), \forall x \in F\}$ . 推论指出

$$\int_B f(x, y) dA = \int_a^b \left[ \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

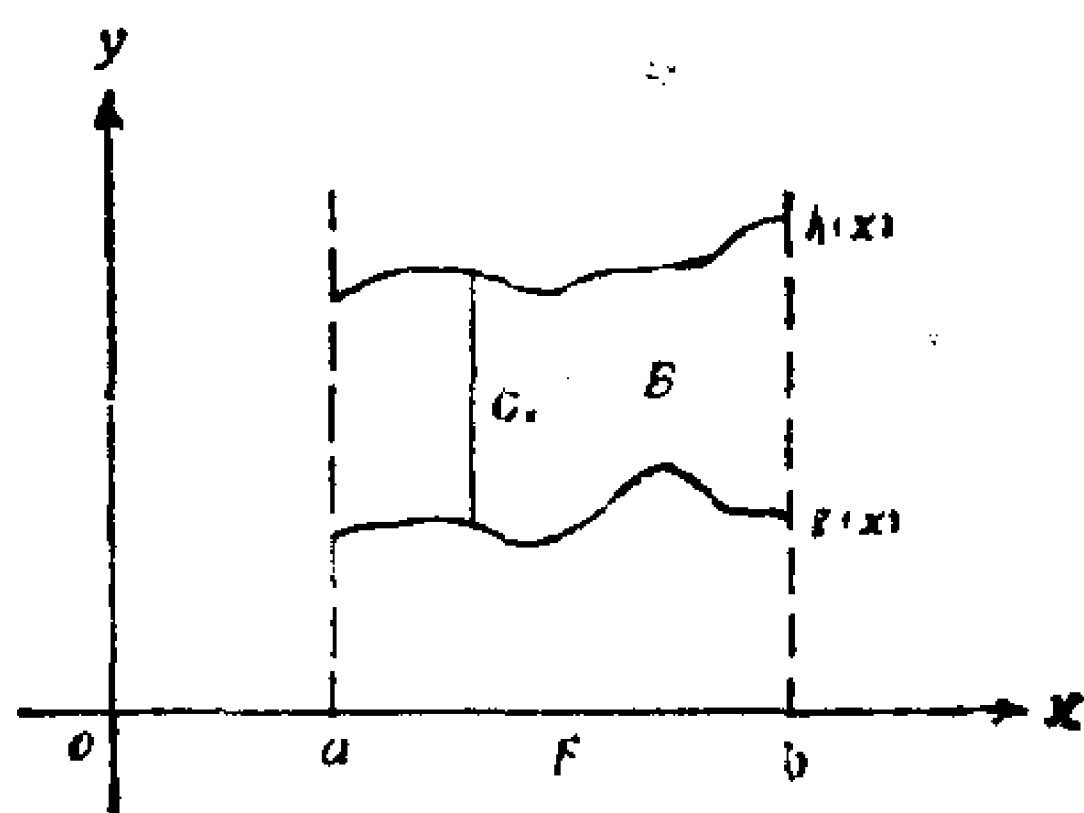


图 8·4

## 习 题

1. 证明  $R_N$  中函数的黎曼积分的唯一性 (定理8·9) .
2. 证明两正规图形的并是正规的. 举例说明两正规图形的交、差不必是正规的.
3. 设  $F$  是  $R_N$  内的图形 ( $N \geq 2$ ),  $f: F \rightarrow R_1$  在  $F$  上黎曼可积. 证明  $f$  在  $F$  上可以是无界的 (对照定理8·10) .
4. 设  $F$  是  $R_N$  内图形,  $f$  是定义在  $F$  上的非负、无界的函数. 定义

$$f_n = \begin{cases} f & \text{当 } |f| \leq n \\ 0 & \text{当 } |f| > n \end{cases}$$

且设对  $\forall n$ ,  $f_n$  在  $F$  上可积, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dV$  存在, 定义

$$\int_F f dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dV.$$

现设  $f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^a}$ ,  $F = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,

证明: 当  $a < 1$  时,  $\int_F f dV$  存在; 当  $a \geq 1$  时,  $\int_F f dV$  不存在.

5. 证明定理 8.11: 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内正规图形, 若  $f$  在  $L$  上黎曼可积, 则  $f$  在  $F$  上达布可积.

6. 设  $f$  定义于方形  $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  上,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是无理数} \\ 4y^3 & \text{当 } x \text{ 是有理数.} \end{cases}$$

(a) 证明  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$  存在且等于 1.

(b) 证明  $\int_S f(x, y) dV$  不存在.

7. 设方形  $S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  内的集  $A$  为

$A = \{ (x, y) : x, y \text{ 是有理数, 且 } x = \frac{p_1}{q_1}, y = \frac{p_2}{q_2} \text{ 时,}$

$$q_1 = q_2 \}, f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{当 } (x, y) \in A, \\ 1 & \text{当 } (x, y) \in (S - A). \end{cases}$$

(a) 证明  $\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx, \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$  都

存在且相等。

(b) 证明  $\int_S f(x, y) dV$  不存在。

8. 写出定理8·13推论的证明。

## § 8·4 象集的体积及变量替换

对于单变量函数, 形如  $\int f(x) dx$  的积分可通过“变量替换”  $x = g(u), dx = g'(u) du$  化成  $\int f[g(u)] g'(u) du$ ,

用以实际计算许多积分。对于多重积分相应的结果比较复杂, 为了建立变量替换公式要用到一些线性代数的结果。我们假定读者熟悉矩阵及线性变换的基本知识。

**定义** 设  $G$  是  $R_n$  内的开集,  $f: G \rightarrow R_m$  是  $C^1$  类的映象。即  $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$ ,  $f^i: G \rightarrow R_1$  是  $C^1$  类的函数,  $i = 1, 2, \dots, m$ . 称以  $f_{ij}^i$  为第  $i$  行第  $j$  列元素的  $m \times n$  矩阵为



$f$  的雅可比矩阵或梯度矩阵, 以  $\nabla f$  表示之.

首先对  $f: G \rightarrow \mathbb{R}_m$  的矢函数给出微分基本引理, 链法则及反函数导数公式.

**定理 8.14** 设  $G, G_1$  都是  $\mathbb{R}_m$  内的开集,  $\bar{x} \in G, f: G \rightarrow G_1$  是  $C^1$  类矢函数.

$$\begin{aligned} (a) \quad f'(\bar{x} + h) - f'(\bar{x}) &= \nabla f'(\bar{x})h + \varepsilon'(h) \\ &= \sum_{j=1}^m f'_{ij} h_j + \varepsilon'(h), \quad i=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8.10)$$

其中  $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$ ,  $\varepsilon(h) = (\varepsilon^1(h), \varepsilon^2(h), \dots, \varepsilon^m(h))$ , 且

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{|h|} = 0.$$

(b) 设  $g_1: G_1 \rightarrow \mathbb{R}_n$  是  $C^1$  类矢函数, 对  $x \in G$  定义  $F(x) = g[f(x)]$ , 那么

$$\nabla F(x) = \nabla g[f(x)] \cdot \nabla f(x). \quad (8.11)$$

(c) 设  $f$  是 1—1 的, 在  $G$  上有  $\det \nabla f(x) \neq 0$ . 那么映象  $f(G) = G_0$  是开集, 且  $g_1 = f^{-1}$  在  $G_0$  上是 1—1 的  $C^1$  类矢函数, 并有

$$\nabla g_1[f(x)] = [\nabla f(x)]^{-1}, \quad x \in G \quad (8.12)$$

或者

$$\nabla g_1(u) = (\nabla f[f^{-1}(u)])^{-1}, \quad u \in G_0.$$

**证明** (a) 由定理7.2关于 $R_m$ 内的函数的微分基本引理直接导出.

(b) 的(8.11)式由定理7.3关于偏导数的链法则得到. 事实上 $\nabla F$ 的每一分量由定理7.3写为

$$F_{:,j}^i(x) = \sum_{k=1}^m g_{:,k}^i[f(x)] f_{:,j}^k(x),$$

这就是(8.11)式.

(c) 因为 $f$ 是1-1的, $f^{-1}$ 显然是个函数. 设 $\bar{y} \in G_0$  这里 $G_0 = f(G)$ , 那么 $\exists \bar{x}$ , 使 $f(\bar{x}) = \bar{y}$ . 因为 $\det \nabla f(\bar{x}) \neq 0$  由反函数定理(定理7.18),  $\exists$  正数 $h$ 与 $k$ , 使 $B(\bar{x}, k) \subset G$ , 对每一 $y \in B(\bar{y}, h)$ , 有唯一的 $x \in B(\bar{x}, k)$ , 使 $f(x) = y$ . 由序偶 $(y, x)$ 的集所定义的函数 $g_1(y)$ 是 $B(\bar{y}, h)$ 上的 $C^1$ 类函数, 且 $g_1$ 的定义域包含了 $B(\bar{y}, h)$ . 因此对 $G_0$ 之任一点 $\bar{y}$ ,  $\exists B(\bar{y}, h) \subset G_0$ , 即 $G_0$ 是开集.

由 $g_1[f(x)] = x$ , 及(8.11)式可得

$$\nabla x = \nabla g_1[f(x)] \cdot \nabla f(x) \quad \text{即}$$

$$\nabla g_1[f(x)] = [\nabla f(x)]^{-1}, \quad x \in G.$$

或者

$$\nabla g_1(u) = [\nabla f[f^{-1}(u)]]^{-1}, \quad u \in G_0$$

(8.12)式成立.

本节的目的证明如下的定理。

**定理8.15 (变量替换公式)** 设  $G$  是  $\mathbf{R}_m$  内的开集,  $f: G \rightarrow \mathbf{R}_m$  是1-1的  $C^1$  类矢函数, 在  $G$  内  $\det \nabla f(x) \neq 0$ ,  $F$  是  $G$  内的有界闭图形, 而  $K: f(F) \rightarrow \mathbf{R}_1$  是  $f(F)$  上的连续函数. 那么  $f(F)$  是  $\mathbf{R}_m$  中的图形;  $K[f(x)]$  在  $F$  上连续, 且

$$\int_{f(F)} K(u) dV_m = \int_F K[f(x)] \cdot |J(x)| dV_m, \quad (8.13)$$

其中  $J(x) = \det \nabla f(x)$ .

证明这一定理的实质性步骤是把  $f$  化为一系列原始函数的复合, 对原始函数定理8.15的结论是较为明显的.

**定义** 设  $g$  是  $\mathbf{R}_m$  中开集  $M$  上到  $\mathbf{R}_m$  的矢函数,  $g = (g^1, g^2, \dots, g^m)$ , 如果对  $x \in M$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 满足

$$g^j(x) = x_j \quad (j \neq j_0, \quad g^{j_0}(x) = \varphi(x),$$

这里  $\varphi(x)$  是  $M$  到  $\mathbf{R}_1$  的  $C^1$  类函数 且  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_0}} > 0$ . 那么称  $g$  为原始函数.

注 直接计算可知  $\det \nabla g = \frac{\partial \varphi}{\partial x_{j_0}}$ . 事实上由

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow \text{第 } j_0 \text{ 行})$$

立即得到  $\det \nabla g = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$

**定义** 设  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  是  $(1, 2, \dots, m)$  的置换. 称  $R_m \rightarrow R_m$  的线性变换  $\tau$  是简单的, 如果

$$\tau(x_1, x_2, \dots, x_m) = (\pm x_{i_1}, \pm x_{i_2}, \dots, \pm x_{i_m}).$$

由定义立即得到下面引理.

**引理8.2** 简单变换的积是简单的, 简单变换的逆是简单的.

如果  $f_1, f_2$  都是  $R_m \rightarrow R_m$  的函数,  $f_2$  的值域含于  $f_1$  的定义域内, 以  $f_1 \circ f_2$  表示复合函数  $f_1[f_2(x)]$ .

下一引理给出分解  $f: R_m \rightarrow R_m$  为原始函数的复合函数的方法.

**引理8.3** 设  $G$  是  $R_m$  内的开集,  $\bar{x} \in G$ ,  $f: G \rightarrow R_m$  是  $C^1$  类的函数, 并且在  $G$  内  $\nabla f(x) \neq 0$ , 那么  $\exists G$  的包含  $\bar{x}$  的开子集  $G_1$ ,  $f$  在  $G_1$  上可以分解成  $(m+1)$  个函数的复合函数

$$f = g_{m+1} \circ g_m \circ g_{m-1} \circ \dots \circ g_1, \quad (8.14)$$

其前  $m$  个函数  $g_1, g_2, \dots, g_m$  都是原始函数,  $g_i$  定义于  $R_m$  内的开集  $G_i$  内,  $g_i: G_i \rightarrow G_{i+1}$ ,  $g_i = (g_i^1, g_i^2, \dots, g_i^m)$  且

$$\begin{aligned} g_i^j(x_1, x_2, \dots, x_m) &= x_j, \quad (j \neq i \text{ 时}); \quad g_i^i(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &= \varphi^i(x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (8.15)$$

函数  $\varphi^i$  由  $f$  确定,  $\varphi^i$  在  $G_i$  上有  $\varphi_{ii}^i > 0$ , 最后的  $g_{m+1}$  是简单变换.

**证明** 由  $\nabla f(\bar{x})$  是非奇异矩阵,  $\exists$  简单变换  $\tau$  使  $\nabla(\tau \circ f)$

的主子式在  $\bar{x}$  点都为正。以  $f_0$  表示  $\tau \circ f$ ,  $f_0 = (f_0^1, f_0^2, \dots, f_0^m)$ 。如下定义  $m$  个函数  $h_1, h_2, \dots, h_m$ :

$$h_i = (f_0^1, f_0^2, \dots, f_0^i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m),$$

$$h_m = f_0. \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

容易计算出  $\det \nabla h_i(\bar{x})$  恰好是  $\nabla f_0$  的一个主子式, 因此  $\nabla h_i(\bar{x})$  是非奇异的矩阵, 且  $\det \nabla h_i(\bar{x}) > 0$ 。根据定理 8.14 的 (c) 及  $h_i$  的定义, 对  $\forall i$ ,  $\exists$  一开集  $H_i$ , 在  $H_i$  上有  $\det \nabla h_i(x) > 0$ ,  $h_i$  是从  $H_i$  到一开集的 1-1 映象。定义

$$G_1 = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m,$$

$$G_{i+1} = h_i(G_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

下面限制  $h_1, h_2, \dots, h_m$  的定义于  $G_1$  上。并定义

$$g_1 = h_1, \quad g_i = h_i \circ h_{i-1}^{-1}, \quad i = 2, 3, \dots, m. \quad (8.16)$$

为定义  $g_{m+1}$ , 来考察  $\tau^{-1}$ , 它与  $\tau$  同样是简单变换, 于  $G_{m+1}$  上定义

$$g_{m+1} = \tau^{-1}.$$

注意到每一  $g_i$  是从  $G_i$  到  $G_{i+1}$  的 1-1 映象, 在  $G_i$  上  $\det \nabla g_i(x) \neq 0$ 。并且

$$\begin{aligned} & g_{m+1} \circ g_m \circ \dots \circ g_2 \circ g_1 \\ &= \tau^{-1} \circ h_m \circ h_{m-1}^{-1} \circ h_{m-1} \circ h_{m-2}^{-1} \circ \dots \circ h_2 \circ h_1^{-1} \circ h_1 \\ &= \tau^{-1} \circ h_m = \tau^{-1} \circ \tau \circ f = f. \end{aligned}$$

因此要证明(8·14)式成立, 还要证明每一 $g_i$ 是(8·15)所给的形式. 因为

$$g_1 = h_1 = (f_0^1, x_2, \dots, x_m),$$

显然 $g_1$ 符合(8·15)的要求. 而 $g_2 = h_2 \circ h_1^{-1}$ , 且由 $h_1^{-1} = (f_0^{-1}, x_2, \dots, x_m)$ ,  $h_2 = (f_0^1, f_0^2, x_3, \dots, x_m)$ , 可见

$$g_2 = (x_1, f_0^2, x_3, \dots, x_m).$$

同样地, 对 $\forall i, i = 2, 3, \dots, m$ ,

$$g_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, f_0^i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

由 $\nabla f_0$ 的所有主子式为正, 可知 $f_{0,i}^i > 0$ , 由矢 $h_i, g_i$ 的定义有 $\varphi_{i,i} = f_{0,i}^i > 0$ .

按引理8·3我们能把 $C^1$ 的函数 $f$ 表示为简单变换与 $m$ 个原始函数的复合. 为了证明定理8·15, 下一步于引理8·5来建立关于原始函数的替换定理. 为此要用到引理8·4所述的简单结果.

**引理8·4** 设 $G$ 是 $R_m$ 的一个集,  $\varphi: G \rightarrow R_1$ 为有界函数. 若存在正数 $\varepsilon$ , 使 $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ 对 $G$ 内的任何 $x, y$ 成立. 那么 $M - m \leq \varepsilon$ 成立, 其中 $M = \sup_{x \in G} \varphi(x), m = \inf_{x \in G} \varphi(x)$ .

引理8·4留给读者去证明.

**引理8·5** 设 $G$ 是 $R_m$ 内的开集,  $f: G \rightarrow R_m$ 是 $C^1$ 类的1- $1$ 的原始函数: 记 $f = (u^1, u^2, \dots, u^m)$ ,  $k$ 为1与 $m$ 之间的固定整数,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , 当 $i \neq k$ 时 $u^i(x) = x_i, u^k = f^k(x)$ , 且在 $G$ 上 $f_{i,i}^k(x) > 0$ .

(a) 若 $F \subset G$ ,  $F$ 是有界的图形, 那么集 $f(F)$ 也是 $R_m$ 内

的图形。

(b) 若令  $G_1 = f(G)$  且设  $K: G_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$  在  $G_1$  上一致连续, 那么有如下变量替换公式成立:

$$\int_F K[f(x)] |J(x)| dx = \int_{f(F)} K(u) du, \quad (8.17)$$

其中  $J(x) = \det \nabla f(x)$ 。

**证明** (a) 设  $G$  内的一闭长方格  $R = \{x: a_i \leq x_i \leq b_i, x \in \mathbb{R}_m\}$ 。那么  $f(R) = S$ ,  $S$  为  $u = [u^1, u^2, \dots, u^m]$  的如下的集:

$$a_i \leq u^i \leq b_i, \quad i \neq k,$$

$$f^K(x_1, \dots, x_{K-1}, a_K, x_{K+1}, \dots, x_m)$$

$$\leq u^K \leq f^K(x_1, \dots, x_{K-1}, b_K, x_{K+1}, \dots, x_m)。$$

应用定理 8.13 的推论,  $S$  是  $\mathbb{R}_m$  内的图形且它的体积  $V(S) = V[f(R)]$ , 计算:

$$V(S) = \int_{a_K}^{b_K} \left[ f^K(x_1, \dots, x_{K-1}, b_K, x_{K+1}, \dots, x_m) \right.$$

$$\left. - f^K(x_1, \dots, x_{K-1}, a_K, x_{K+1}, \dots, x_m) \right] dx_1$$

$$\dots dx_{K-1} dx_{K+1} \dots dx_m,$$

$$a_K' = (a_1, \dots, a_{K-1}, a_{K+1}, \dots, a_m), \quad b_K' = (b_1, b_{K-1}, b_{K+1},$$

$\dots b_m)$ , 上述积分是  $m-1$  维的。由微积分基本定理 (定理

5.8) , 上面被积函数可以写成

$$\int_{x_K}^{b_K} f_{,K}^K dx_K.$$

于是

$$V(s) = \int_R f_{,K}^K(x) dV_m,$$

其中 $V_m$ 是 $R_m$ 中的体积元素。由 $f$ 是原始函数, 容易算出 $|J(x)| = f_{,K}^K(x)$ , 因此得到

$$V[f(R)] = \int_R |J(x)| dV_m.$$

这样, 当 $F$ 是闭长方格 $R$ 时, (a) 被证明。现设 $F$ 是 $\overline{F} \subset G$ 的一个图形。对 $\forall$ 自然数 $n$ , 划分 $R_m$ 为边长是 $2^{-n}$ 的超立方的 $n$ 阶格, 以 $F_n^-$ 表示含于 $F$ 内的全体内超立方的并, 以 $F_n^+$ 表示全体内及边界超立方的并。由 $\overline{F}$ 是有界闭集因而是紧的, 据定理6.26  $\exists \rho > 0$ , 使 $\overline{F}$ 与 $G$ 的边界距离 $\geq \rho$ 。当 $n$ 充分大,  $F_n^+ \subset G$ , 因为 $F_n^+$ 的任两个超立方不含有公共内点, 因此

$$V[f(F_n^+)] = \int_{F_n^+} |J(x)| dV,$$

同理, 也有

$$V[f(F_n^-)] = \int_{F_n^-} |J(x)| dV.$$



分别以  $V^-[f(F)]$ 、 $V^+[f(F)]$  表示  $f(F)$  的内、外体积, 据定理 8·2, 有

$$\begin{aligned} \int_{F_n^-} |J(x)| dV &= V[f(F_n^-)] \leq V^-[f(F)] \\ &\leq V^+[f(F)] \leq V[f(F_n^+)] = \int_{F_n^+} |J(x)| dV. \end{aligned} \quad (8 \cdot 18)$$

因为  $f$  是  $C^1$  类函数, 函数  $|J(x)|$  对充分大的  $n$ , 在  $F_n^+$  上一致连续. 以  $M$  表示  $|J(x)|$  在  $F_n^+$  上的上界. 那么

$$\int_{F-F_n^-} |J(x)| dV \leq M \cdot V(F - F_n^-),$$

$$\int_{F_n^+-F} |J(x)| dV \leq M \cdot V(F_n^+ - F).$$

既然  $F$  是图形, 当  $n \rightarrow \infty$ , 上述两积分趋向于零. 把这一结果应用于 (8·18), 便得

$$V^+[f(F)] = V^-[f(F)],$$

所以  $f(F)$  是图形, 且

$$V[f(F)] = \int_F |J(x)| dV.$$

这里我们附带证明了 (8·17) 在  $K(x) \equiv 1$  的特殊情况下成立.

(b) 设  $F$  是一图形且  $\overline{F} \subset G$ . 因为  $f$  与  $|J|$  在  $\overline{F}$  上连续,

且由  $\overline{F}$  是有界闭集它是紧的, 所以  $f$  与  $|J|$  在  $\overline{F}$  上一致连续.

按照假设  $K$  在  $G_1$  上一致连续, 所以  $K[f(x)]|J(x)|$  在  $\overline{F}$  上一致连续, 因此  $K[f(x)]|J(x)|$  在  $F$  上可积。我们将以黎曼积分和来逼近 (8·17) 式两端的积分, 当划分充分细时, 两个积分和能任意地逼近, 这样来证明公式 (8·17) 成立。

现对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  是  $F$  的划分, 选取  $\xi_i \in F_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 由可积性,  $\exists \delta > 0$ , 当  $\|\Delta\| < \delta$ , 有

$$\left| \sum_{i=1}^n K[f(\xi_i)]|J(\xi_i)|V(F_i) - \int_F K[f(x)]|J(x)|dV_m \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8 \cdot 19)$$

同样地,  $\Delta_1 = \{F'_1, F'_2, \dots, F'_n\}$  是  $f(F)$  的划分,  $\|\Delta_1\| < \eta$ ,  $\xi'_i \in F'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 那么对充分小的  $\eta$ , 有

$$\left| \sum_{i=1}^n K(\xi'_i)V_m(F'_i) - \int_{f(F)} K(u)dV_m \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8 \cdot 20)$$

记  $M = \sup_{u \in f(F)} |K(u)|$ . 由  $f$  及  $|J|$  在  $F$  上一致连续, 我们能选取

$\delta$  如此之小, 使当  $|x' - x''| < \delta$  时有

$$|f(x') - f(x'')| < \eta,$$

$$\left| |J(x')| - |J(x'')| \right| < \frac{\varepsilon}{3MV_m(F)}. \quad (8 \cdot 21)$$

现在假定  $\delta$  还使 (8·19) 成立, 不然可取  $\delta$  更小些。选取

$\xi_i' = f(\xi_i)$  及  $F_i' = f(F_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$ , 那么  $\Delta_1 = \{F_1', F_2', \dots, F_n'\}$  是  $f(F)$  的划分, 由 (8.21) 之第一个不等式, 有  $\|\Delta_1\| < \eta$ . 这样 (8.20) 式成立. 以下分别记  $m_i = \inf_{x \in F_i} |J(x)|$ ,  $M_i = \sup_{x \in F_i} |J(x)|$ , 那么从 (a) 的证明与积分中值定理导出

$$V_m(F_i') = \int_{F_i} |J(x)| dV_m = |J_i| V_m(F_i), \quad (8.22)$$

这里  $|J_i|$  是满足  $m_i \leq |J_i| \leq M_i$  的一个数. 我们也有  $m_i \leq |J(\xi_i)| \leq M_i$ , 再据引理 8.4 及 (8.21) 之第二个不等式, 可得

$$\begin{aligned} \left| |J_i| - |J(\xi_i)| \right| &\leq M_i - m_i \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3MV_m(F_i)}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

估计两黎曼积分和的差:

$$\left| \sum_{i=1}^n K(\xi_i') V_m(F_i') - \sum_{i=1}^n K[f(\xi_i)] |J(\xi_i)| V_m(F_i) \right|, \quad (8.24)$$

用 (8.22) 及  $\xi_i' = f(\xi_i)$ , (8.24) 等于

$$\left| \sum_{i=1}^n K(\xi_i') [|J_i| - |J(\xi_i)|] V_m(F_i) \right|.$$

将 (8.23) 代入, 得到

$$\left| \sum_{i=1}^n K(\xi_i') V_m(F_i') - \sum_{i=1}^n K[f(\xi_i)] |J(\xi_i)| V_m(F_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

(8.25)

综合 (8.19), (8.20) 及 (8.25) 便有

$$\left| \iint_K K[f(x)] |J(x)| dV_m - \int_{f(F)} K(u) dV_m \right| < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 所以公式 (8.17) 成立.

**引理8.6** 设  $f: G \rightarrow G_1$  是简单变换, 那么引理8.5的结论成立.

**证明** 由  $f$  是简单变换, 它把  $G$  内的长方格映象为  $G_1$  内的长方格 (只可能方格的棱次序不同). 由  $f$  是简单变换, 它的  $|J(x)| = 1$ , 且对  $G$  内任意两点  $x', x''$  有

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''|.$$

其他的细节可由读者完成.

引理8.3证明了  $f$  可表示成简单变换与原始函数的复合, 引理8.5, 及引理8.6建立了原始函数及简单变换的变量替换公式. 现在综合这几个引理给出定理8.15的证明.

**定理8.15 (变量替换公式)** 证明如下:

**证明**  $\forall x_0 \in G$ , 由引理8·3,  $\exists$  开集  $G_1 \subset G, x_0 \in G_1$ , 于  $G_1$  上,  $f = g_{m+1} \circ g_m \circ g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1$ ,  $g_i$  为原始函数或简单变换, 引理8·5, 引理8·6建立了每个  $g_i$  的变量替换公式.

设  $F$  是  $G_1$  内的有界闭图形,  $K$  在  $f(F)$  上连续. 集  $f(F) = g_{m+1} \circ g_m \circ \cdots \circ g_1(F)$ , 应用引理8·6于简单变换  $g_{m+1}$ , 可知  $g_m \circ g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1(F)$  是图形, 定义这图形上的函数

$$K_1(u) = K[g_{m+1}(u)] |\det \nabla g_{m+1}(u)|.$$

那么  $K_1$  在  $g_m \circ g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1(F)$  上连续, 且有

$$\begin{aligned} \int_{f(F)} K(u) dV_m &= \int_{g_{m+1} \circ g_m \circ \cdots \circ g_1(F)} K(u) dV_m \\ &= \int_{g_m \circ \cdots \circ g_1(F)} K_1(u) dV_m. \end{aligned} \quad (8 \cdot 26)$$

再应用引理8·5于  $g_m$ , 定义图形  $g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1(F)$  上的函数

$$K_2(u) = K_1[g_m(u)] |\det \nabla g_m(u)|,$$

注意到  $K_2(u)$  在  $g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1(F)$  上连续, 由引理8·5, 有

$$\begin{aligned} \int_{f(F)} K(u) dV_m &= \int_{g_m \circ \cdots \circ g_1(F)} K_1(u) dV_m \\ &= \int_{g_{m-1} \circ \cdots \circ g_1(F)} K_2(u) dV_m. \end{aligned}$$

由代入, 得

$$K_2(u) = K_1[g_m(u)] |\det \nabla g_m(u)|$$

$$= K[g_{m+1}(g_m(u))] |\det \nabla g_{m+1}[g_m(u)]| |\det \nabla g_m(u)|.$$

令  $h_2(u) = g_{m+1} \circ g_m(u)$ , 上面等式成为

$$K_2(u) = K[h_2(u)] |\det \nabla h_2(u)|,$$

这里应用了行列式乘积的链法则. 继续上述步骤, 定义

$$h_p(u) = g_{m+1} \circ g_m \circ \cdots \circ g_{m-p+2}(u), \quad p = 2, 3, \cdots, m+1,$$

且  $K_p(u) = K[h_p(u)] \cdot |\det \nabla h_p(u)|$ . 得出等式

$$\begin{aligned} & \int_{g_{m+1} \circ \cdots \circ g_1(F)} K(u) dV_m \\ &= \int_{g_1(F)} K[h_m(u)] \cdot |\det \nabla h_m(u)| dV_m \\ &= \int_F K[h_{m+1}(u)] |\det \nabla h_{m+1}(u)| dV_m \\ &= \int_F K[f(u)] |\det \nabla f(u)| dV_m. \end{aligned}$$

这是对  $G_1$  内的图形  $F$  所要求证明的结果.

为了完成证明, 设  $F$  是  $G$  内的任一有界闭图形,  $K$  在  $G$  上连续. 由勒贝格定理 (定理6.27),  $\exists$  正数  $\rho$ , 使中心为  $F$  的点  $x$  的球  $B(x, \rho)$  都位于某开集  $G_1 \subset G$  之内. 划分  $F$  为图形  $F_1, F_2, \cdots, F_s$ , 使每一  $F_i$  含于唯一的球  $B(x, \rho)$  之内. 对  $i = 1, 2, \cdots, s$ , 都有

$$\int_{F_i(F_i)} K(u) dV_m = \int_{F_i} K[f(x)] |\det \nabla f(x)| dV_m.$$

对 $i$ 求和便得

$$\int_{f(F)} K(u) dV_m = \int_F K[f(x)] |\det \nabla f(x)| dV_m.$$

**例** 计算  $\int_F x_1 dV_2(x)$ ,  $F$  是曲线  $x_1 = -x_2^2$ ,  $x_1 = 2x_2 - x_2^2$ ,  $x_1 = 2 - 2x_2 - x_2^2$  所围的区域 (图8·5(a)).

用定理8·15, 引进新变量  $(u_1, u_2)$  定义

$$f: x_1 = u_1 - \frac{1}{4}(u_1 + u_2)^2, \quad x_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \quad (8 \cdot 27)$$

**解** 由图8·5 (b) 所示的  $G$  是  $F$  在  $(u_1, u_2)$  平面上的象. 从 (8·27) 解出  $u_1, u_2$ :

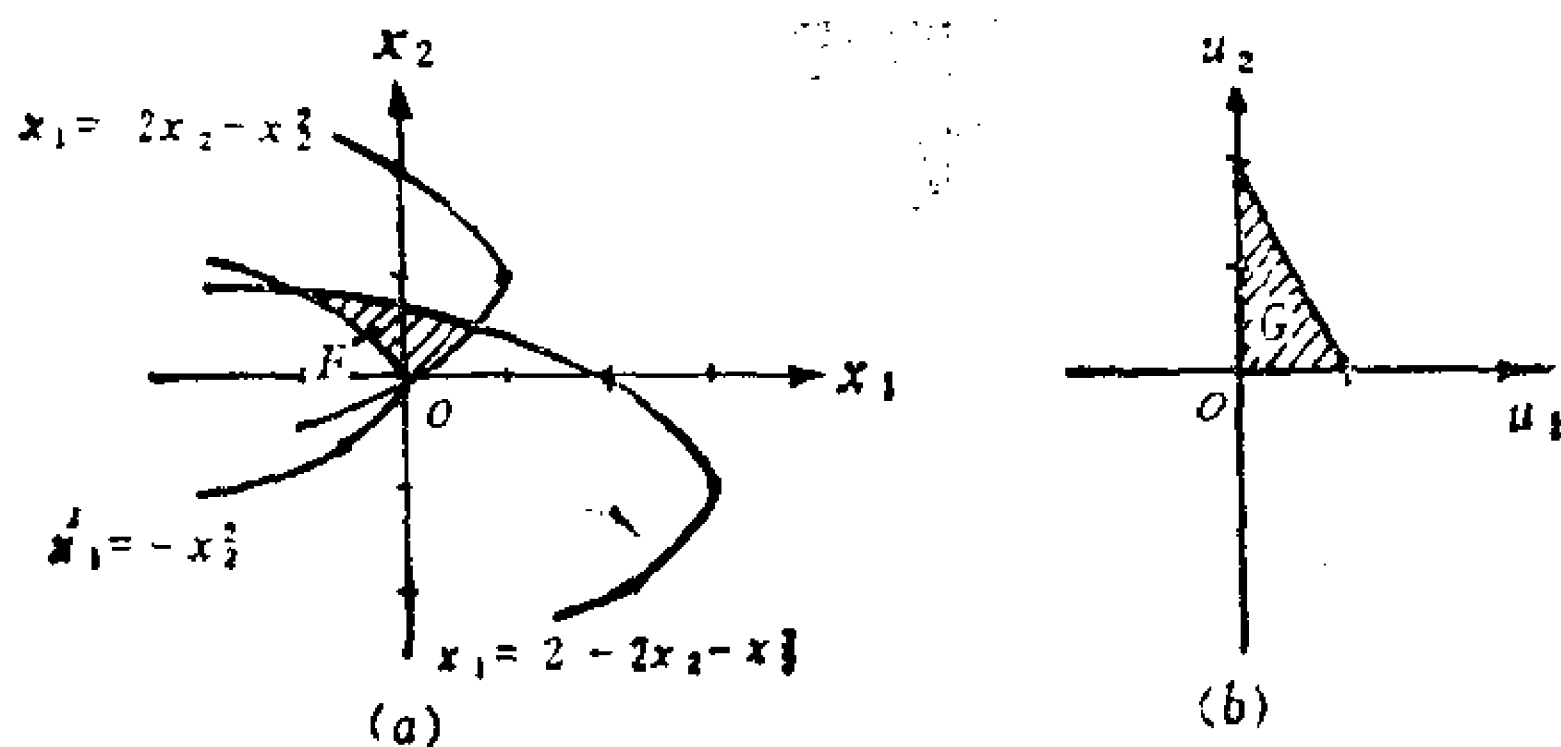


图 8·5

$$u_1 = x_1 + x_2^2, \quad u_2 = -x_1 + 2x_2 - x_2^2,$$

可见  $f$  是  $\mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$  的 1-1 的变换,  $G$  的边界曲线为:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad 2u_1 + u_2 = 2.$$

$f$  的雅可比行列式

$$\det \nabla f = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) & -\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

那么

$$\begin{aligned} \int_F x_1 dV_2(x) &= \int_G \left[ u_1 - \frac{1}{4}(u_1 + u_2)^2 \right] \frac{1}{2} dV_2(u) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^{2-u_1} \left( u_1 - \frac{1}{4}(u_1 + u_2)^2 \right) du_2 \right] du_1 \\ &= \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

## 习 题

习题1—6, 计算  $\int_F K(x_1, x_2) dV_2(x)$ ,  $F$  的边界曲线方程

已给定, 按所指出的新变量  $u_1, u_2$  进行积分. 求出所给变换的逆变换, 画出  $F$  在  $(u_1, u_2)$  平面上的相应的区域.

1.  $K(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ .  $F$  的边界为  $x_2 = 3x_1$ ,  $x_1 = 3x_2$  及  $x_1 + x_2 = 4$ . 映象  $x_1 = 3u_1 + u_2$ ,  $x_2 = u_1 + 3u_2$ .

2.  $K(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$ .  $F$  的边界为  $x_2 = 2$ ,  $x_1 = x_2^2 - x_2$ ,  $x_1 = 2x_2 + x_2^2$ . 映象  $x_1 = 2u_1 - u_2 + (u_1 + u_2)^2$ ,  $x_2 = u_1 + u_2$ .

3.  $K(x_1, x_2) = x_2$ .  $F$  的边界为  $x_1 + x_2 - x_2^2 = 0$ ,  $2x_1 + x_2$



$-2x_2^2 = 1, x_1 - x_2^2 = 0$ . 映象  $x_1 = u_1 - u_2 + (u_1 - 2u_2)^2$ ,  
 $x_2 = u_1 + 2u_2$ .

4.  $K(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{-3}$ ,  $F$  的边界为  $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1, x_1^2 + x_2^2 = 4x_1, x_1^2 + x_2^2 = 2x_2, x_1^2 + x_2^2 = 6x_2$ , 映象

$$x_1 = \frac{u_1}{(u_1 + u_2)^2}, \quad x_2 = \frac{u_2}{(u_1 + u_2)^2}.$$

5.  $K(x_1, x_2) = 4x_1x_2$ ,  $F$  的边界为  $x_1 = x_2, x_1 = -x_2$ ,

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 - x_2 - 1 = 0. \text{ 映象 } x_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-u_1 + u_2), \text{ 且设 } x_1 + x_2 > 0.$$

6.  $K(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .  $F$  是在第一象限由  $x_1^2 - x_2^2 = 1, x_1^2 - x_2^2 = 2, x_1x_2 = 1, x_1x_2 = 2$  所围的区域. 其逆映象  
 $u_1 = x_1^2 - \frac{1}{2}, u_2 = 2x_1x_2$ .

7. 证明引理 8.4.

8. 完成引理 8.6 的证明

9. 通过球坐标变换:  $x_1 = \rho \cos \varphi \sin \theta, x_2 = \rho \sin \varphi \sin \theta,$

$x_3 = \rho \cos \theta$ , 计算积分  $\int_F x_3 dF$ , 这里  $F$  是由不等式

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{3} \leq 1, x_3 \geq 0$$

所确定的区域.

## 第九章 无穷序列与无穷级数

### § 9.1 基础的定理

通常用式子

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \text{ 或 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (9.1)$$

表示无穷级数。 $u_n$  称为级数的项，而

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

称为级数的部分和。当级数收敛时，(9.1) 还表示级数的和。为了避免这种不确切性，以序偶来定义级数。

**定义** 两无穷序列的序偶  $(\{u_n\}, \{S_n\})$ ，当  $\{S_n\}$  之每一  $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$  时，称为无穷级数。 $u_n$  称为级数的项， $S_n$  称为级数的部分和。若当  $n \rightarrow \infty$ ， $S_n$  收敛于数  $S$ ，称级数是收敛的，它的和是  $S$ 。若当  $n \rightarrow \infty$ ， $S_n$  不趋向于极限，称级数发散。级数被它的项组成的序列  $\{u_n\}$  唯一确定。

尽管上述定义在逻辑上是完善的，但在表示形式上较之

习惯表示的 (9.1) 要麻烦。因此，在能够看出  $\sum_{n=1}^{\infty} u$  表示

的是级数或是它的和的通常情况下，仍采用习惯的记法。

**定理9·1** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**证明** 对  $\forall n > 1$ , 有  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . 若以  $S$  表示级数的和, 那么当  $n \rightarrow \infty$  时,  $S_n \rightarrow S$ ,  $S_{n-1} \rightarrow S$ . 因此, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_n \rightarrow S - S = 0$ .

**注** 定理9·1给出级数收敛的必要条件, 下面定理9·5推论表明,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  不保证级数收敛.

设给定级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

那么去掉它的有限项可以得到新的级数, 显然新级数收敛  $\iff$  原级数收敛.

**定理9·2** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  是给定的级数且  $C$  是一非零的常数.

(a) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  收敛, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$  都是收敛的. 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C u_n = C \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(b) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$  是发散的.

**证明** 对  $\forall$  自然数  $n$ , 有

$$\sum_{K=1}^n (u_K \pm V_K) = \sum_{K=1}^n u_K \pm \sum_{K=1}^n V_K,$$

$$\sum_{K=1}^n Cu_K = C \sum_{K=1}^n u_K.$$

由极限定理 (§ 2.5) 立即得出 (a). 为了证明 (b), 只要注

意到: 若  $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$  收敛, 那么由 (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{C}\right)(Cu_n)$ , 即  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

收敛.

**级数**

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

称为以  $r$  为公比的几何级数或等比级数.

**定理9.3**  $a \neq 0$  的几何级数, 当  $|r| < 1$  时收敛; 当  $|r| \geq 1$  时发散. 在收敛情况下

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

**证明** 容易验证

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

若  $|r| < 1$ , 当  $n \rightarrow \infty$ ,  $r^n \rightarrow 0$  (参看 § 2.5. 习题 6). 因此

$S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$ . 若  $|r| \geq 1$ , 那么  $u_n \not\rightarrow 0$ , 由定理 9.1 级数发散.

**定理 9.4 (比较判别法)** 设  $u_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

(a) 若对  $\forall n$ , 都有  $a_n \geq u_n$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛且 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(b) 若对  $\forall n$  都有  $0 \leq a_n \leq u_n$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

发散.

证明留给读者 (习题 11 与习题 12).

设  $f$  在  $[a, \infty)$  上连续. 定义

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (9.2)$$

当 (9.2) 右端极限存在时称积分为无限区间上的瑕积分收敛; 否则称瑕积分发散.

**定理 9.5 (积分判别法)** 设  $f$  为  $[1, \infty)$  上连续、非负、

不增的函数, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的项  $u_n = f(n)$ , 那么

(a) 如果  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛.

(b) 如果  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

**证明** 因为  $f$  是非负且不增的, 对  $n \geq 2$  有

$$\sum_{j=2}^n u_j \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

直观地如图 (9.1) 所示. 定义

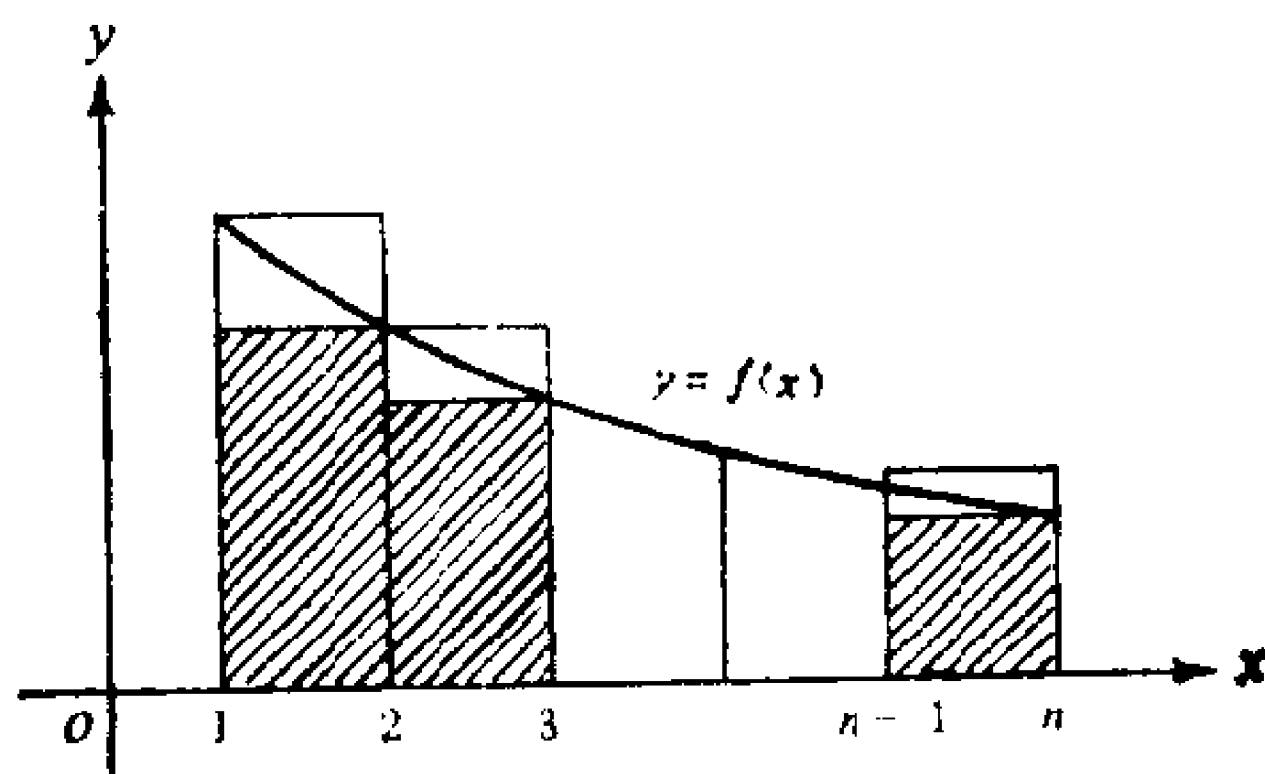


图 9.1

$$F(x) = \int_1^x f(x) dx.$$

当  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  收敛时, 那么  $F(x)$  这一不减函数, 当  $x \rightarrow \infty$  时

$F(x)$  趋向于极限, 因此  $F(n)$  是不减的有界序列.

而  $S_n = \sum_{j=2}^n u_j$ , 且有  $S_n \leq F(n)$ , 因而  $S_n$  趋向于极限。于是

(a) 被证明。当积分  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  发散, 即  $x \rightarrow \infty, F(x) \rightarrow +\infty$ 。

所以  $F(n) \rightarrow +\infty$ 。而由  $F(n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} u_j$ , 可以断定级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

发散。

定理9·5的推论  $p$ -级数:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 当  $p > 1$  时收敛;

当  $p \leq 1$  时发散。

取定理9·5中的  $f(x) = \frac{1}{x^p}$  立即得出推论。其细节留

给读者。对于  $0 < p \leq 1$ , 虽然  $p$ -级数的项  $u_n$ , 在  $n \rightarrow \infty$  时

$u_n = \frac{1}{n^p} \rightarrow 0$ , 但级数是发散的。这就表明定理9·1的逆是

不成立的。可见由  $u_n \rightarrow 0$  不能断定  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  的收敛性。

**例** 判别下面级数敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \log(n+2)}$$

**解** 定义

$$f(x) = \frac{1}{(x+2) \log(x+2)},$$

注意  $f$  是正的不增的连续函数,  $f(n) = \frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$ ,

有

$$\begin{aligned} \int_1^a \frac{dx}{(x+2)\log(x+2)} &= \int_3^{a+2} \frac{du}{u\log u} \\ &= \int_3^{a+2} \frac{d\log u}{\log u} = \log[\log(a+2)] - \log[\log 3] \end{aligned}$$

当  $a \rightarrow \infty$  时  $\log[\log(a+2)] \rightarrow +\infty$ , 瑕积分发散, 从而所给级数发散.

## 习 题

习题1—10, 判别给定级数敛散性.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_3}};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}};$$



$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n};$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n!}; p \text{ 为正常数.}$$

11. 证明定理9.4 (a) [提示: 应用实数连续性公理]

12. 证明定理9.4 (b).

13.  $p$  取哪些值时  $\sum_{n=1}^{\infty} \log n / n^p$  收敛?

14.  $p$  取哪些值时  $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^p / n$  收敛?

15. 证明定理9.5的推论.

## § 9.2 一般项级数, 幂级数

当级数的每一项是非负的, 比较判别法是判别级数敛散性的常用的有效工具. 这一判别法也能应用于某些既有正项也有负项的所谓一般项级数.

**定义** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛而  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  称为条件收敛.

**定理9.6** 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛, 且

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|.$$

**证明** 对  $\forall n$ , 定义

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

那么有

$$u_n = v_n - w_n, \quad |u_n| = v_n + w_n.$$

$$0 \leq v_n \leq |u_n|, \quad 0 \leq w_n \leq |u_n|.$$

由比较判别法,  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$  都收敛. 因而  $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛. 且

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \end{aligned}$$

**注** 条件收敛级数不能绝对收敛. 下面定理证明  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  收敛, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  是  $p=1$  的  $p$ -级数它是发散的. 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  是条件收敛

的.

**定理9.7 (交错级数定理)** 设 $u_n$ 满足条件:

- (i)  $u_n$ 正负交错;
- (ii) 对 $\forall n$ ,  $|u_{n+1}| < |u_n|$ ;
- (iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 若以 $S$ 表示它的和, 那么对 $\forall n$ ,  $S$ 介于 $S_n$ 与 $S_{n+1}$ 之间.

**证明** 不妨设 $u_1$ 为正, 否则可从 $u_2$ 开始, 放弃一项并不影响收敛性. 由(i), 对 $\forall n$ ,

$$u_{2n-1} > 0, u_{2n} < 0.$$

如下写出

$$S_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n}).$$

由(ii), 对 $\forall k$ ,  $|u_{2k}| < u_{2k-1}$ , 每一括弧的项是正的, 因而 $S_{2n}$ 随 $n$ 递增. 另一方面

$$S_{2n} = u_1 + (u_2 + u_3) + \cdots + (u_{2n-2} + u_{2n-1}) + u_{2n}$$

括弧的项及 $u_{2n}$ 都小于零, 因此对 $\forall n$ ,  $S_{2n} < u_1$ .  $S_{2n}$ 是有界、递增序列, 它收敛于数 $S$ , 且 $S_{2n} < S$ . 注意到 $S_{2n-1} = S_{2n} - u_{2n} > S_{2n}$ , 特别对 $\forall n$ ,  $S_{2n-1} > S_{2n}$ . 这表明 $S_{2n-1}$ 是有下界的. 此外

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} + (u_{2n} + u_{2n+1}) < S_{2n-1},$$

$S_{2n-1}$ 还是递减的. 当 $n \rightarrow \infty$ ,  $S_{2n-1}$ 有极限. 由(iii),  $u_{2n} \rightarrow 0$ , 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n-1} + u_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1} = S$ .

$S_{2n-1}$  是递减的, 因此  $S_{2n-1} < S$ . 于是当  $p$  为奇数,  $S_p \geq S$ ; 当  $p$  为偶数,  $S_p \leq S$ .

下一定理对于判别级数是否绝对收敛很有用.

**定理9.8 (比值判别法)** 设  $u_n \neq 0, n = 1, 2, \dots$ , 且当  $n \rightarrow \infty$  时

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow \rho, \text{ 那 } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow +\infty.$$

那么

(i) 若  $\rho < 1$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛.

(ii) 若  $\rho > 1$  或  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow +\infty$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(iii) 若  $\rho = 1$ , 不能给出肯定结论.

**证明** (i) 设  $\rho < 1$ , 并选取  $\rho'$ , 满足  $\rho < \rho' < 1$ . 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \rho, \quad \exists N, \text{ 使当 } n \geq N \text{ 便有}$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \rho', \text{ 即 } |u_{n+1}| < \rho' |u_n|.$$

因此

$$|u_n| < \rho' |u_{n-1}| < (\rho')^2 |u_{n-2}| < \dots < (\rho')^{n-N} |u_N|.$$

把  $\sum_{n=N}^{\infty} |u_n|$  与几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho')^n$  相比较可知  $\sum_{n=N}^{\infty} |u_n|$  收敛.

因而  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛.

(ii) 若  $\rho > 1$ , 或  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow +\infty$ , 那么  $\exists N$ , 使当  $n \geq N$  有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1, \text{ 即 } |u_{n+1}| > |u_n|.$$

这样, 当  $n \rightarrow \infty$ ,  $u_n$  不能趋向于零. 由定理 9.1 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散.

(iii)  $p$ -级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 不论  $p$  取什么值都有

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left( \frac{n+1}{n} \right)^p \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty).$$

这个例子说明  $\rho = 1$  情况下, 比值判别法失效.

形如

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots,$$

的级数称为幂级数, 这里  $a, C_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) 是常数. 若  $x$  取定一个值, 那么上面级数成为数项级数, 可以考察它的敛散性. 对  $\mathbf{R}_1$  中一切使幂级数收敛的  $x$  的值, 让相应地级

数的和与  $x$  相对应, 便定义了一个函数  $f: x \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ .

后面我们将要证明基本的初等函数，如三角函数，对数函数与指数函数等都是幂级数定义的函数。不仅如此，幂级数将被用来定义和研究许多的非初等的函数。

**引理9.1** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  收敛，那么  $\exists$  正数  $M$ ，使对  $\forall n$ ，

有  $|u_n| < M$  成立。

**定理9.9** 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n (x-a)^n$  对  $x = x_1$ ， $x_1 \neq a$  收敛，

那么级数对所有满足  $|x-a| < |x_1-a|$  的  $x$ ，绝对收敛。并且  $\exists$  正数  $M$ ，对满足  $|x-a| < |x_1-a|$  的  $x$  与一切  $n$ ，有

$$|C_n (x-a)^n| \leq M \left( \frac{|x-a|}{|x_1-a|} \right)^n \quad (9.3)$$

**证明** 由引理9.1， $\exists M$ ，使对  $\forall n$ ，有

$$|C_n (x_1-a)^n| \leq M$$

又因为

$$\begin{aligned} |C_n (x-a)^n| &= |C_n (x_1-a)^n| \cdot \frac{|(x-a)^n|}{|(x_1-a)^n|} \\ &\leq M \left( \left| \frac{x-a}{x_1-a} \right| \right)^n, \end{aligned}$$

(9.3) 式被证明。由  $\left| \frac{x-a}{x_1-a} \right| < 1$ ，几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M$

$\left(\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|\right)^n$  收敛, 由比较判别法  $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x-a)^n|$  收敛.

**定理9.10** 设  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$  是给定的幂级数, 那么

- (i) 级数仅在  $x=a$  点收敛;
- (ii) 级数对一切  $x$  值收敛;
- (iii) 存在  $R$ , 级数对  $|x-a| < R$  收敛, 对  $|x-a| > R$  发散.

(i), (ii), (iii) 有且仅有之一的情况出现.

**证明** 存在简单的例说明 (i) 或 (ii) 的情况可能出现. 为了证明 (iii), 设  $\exists x_1 \neq a$ , 级数在  $x=x_1$  点收敛, 也  $\exists x_2$ , 级数在  $x=x_2$  点发散. 定义

$$S = \{ \rho : \text{级数对 } |x-a| < \rho \text{ 收敛} \},$$

由定理9.9,  $|x_1-a| < |x_2-a|$  且  $|x_1-a| \in S$ ,  $|x_2-a|$  为  $S$  的上界, 记  $R = \sup S$ . 设  $|x'-a| < R$ , 那么  $\exists \rho \in S$  使  $|x'-a| < \rho < R$ . 仍由定理9.9, 级数在  $x=x'$  收敛. 于是幂级数对  $|x-a| < R$  收敛. 现设  $|x''-a| = \rho' > R$ . 若级数对  $x''$  收敛, 那么  $\rho' \in S$ , 这与  $R = \sup S$  相矛盾. 因此, 幂级数在  $x''$  点发散.

**例** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n n^2}$ , 求使它收敛的  $x$  的

值.

**解** 应用比值判别法,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{1}{2} |x-1| \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{1}{2} |x-1| \right|.$$

因此当  $\frac{1}{2} |x-1| < 1$ , 即  $-1 < x < 3$  时级数收敛. 而对于

$\frac{1}{2} |x-1| = 1$ , 也即  $x = -1$  与  $x = 3$ , 级数的各项的绝对值

构成一个  $p = 2$  的  $p$ -级数, 它是收敛的. 于是所给幂级数收敛的  $x$  值满足  $-1 \leq x \leq 3$ , 而在其他的  $x$  值处级数发散.

## 习 题

判断习题1—12各个级数的敛散性. 当级数收敛时确定它是绝对收敛还是条件收敛.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (10)^n}{n!}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{(10)^n},$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)}{n^2 + 1}, \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \left( n - \frac{1}{2} \right)},$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( \frac{4}{3} \right)^n}{n^4}, \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)},$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt[n]{n}}, \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)},$$



$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 - 3n + 2)}{n^3},$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \log(n+1)},$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \log(n+1)}{n+1},$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \log n}{n^2}.$$

习题13—20, 求各幂级数收敛的 $x$ 值。

$$13. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}},$$

$$15. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{n+1},$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x+2)^n,$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} (x-3)^n,$$

$$18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n^2 + 2n + 1)}{2^n (n+1)^3} x^n,$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n+1) 2^n}{n+1} (x+1)^n,$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\log n) 2^n}{3 \cdot n^2} x^n.$$

21. 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是正项收敛级数, 证明对  $\forall p > 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p \text{ 收敛.}$$

22. 求二项式展开的级数

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n \quad (m \text{ 是常数})$$

的收敛区间.

23.\* 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  是满足定理9.7的条件收敛级数. 设  $A$  是任一实

数. 证明交换级数的项之后能使新级数的和是  $(A-1, A+1)$  中的一个数.

24. 证明引理9.1.

25. 举出定理9.10之情况 (i)、(ii) 的实例.

### § 9.3 一致收敛性

设  $\{f_n\}$  的每一  $f_n$  都是定义域包含区间  $I \subset \mathbf{R}_1$  的函数. 对于  $\forall x \in I$  可以研究  $\{f_n(x)\}$  这一数列的收敛性. 一致收敛性的概念是一个有关在  $I$  上每个点都收敛的序列  $\{f_n(x)\}$

的收敛性质的概念。这一概念在数学分析里有许多应用，特别有意义的是如定理9·12指出的：设 $f_n$ 在 $I$ 上连续，若 $\{f_n\}$ 一致收敛时，那么 $f_n$ 的极限也是连续函数。

**定义** 称 $\{f_n\}$ 在 $I$ 上一致收敛于函数 $f \iff$ 对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists$ 与 $x$ 无关的 $N$ ，使当 $n > N$ 时， $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ，对一切 $x \in I$ 成立。 (9·4)

一致收敛性与通常在每一点收敛性的区别在于整数 $N$ 不依赖于 $x$ ，即对 $I$ 中一切 $x$ 有共同的 $N$ 。一致收敛性的几何意义如图9·2所示，若 $\varepsilon$ 是某一正数，当 $n > N$ ， $y = f_n(x)$ 的图象整个地介于 $f(x) - \varepsilon$ 与 $f(x) + \varepsilon$ 之间。

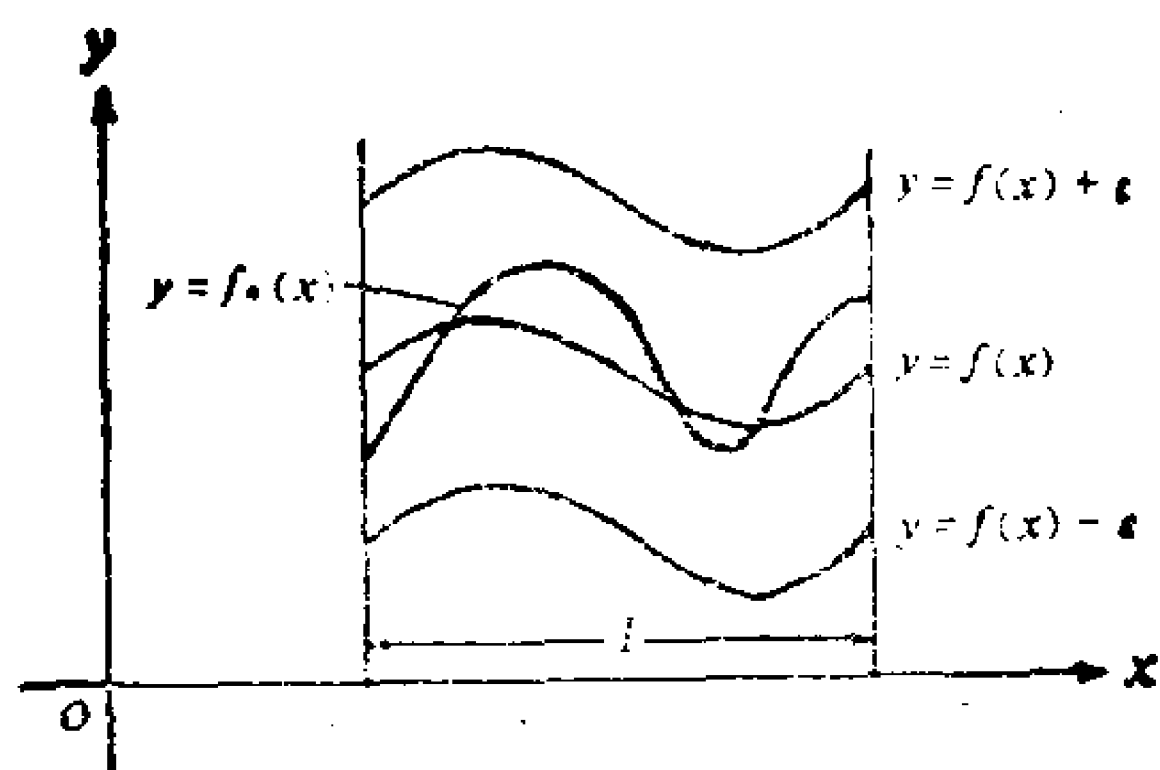


图 9·2

序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $I$ 的每一点 $x$ 都收敛于 $f(x)$ ，而不一致收敛的例子如：

$$f_n : x \rightarrow \frac{2nx}{1 + n^2 x^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}.$$

$n = 1, 2, 3, 4$ 的 $f_n$ 的图形如图9·3所示。 $f_n$ 可写为

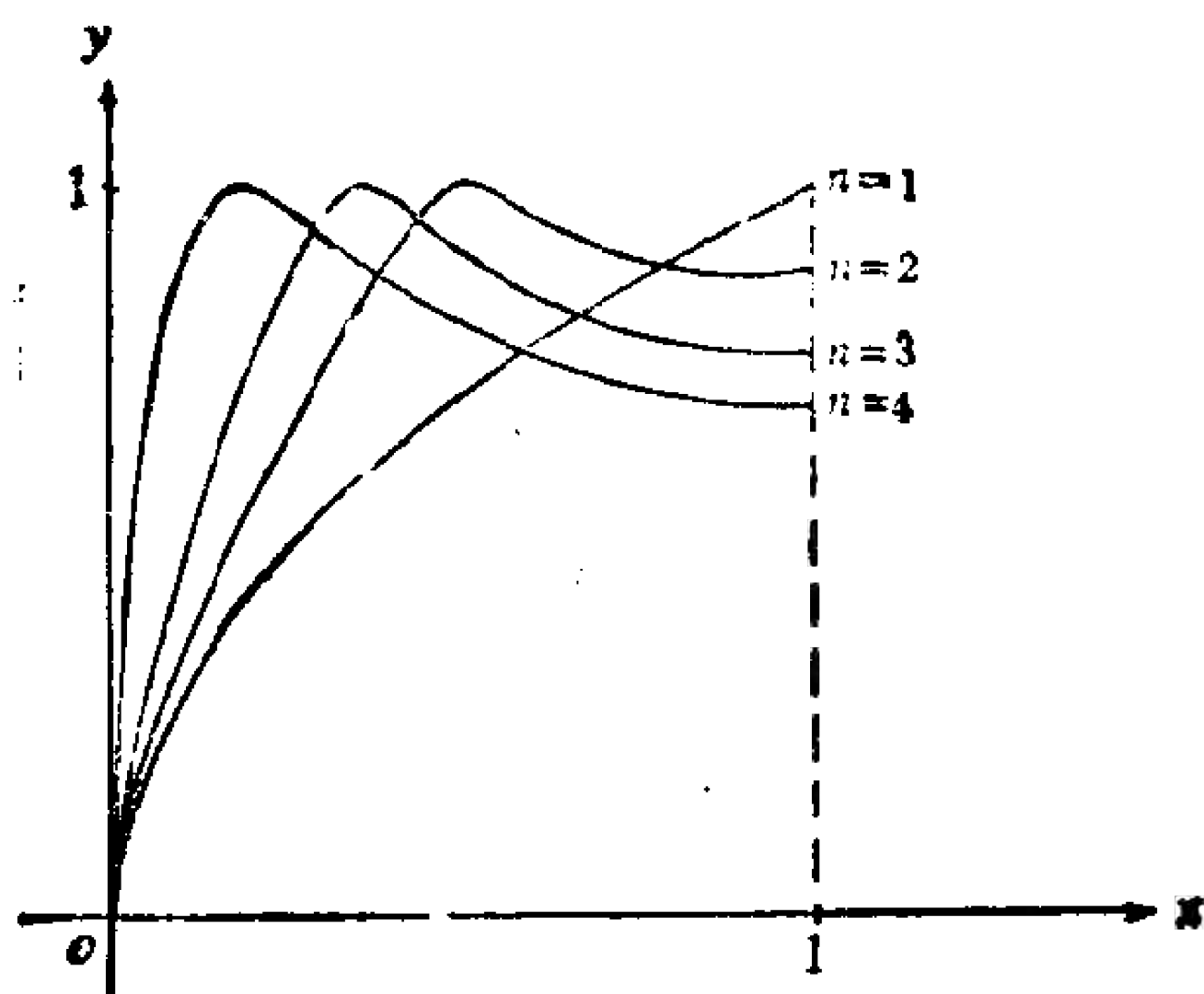


图 9.3

$$f_n(x) = \frac{\frac{2x}{n}}{x^2 + \frac{1}{n^2}},$$

注意到  $\forall x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 当  $x = 0$ , 对  $\forall n$ ,  $f_n(0) = 0$ . 因此  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \equiv 0$ , 即对  $\forall x \in I$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ .

$f_n(x)$  在  $x = \frac{1}{n}$  点, 取最大值  $f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$  (可由  $f_n(x)$  仅有

临界点  $x = \frac{1}{n}$  断定  $x = \frac{1}{n}$  为  $f_n(x)$  的最大值点). 若取  $0 < \varepsilon < 1$ ,

便不存在使当  $n > N$  有 (9.4) 成立的  $N$ ; 这是因为  $\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1$  对每一  $n$  都成立.

用定义判定给出的函数序列是否一致收敛往往是困难的，下一定理给出一致收敛性常用的简单的准则。

**定理9.11** 设 $f_n (n=1, 2, \dots)$ 及 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续，那么 $f_n$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f \iff$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时，

$$\varepsilon_n = \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

**证明** (a) 首先假定收敛是一致的。那么对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N$ ，当 $n > N$ ，对 $I$ 中所有 $x$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 。因为 $|f_n(x) - f(x)|$ 在 $I$ 上连续，它在 $I$ 的点 $x_n$ 达到最大值 $\varepsilon_n = |f_n(x_n) - f(x_n)|$ 。当然应当有 $\varepsilon_n < \varepsilon$ ，对一切 $n > N$ 成立。由 $\varepsilon$ 的任意性，按极限定义，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。

(b) 假定当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。那么对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N$ ，使当 $n > N$ 有 $\varepsilon_n < \varepsilon$ 。由 $\varepsilon_n = \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ ，有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n < \varepsilon$$

对 $I$ 中所有 $x$ 成立，由定义 $f_n$ 一致收敛于 $f$ 。

**例** 设 $f_n: x \rightarrow \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}$ ， $x \in I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ ，

$$n = 1, 2, \dots$$

证明对 $\forall x \in I$ ， $f_n(x) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ，并判定 $f_n$ 是否一致收敛。

**解** 因为 $f_n(0) = 0$ ，对一切 $n$ 成立，显然 $f_n(0) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。对于 $x > 0$ ，把 $f_n$ 写成

$$f_n(x) = \frac{xn^{-\frac{1}{2}}}{x^2 + \left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

可知当  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ ,  $f_n(x)$  的导数

$$f'_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}(1 - n^2 x^2)}{(1 + n^2 x^2)^2},$$

当  $x = \frac{1}{n}$  时, 且  $f'_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ , 且  $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}}$  为  $f_n$  最

大值。因此当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_n = \frac{1}{2} n^{\frac{1}{2}}$  不趋向于零, 由定理

9.11,  $f_n$  不一致收敛。

定理9.11仅在  $f$  可知的情况下才能应用。

关于一致收敛性的重要作用可从下面的定理看到。

**定理9.12** 假设  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 在区间  $I$  上连续, 且在  $I$  上一致收敛于  $f$ , 那么  $f$  在  $I$  上连续。

**证明** 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$ , 使当  $n > N$  对  $I$  中所有  $x$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9.5)$$

令  $x_0$  表示  $I$  的任一固定点, 因  $f_{N+1}$  在  $I$  上连续,  $\exists \delta > 0$ , 使  $I$  中满足  $|x - x_0| < \delta$  的  $x$  有

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (9.6)$$

由 (9.5) 与 (9.6), 当  $|x - x_0| < \delta$  有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{N+1}(x)|$$

$$\begin{aligned}
& + |f_{N+1}(x) - f_{N+1}(x_0)| + |f_{N+1}(x_0) - f(x_0)| \\
& < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

由连续性定义,  $f$  在  $x_0 \in I$  连续. 由  $x_0$  任意性,  $f$  在  $I$  上连续.

**定理9·13** (一致收敛序列的积分) 设序列  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 在有界的区间  $I$  上连续且一致收敛于  $f$ ,  $c \in I$ , 并定义

$$F_n(x) = \int_c^x f_n(t) dt, \quad x \in I.$$

那么  $f$  在  $I$  上连续且  $F_n(x)$  在  $I$  上一致收敛于

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

**证明** 由定理9·12,  $f$  在  $I$  上连续. 令  $I$  的长为  $L$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $f_n$  一致收敛于  $f$ , 所以  $\exists N$ , 使当  $n > N$ , 对  $I$  中所有  $x$  有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{L}.$$

因此

$$\begin{aligned}
|F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_c^x [f_n(t) - f(t)] dt \right| \\
&\leq \left| \int_c^x |f_n(t) - f(t)| dt \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{L} |x - c| \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

当 $n > N$ 对于 $I$ 中所有 $x$ 成立. 即 $F_n(x)$ 在 $I$ 上一致收敛于 $F(x)$ .

**定理9.14** 设 $\{f_n\}$ 的每一 $f_n$ 在有界开区间 $I$ 内具有连续导数,  $f_n(x)$ 对 $\forall x \in I$ 收敛于 $f(x)$ ,  $f_n'$ 在 $I$ 上一致收敛于 $g$ . 那么 $g$ 在 $I$ 上连续并且对 $\forall x \in I$ 有

$$f'(x) = g(x).$$

**证明** 由定理9.12可知 $g$ 在 $I$ 上连续. 设 $c$ 是 $I$ 的任一点. 对 $\forall n$ , 及 $\forall x \in I$ , 有

$$\int_c^x f_n'(t) dt = f_n(x) - f_n(c).$$

因为 $\{f_n'\}$ 一致收敛于 $g$ 且 $f_n(x)$ 收敛于 $f(x)$ , 应用定理9.33得

$$\int_c^x g(t) dt = f(x) - f(c). \quad (9.7)$$

对(9.7)求导数便得

$$f'(x) = g(x), \quad x \in I.$$

关于 $R_1$ 内的实值函数序列的上述结果, 有些可直接推广到定义在距离空间 $S$ 的集 $A$ 上的实值函数.

**定义** 设 $A$ 是距离空间 $S$ 内的集,  $f_n: S \rightarrow R_1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 是函数序列. 称 $\{f_n\}$ 在 $A$ 上一致收敛于函数 $f: A \rightarrow R_1 \iff$ 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$ , 使 $n > N$ 及一切 $x \in A$ , 有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

下一定理是定理9.12的推广.



**定理9·15** 设 $f_n$ 是距离空间 $S$ 上的实值函数, 且 $f_n$ 在 $S$ 的集 $A$ 上连续, 若 $\{f_n\}$ 在 $A$ 上一致收敛于 $f$ , 那么 $f$ 在 $A$ 上连续.

其证明与定理9·12的证明相似, 留作习题.

定理9·13与9·14能推广到定义在 $N$ —维欧几里得空间的实值函数.

**定理9·16** 设 $F$ 是 $R_N$ 内的闭图形,  $f_n: F \rightarrow R_1, n = 1, 2, \dots$ , 是在 $F$ 上连续且一致收敛于 $f$ , 那么 $f$ 在 $F$ 上连续且

$$\int_F f dV_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dV_N.$$

其证明与定理9·13的证明相似, 留作习题.

**定理9·17** 设 $K$ 是满足 $1 \leq K \leq N$ 的一整数,  $G$ 是 $R_N$ 内的开集,  $f_n: G \rightarrow R_1, f_n$ 及 $f_n|_K$ 在 $G$ 上连续, 如果对 $\forall x \in G, \{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 且 $\{f_n|_K\}$ 在 $G$ 上一致收敛于函数 $g$ , 那么 $g$ 在 $G$ 上连续, 且

$$f|_K(x) = g(x), \quad x \in G.$$

其证明可仿照定理9·14作出, 也留作习题.

连续函数序列 $\{f_n\}$ 于每一点收敛于连续函数, 可能

$\int_F f_n dV$ 不趋向于 $\int_F f dV$ . 举例如下: 定义

$$f_n: \rightarrow \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ -n^2 x + 2n, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

其图象如图9·4所示, 容易看出对  $x \in I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$   $f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 0$ , 但是,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

定理9·15、9·16、9·17能够进一步推广为定义域属于距离空间  $(S_1, d_1)$ , 值域属于  $(S_2, d_2)$  的函数序列 (参看习题19)。

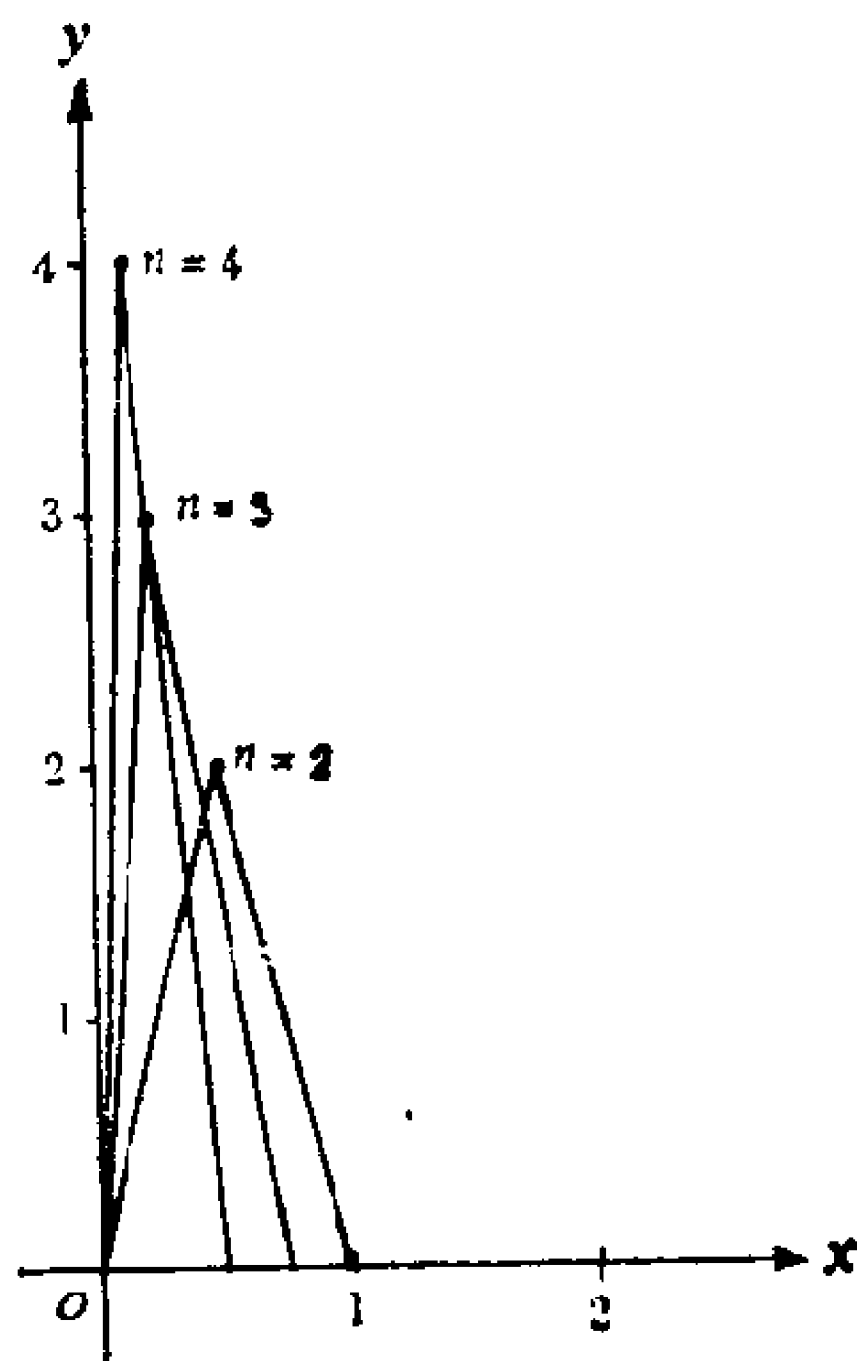


图 9·4

## 习 题

习题1—10, 证明  $\{f_n(x)\}$  收敛于  $f(x)$  ( $x \in I$ ), 并判定  $f_n$  是否在  $I$  上一致收敛于  $f$ .

1.  $f_n : x \rightarrow \frac{2n}{1+nx}$ ,  $f(x) \equiv 0$ ,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .

2.  $f_n : x \rightarrow \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ,  $f(x) \equiv 0$ ,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .

3.  $f_n : x \rightarrow \frac{n^3 x}{1+n^4 x}$ ,  $f(x) \equiv 0$ ,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .

4.  $f_n : x \rightarrow \frac{n^3 x}{1+n^4 x^2}$ ,  $f(x) \equiv 0$ ,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .

5.  $f_n : x \rightarrow \frac{nx^2}{1+nx}$ ,  $f(x) = x$ ,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .

$$6. f_n : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{1}{nx}\right), \quad f(x) = x^{\frac{1}{2}},$$

$$I = \{x : 0 \leq x \leq 2\}.$$

$$7. f_n : x \rightarrow \frac{\sin nx}{2nx}, \quad f(x) \equiv 0, \quad I = \{x : 0 < x < \infty\}.$$

$$8. f_n : x \rightarrow n^{\frac{1}{2}}x(1-x), \quad f(x) \equiv 0, \quad I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}.$$

$$9. f_n : x \rightarrow \frac{1-x}{1-x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$I = \left\{-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

$$10. f_n : x \rightarrow nxe^{-nx^2}, \quad f(x) \equiv 0, \quad I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}.$$

11. 证明序列  $f_n : x \rightarrow x^n$ , 对  $\forall x \in I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  收敛但不一致收敛.

12. 设  $f_n(x) = (n+2)(n+1)x(1-x)$  及  $f(x) \equiv 0$ ,  $x \in I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ . 证明当  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , 对  $\forall x \in$

$I$  成立. 判定是否有  $\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow \int_0^1 f(x) dx \quad (n \rightarrow \infty)$ ?

13. 证明定理9.15.

14. 证明定理9.16.

15. 证明定理9.17.

\*16. 举出一定义在集  $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  上

的函数序列  $\{f_n\}$ ,  $\{f_n\}$  在  $A$  的每一点收敛于  $f$ , 但

$$\int_A f_n(x, y) dV \nrightarrow \int_A f(x, y) dV.$$

17. 设  $\{f_n\}$  与  $\{g_n\}$  在距离空间的集  $A$  上分别一致收敛于  $f$  与  $g$ , 证明  $\{f_n + g_n\}$  在  $A$  上一致收敛于  $f + g$ .
18. (a) 设  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$  于距离空间的集  $A$  上一致有界 ( $\exists M$ , 使对一切  $n$ , 及  $x \in A$ , 有  $|f_n(x)| < M$ .) 且分别一致收敛于  $f$  与  $g$ , 证明  $\{f_n \cdot g_n\}$  在  $A$  上一致收敛于  $fg$ .  
(b) 举出  $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$  都一致收敛而  $\{f_n g_n\}$  不一致收敛的例子.
19. 设  $f_n$  为由距离空间  $(S_1, d_1)$  到另一距离空间  $(S_2, d_2)$  的函数,  $n = 1, 2, \dots$ . 若  $\{f_n\}$  的每个  $f_n$  在  $A \subset S_1$  上连续, 且  $f_n$  在  $A$  上一致收敛于  $f$ , 那么  $f$  在  $A$  上连续.
- \*20. 证明定理 9·16 的如下推广. 设  $F$  是  $R_N$  内的图形 且  $f_n: F \rightarrow R_1$  是在  $F$  上可积的函数,  $n = 1, 2, \dots$ . 当  $f_n$  在  $F$  上一致收敛于  $f$ , 那么  $f$  在  $F$  上可积且

$$\int_F f dV_N = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_F f_n dV_N.$$

[提示: 首先证明  $f$  的可积性.]

## § 9·4 级数的一致收敛性, 幂级数的一致收敛性

设  $u_K(x)$  ( $K = 1, 2, \dots$ ) 是定义在距离空间  $S$  的集  $A$  上的

实值函数。

**定义** 设无穷级数  $\sum_{K=1}^{\infty} u_K(x)$  的部分和为  $S_n(x)$ ,  $S_n(x) = \sum_{K=1}^n u_K(x)$ , 称级数在集  $A$  上一致收敛于一函数  $S \iff$  部分和序列  $\{S_n\}$  在  $A$  上一致收敛于  $S$ 。

上述定义表明级数  $\sum_{K=1}^{\infty} u_K(x)$  的一致收敛性归结为它的部分和序列的一致收敛性。由部分和序列的有关定理得到关于级数的相应定理。

**定理9·18** (定理9·2的级数形式) 设  $u_n, n=1, 2, \dots$ , 在距离空间的集  $A$  上连续, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $A$  上一致收敛于  $S(x)$ , 那么  $S(x)$  在  $A$  上连续。

下一定理是定理9·13对级数形式的推广。

**定理9·19** (无穷级数的逐项积分) (a) 设  $u_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 是定义在  $\mathbf{R}_1$  的区间  $I$  上的实值函数。设  $u_n$  在  $I$  上可积,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $I$  上一致收敛于  $S(x)$ 。那么  $S$  在  $I$  上可积。若  $c \in I$ , 定义  $U_n$  及  $S$  为

$$U_n(x) = \int_c^x u_n(t) dt, \quad S(x) = \int_c^x S(t) dt,$$

那么  $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$  在  $I$  上一致收敛于  $S(x)$ 。

(b) 设  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 是定义在  $R_N$  的图形  $F$  上的实值函数,  $u_n(x)$  在  $F$  上可积且  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $F$  上一致收敛于  $S(x)$ . 那么  $S(x)$  在  $F$  上可积并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_F u_n dV_N = \int_F S dV_N.$$

本定理的 (b) 与 § 9·3 的习题 20 相联系.

**定理 9·20** (无穷级数逐项微分) 设  $K$  是  $1 \leq K \leq N$  的一整数,  $u_n$  及  $u_{n,K}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 是在  $R_N$  内的开集  $G$  上定义实值连续函数, 对  $\forall x \in G$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛于  $S(x)$ , 而

$\sum_{n=1}^{\infty} u_{n,K}(x)$  在  $G$  上一致收敛于  $t(x)$ . 那么对  $x \in G$ , 有

$$S_{,K}(x) = t(x).$$

定理 9·18, 9·19, 9·20 与相应的关于序列的定理的证明是相似的.

下一定理给出一致收敛的有用的间接判别法, 可应用于级数的和未知的情况.

**定理 9·21** (外尔斯特拉斯  $M$ -判别法) 设  $u_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  是定义在距离空间的集  $A$  上的实值函数. 若对  $\forall n$ , 及  $A$  中所有点  $x$ ,  $|u_n(x)| < M_n$ , 而且常数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  收敛. 那么

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$  在  $A$  上一致收敛.

**证明** 据比较判别法(定理9·4),对 $\forall x \in A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

是收敛的. 令

$$t_n(x) = \sum_{K=1}^n |u_K(x)| \text{ 及 } t(x) = \sum_{K=1}^{\infty} |u_K(x)|.$$

由定理9·6导出  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  收敛. 令

$$S_n(x) = \sum_{K=1}^n u_K(x) \text{ 及 } S(x) = \sum_{K=1}^{\infty} u_K(x).$$

那么

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \sum_{K=n+1}^{\infty} u_K(x) \right|$$

$$\leq \sum_{K=n+1}^{\infty} |u_K(x)| = |t(x) - t_n(x)|$$

$$\leq \sum_{K=n+1}^{\infty} M_K.$$

由  $\sum_{K=1}^{\infty} M_K$  收敛, 当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\sum_{K=n+1}^{\infty} M_K \rightarrow 0$  与  $x$  无关, 我们断定

$S_n(x)$  一致收敛于  $S(x)$ .

下面关于幂级数一致收敛的定理是  $M$ -判别法的直接推论.

**定理9·22** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n$  在  $x=x_1, x_1 \neq a$  收敛,

那么级数在  $I = \{x: a-h \leq x \leq a+h\}$  区间上级数一致收敛, 这里  $h < |x_1 - a|$ , 并且  $\exists M$ , 使

$$|C_n(x-a)^n| \leq M \cdot \left( \frac{h}{|x_1 - a|} \right)^n \quad (9 \cdot 8)$$

对  $|x-a| \leq h < |x_1 - a|$  的  $x$  成立.

**证明** 不等式(9·8)是在定理9·9里所述不等式(9·3)的直接结果. 而  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left( \frac{h}{|x_1 - a|} \right)^n$  是收敛的几何级数, 由  $M$ —

判别法导出  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$  一致收敛.

注 (i) 定理9·22里的  $h$  必须小于  $|x_1 - a|$  才能保证级数在  $I$  上一致收敛. 为说明这一点, 研究

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},$$

它在  $x=1$  收敛, 但在  $x=-1$  发散. 若级数在  $|x| < 1$  一致收敛, 那么它便在  $|x|$

$\leq 1$  上一致收敛(读者可以证明这一事实). 这表明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$  不能在  $|x|$

$< 1$  上一致收敛. 而对于  $h < 1$ , 它在  $|x| < h$  上是一致收敛的.

(ii) 若定理9·22的级数对  $x=x_1$  绝对收敛, 那么取  $h = |x_1 - a|$ , 级数在  $I = \{x: |x-a| \leq |x_1 - a|\}$  上一致收敛. 为证明这一点, 只要注意到  $|x-a| \leq |x_1 - a|$  时, 有



$$|C_n(x-a^n)| \leq |C_n(x_1-a)^n|.$$

**例1** 求使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n \tag{9.9}$$

于  $I = \{x : |x| \leq h\}$  上一致收敛的  $h$  的值.

**解** 当  $|x| \leq h$ , 有

$$|(n+1)x^n| \leq (n+1)h^n.$$

据比值判别法, 当  $0 \leq h < 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)h^n$  收敛. 因

此级数(9.9)当  $h < 1$  时, 在区间  $I = \{x : |x| \leq h\}$  上一致收敛. 级数(9.9)当  $x = \pm 1$  时发散, 因此当且仅当  $h < 1$  时, 级数(9.9)在  $I$  上一致收敛.

**例2** 求使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \tag{9.10}$$

于  $I = \{x : |x| \leq h\}$  上一致收敛的  $h$  的值.

**解** 当  $|x| \leq h$ , 有

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{h^n}{n^2}.$$

按比较原则, 及由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 可知当  $h \leq 1$  时级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n^2}$

收敛。按比值判别法，当 $x > 1$ 时级数(9·10)发散。我们断定级数(9·10)在 $I = \{x : |x| \leq 1\}$ 上一致收敛，即所求之 $h$ 为不大于1的正数。

### 引理9·2 设级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \quad (9\cdot11)$$

对 $|x-a| < R (R > 0)$ 收敛，那么 $f$ 与 $f'$ 在 $|x-a| < R$ 内连续，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-a)^{n-1}. \quad (9\cdot12)$$

**证明** 选取 $x_1$ ，使 $|x_1 - a| < R$ ，再取 $h$ ， $0 < h < |x_1 - a|$ 。由定理9·22，级数(9·11)在 $I = \{x : |x-a| \leq h\}$ 上一致收敛，且存在 $M$ ，使当 $|x-a| \leq h$ 有

$$|C_n (x-a)^n| \leq M \left( \frac{h}{|x_1 - a|} \right)^n.$$

由定理9·8，函数 $f$ 在 $I$ 上连续。此外，还有

$$|nC_n (x-a)^{n-1}| \leq n |C_n| h^{n-1} \leq \frac{nM}{h} \left( \frac{h}{|x_1 - a|} \right)^n.$$

由比值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nM}{h} \left( \frac{h}{|x_1 - a|} \right)^n$ 收敛，因而(9·12)

的级数在 $I$ 上一致收敛，由定理9·20，定理9·18可知(9·12)

式成立，并且 $f'$ 在 $I$ 上连续。因为 $h$ 是任选的小于 $R$ 的正数，因此 $f$ 与 $f'$ 在 $|x-a|<R$ 内连续且(9.12)式成立。

借助于引理9.2可得幂级数逐项微分及逐项积分的定理。

**定理9.23** 设 $f$ 为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n, \quad |x-a| < R (R > 0). \quad (9.13)$$

(i)  $f$ 在 $|x-a|<R$ 内具有任意阶导数，对 $\forall$ 自然数 $m$ ， $f^{(m)}(x)$ 可由(9.13)逐项微分 $m$ 次得到。

(ii) 对 $|x-a|<R$ ，定义 $F$ 为

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

那么 $F$ 可由(9.13)逐项积分得到。

(iii) 系数

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a). \quad (9.14)$$

**证明** 由引理9.2及归纳法可得(i)的证明。应用定理9.19便得(ii)。为了证(9.14)式，把(9.13)逐项微分 $n$ 次，并令 $x=a$ 便得。

综合(9.13)，(9.14)式，对于幂级数(9.13)所定义的函数 $f(x)$ ，有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (9.15)$$

一函数在某点的邻域内具有各阶连续的导数，则称函数在这一点是无限可微的。函数在某点 $a$ 无限可微，但它可能

并不等于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ 。例如

$$f: x \rightarrow \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{当 } x \neq 0, \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

对 $x \neq 0$ 求 $f$ 的各阶导数：

$$f'(x) = 2x^{-3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$f''(x) = x^{-6} (4 - 6x^2) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = x^{-3n} p_n(x) e^{-\frac{1}{x^2}},$$

这里 $p_n(x)$ 是一 $n$ 次多项式。按照洛比达法则以及导数定义，

对 $\forall n$ ,  $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x) = 0$ 。按

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  写出来的幂级数恒等于零。但 $f(x)$ 除 $x=0$ 点

之外恒为正, 即  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$  这一在  $x=0$  点的幂级数并不等于  $f(x)$ .

**定义** 设  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  在  $a \in I$  点无限可微且有 (9.15) 式成立, 而 (9.15) 的级数的收敛半径为正数, 便称  $f$  在  $a$  点是解析的. 称函数为解析的  $\iff$  它在定义域的每一点都是解析的.

由上面例子可知, 为了函数是解析的,  $f$  应当具有比无限可微还多的性质, 带余项的台劳定理 (定理 7.6) 是确定函数是否能展开成幂级数的基本工具. 为了应用, 把台劳定理复述为定理 9.24.

**定理 9.24** (带余项的台劳定理) 设  $f$  及其直到  $n$  阶的导数在包含  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  的区间上连续, 且对  $a < x < b$  的每一  $x$ ,  $f^{(n+1)}(x)$  存在, 那么  $\exists \xi, a < \xi < b$ , 满足

$$f(b) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (b-a)^j + R_n, \quad (9.16)$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

**定理 9.25** 对于任意的  $a$  及  $x$ , 有展开式

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} \quad (9.17)$$

成立.

**证明** 应用定理 9.24 于  $f(x) = e^x, f^{(n)}(x) = e^x, n = 1, 2, \dots$ , 且令 (9.16) 中的  $b = x$ , 得到

$$e^x = e^a \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{j!} + R_n(a, x),$$

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

这里 $\xi$ 介于 $a$ 与 $x$ 之间。若 $x > a$ , 则 $a < \xi < x$ , 因而 $e^\xi < e^x$ , 若 $x < a$ , 则 $x < \xi < a$ , 因而 $e^\xi < e^a$ . 于是

$$R_n(a, x) \leq C(a, x) \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (9.18)$$

$$C(a, x) = \begin{cases} e^x, & \text{当 } x \geq a, \\ e^a, & \text{当 } x < a \end{cases}.$$

注意 $C(a, x)$ 与 $n$ 无关, 按比值判别法级数(9.17)对 $\forall x \in \mathbb{R}_1$ 收敛. 由(9.18)当 $n \rightarrow \infty$ ,  $R_n \rightarrow 0$ . 所以级数(9.17)对 $\forall x$ 与 $a$ 都收敛于 $e^x$ .

**引理9.3** 若 $f(x) = \sin x$ , 那么 $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ .

若 $f(x) = \cos x$ , 那么 $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$ .

引理很容易用归纳法证明.

**定理9.26** 对 $\forall a \in \mathbb{R}_1$ 及 $x \in \mathbb{R}_1$ , 有

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (x-a)^n,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!} (x-a)^n.$$

定理9·26的证明留作习题.

定理9·27 下列展开式对  $|x| < 1$  成立:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!},$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}.$$

证明也留作习题.

定理9·28 (幂级数的简单代换) (a) 若  $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n$

$(u-b)^n$ ,  $|u-b| < R$ ,  $R > 0$ , 且  $K \neq 0$ ,  $b = KC + d$ , 那么  
对  $|x-C| < \frac{R}{|K|}$ , 有

$$f(Kx+d) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n K^n (x-C)^n.$$

(b) 若  $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (u-b)^n$ ,  $|u-b| < R$ ,  $R > 0$ , 那

么对  $\forall$  固定自然数  $K$  及  $|x-C| < R^{\frac{1}{K}}$ , 有

$$f[(x-C)^K + b] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-C)^{Kn}.$$

**证明** (a) 若  $u = Kx + d$ ,  $b = KC + d$ , 那么  $u - b = K(x - C)$ ,  $C_n(u - b)^n = C_n K^n (x - C)^n$  且  $|u - b| < R \iff |x - C| < \frac{R}{|K|}$ .

(b) 只要应用  $u - b = (x - C)^K$  的代换便得.

定理9·28很有用的特殊情况是  $b = C = 0$ , 这时

$$f(x^K) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{Kn}.$$

例如, 由(9·17), 对  $\forall x$  有

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

应用带余项的台劳定理时, 重要的是求得余项的确定的界数. 下一定理给出余项  $R_n$  的积分形式, 常常用来求出余项的这种界数.

**定理9·29** (余项为积分形式的台劳定理) 设  $f$  在区间  $I$  上有直到  $n+1$  阶的连续导数,  $a \in I$ , 那么对  $\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!} + R_n(a, x), \quad (9 \cdot 19)$$

$$R(a, x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt. \quad (9 \cdot 20)$$



证明 对  $\forall x \in I$ , 有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

用部分积分法, 于上面积分中令

$$u = f'(t), \quad v = -(x-t),$$

$$du = f''(t) dt, \quad dv = dt$$

可得

$$f(x) = f(a) - [(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt$$

$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt.$$

对上式右端积分再应用部分积分法, 令

$$u = f''(t), \quad v = -\frac{(x-t)^2}{2},$$

$$du = f'''(t) dt, \quad dv = (x-t) dt$$

得出

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) +$$

$$f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt.$$

重复这一过程并使用归纳法, 便得到一般情况的 (9·19),

(9·20) 成立。

初等微积分中一般不予证明的二项式展开, 可用定理 9·29 得到证明。

**定理9·30 (二项式展开定理)** 对  $\forall m \in \mathbb{R}_1$ , 有

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1. \quad (9\cdot21)$$

**证明** 对  $f(x) = (1+x)^m$ , 取  $a=0$  应用定理 9·29. 得

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^K \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + R_K(0, x),$$

这里

$$R_K(0, x) = \int_0^x \frac{(x-t)^K}{K!} m(m-1)\cdots(m-K)(1+t)^{m-K-1} dt.$$

我们希望证明对  $|x| < 1$ , 当  $K \rightarrow \infty$  时有  $R_K \rightarrow 0$ . 为此, 定义

$$C_m(x) = \begin{cases} (1+x)^{m-1}, & \text{当 } m \geq 1, \quad x \geq 0, \\ 1 & \text{当 } m \leq 1, \quad x \geq 0, \\ 1 & \text{当 } m \geq 1, \quad x \leq 0, \\ (1+x)^{m-1} & \text{当 } m \leq 1, \quad x \leq 0. \end{cases}$$

这样, 对  $0, x$  之间的所有  $t$  都有  $(1+t)^{m-1} \leq C_m(t)$ . 因此

$$|R_K(0, x)| \leq C_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!}$$

$$\left| \int_0^x \left| \frac{x-t}{1+t} \right|^K dt \right|.$$

定义

$$U_K(x) = C_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!} |x|^{K+1}$$

并于积分  $\int_0^x \left| \frac{x-t}{1+t} \right|^K dt$  中令  $t = xs$ , 得  $\int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} |x|^K x ds$ ,

因此

$$|R_K(0, x)| \leq u_K(x) \int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} ds.$$

上式右端之积分  $\int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} ds$ , 当  $|x| \leq 1$  时不大于1. 因而

$|R_K(0, x)| \leq u_K(x)$ . 用比值判别法不难得知 当  $|x| < 1$  时,

$\sum_{K=0}^{\infty} u_K(x)$  收敛. 由收敛的必要条件,  $K \rightarrow \infty$  时,  $u_K(x) \rightarrow 0$ .

因此对  $|x| < 1$  及任何  $m$ , 都有  $R_K(0, x) \rightarrow 0 (K \rightarrow \infty)$ .

注 (i) 若  $m$  是自然数, 显然级数(9.21)仅有  $(m+1)$  项不等于零.

(ii) 定理9.30中是用了  $R_K$  的积分形式, 如果以定理9.24的余项形式

$$R_K(0, x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-K)}{K!} (1+\xi)^{m-K-1} x^K,$$

其界于0,  $x$ 之间, 当 $x$ 在 $-1$ 与 $-\frac{1}{2}$ 之间的最好的估计是

$$|R_K(0, x)| \leq C_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!} \left( \frac{|x|}{1-|x|} \right)^K,$$

但当 $K \rightarrow \infty$ , 右端不趋向于零.

## 习 题

习题1—10, 确定 $h$ 的值使级数在区间 $I$ 上一致收敛.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n,$$

$$I = \{x : |x-1| \leq h\}.$$

$$4. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5x)^n}{n!},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{3^n (n+1)},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2 (x-1)^n}{(2n)!},$$

$$I = \{x : |x-1| \leq h\}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \log(n+1)},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n) 2^n x^n}{3^n n^{\frac{3}{2}}},$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x),$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}.$$

$$I = \{x : |x| \leq h\}.$$

$$11. \text{ 若 } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛, 证明 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ 对所有 } x \text{ 一致收敛.}$$

$$12. \text{ 若 } \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| \text{ 收敛, 而 } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin x, \text{ 证明 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$\text{与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nx \text{ 对所有 } x \text{ 一致收敛, 且 } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n$$

$$\cos nx.$$

$$13. \text{ 证明若 } \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \text{ 对 } |x-a| < h \text{ 一致收敛, 那么级数}$$

$$\text{对 } |x-a| \leq h \text{ 一致收敛.}$$

$$14. \text{ 证明定理 9.18.}$$

$$15. \text{ 证明定理 9.19.}$$

$$16. \text{ 证明定理 9.20.}$$

$$17. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当 } x \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

用洛比达法则证明对  $\forall n$ ,

当  $x \rightarrow 0$  时,  $f^{(n)}(x) \rightarrow 0$ .

18. 证明引理9.3.

19. 证明定理9.26.

20. 证明定理9.27.

21. 对于自然数  $n$  用归纳法写出定理9.29的完整的证明.

习题22—29求函数  $f$  关于  $a=0$  点的台劳展开式并证明展开式收敛于相应的函数, 即  $f$  是解析函数.

$$22. f: x \rightarrow (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad 23. f: x \rightarrow (1+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$24. f: x \rightarrow (1-x)^{-2}, \quad 25. f: x \rightarrow (1-x)^{-3},$$

$$26. f: x \rightarrow \arcsin x, \quad 27. f: x \rightarrow (1-x^2)^{-3}.$$

$$28. f: x \rightarrow \arctan x^2, \quad 29. f: x \rightarrow \arcsin x^3.$$

习题30—35求  $f(x)$  的近似值, 用带余项的台劳定理保证精确到五位小数.

$$30. e^{0.2}.$$

$$31. \sin(0.5).$$

$$32. \log(0.9).$$

$$33. (0.94)^{\sqrt{3}}.$$

$$34. (15)^{\frac{1}{4}}.$$

$$35. (63)^{\frac{1}{6}}.$$

习题36—38, 计算积分值, 要求精确到五位小数.

$$36. \int_0^{\frac{1}{2}} \exp(x^2) dx.$$

$$37. \int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx.$$

$$38. \int_0^{0.3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$$

## § 9.5 无 序 和

考察二重序列

$$U_{mn} = \cos^m\left(\frac{1}{n}\right), \quad m, n = 1, 2, \dots$$

当 $m$ 与 $n$ 都趋向于无穷时， $U_{mn}$ 的趋势不能确定。容易验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m\left(\frac{1}{n}\right) \right] = 1.$$

当 $m$ 与 $n$ 保持特定关系同时趋向无穷时，也可能出现别的极限值。对于三重、四重以及多重序列的情况将更为复杂。

我们不采取逐一地分别讨论二重、三重、四重以及各多重序列的办法，而是提出一种综合的统一处理多重序列、多重级数收敛性的理论，把多重序列作为定义在集 $S$ 上的实值函数来研究。 $S$ 是 $R_2, R_3$ 或 $R_N$ 内的格点的集。所谓格点是指坐标是整数的点的集（图9.5）。那么二重序列 $u_{m,n}$ ，三重序

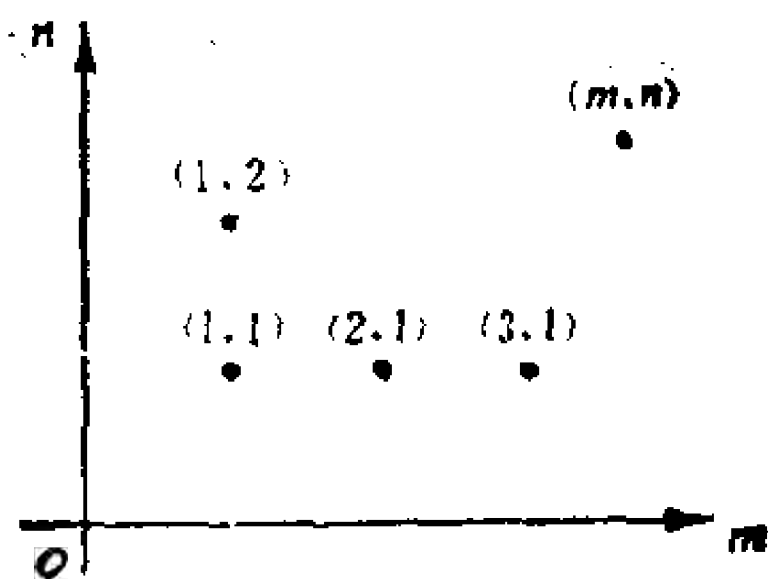


图 9.5

列 $u_1, u_2, \dots$ 等都是相应特定的 $S$ 上的函数。 $S$ 也可以是有限个点的集。例如

$$S = \{(m, n) : 1 \leq m \leq 4, 2 \leq n \leq 5, m, n \text{ 为整数}\}$$

(图9·6所示)。本节所述的结果对于任意的集，也即不限于由格点组成的集，甚至不可列的集都有效。

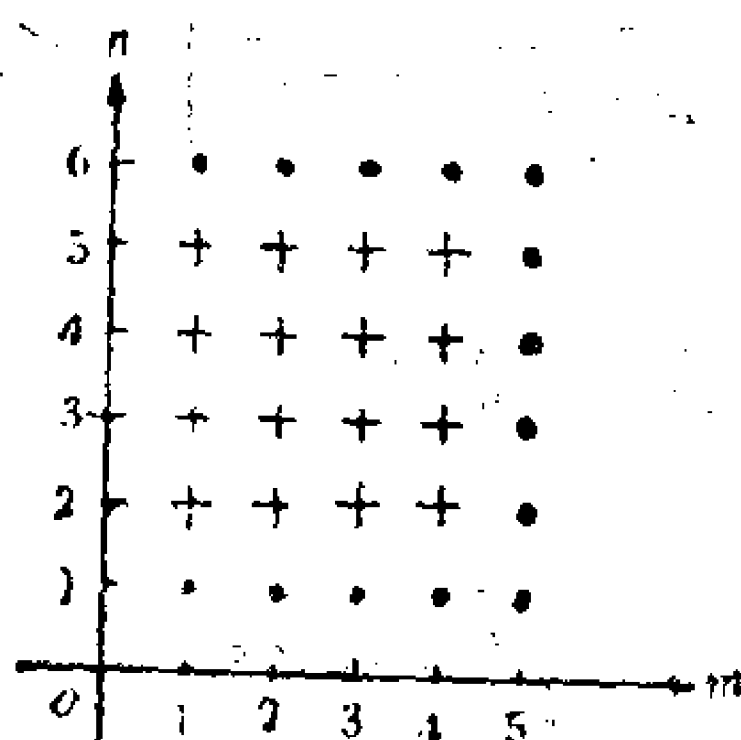


图 9·6

**定义** 设 $S$ 是一有限集， $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ 为给定的函数，当 $p$

取遍 $S$ ， $f(p)$ 的和是 $\sum_{i=1}^n f(p_i)$ 。这里 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 是 $S$ 的所有

元素的某一排列。因为有限项之和不依赖于 $S$ 元素的排列顺序，我们把这一和表示成

$$\sum_{p \in S} f(p). \quad (9 \cdot 22)$$

当函数 $f$ 以确定的下标表示的时候，例如 $\{U_{m,n}\}$ ， $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, \dots, 7$ 。 $f$ 是以 $S = \{(m, n) : 1 \leq m \leq 3, 1 \leq n \leq 7\}$ 为定义域以 $u_{m,n}$ 为函数值的函数。(9·22)可换记成



$$\sum_{n=1}^s \sum_{k=1}^r u_{n,k} \dots$$

**定义** 设  $S$  是无限集,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_1$  是给定的函数. 称  $f$  在  $S$  上有和  $S \iff$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  有限集  $S' \subset S$ , 使  $S$  的每个包含  $S'$  的有限子集  $S''$  都有

$$\left| \sum_{p \in S'} f(p) - S \right| < \varepsilon.$$

当  $f$  在  $S$  上有和, 仍记这一和为

$$\sum_{p \in S} f(p). \quad (9.22)$$

注 (i) 一般说, 定义中的子集  $S'$  与  $\varepsilon$  值有关.

(ii) 我们用同样的符号  $\sum_{p \in S} f(p)$  表示在有限集或无限集上的和. 有限和 总

有意义, 无限集上的和仅在有和的情况下才能采用  $\sum_{p \in S} f(p)$  的表示. 在和存在的

情况下, 即使  $S$  的值不指明, 也以  $\sum_{p \in S} f(p)$  表示这个和.

(iii) 把上面的定义与无穷级数收敛性相比较,  $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$  收敛是指: 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n$ , 使  $\forall m > n$  有

$$\left| \sum_{K=1}^m a_K - S \right| < \varepsilon.$$

取集  $\{1, 2, \dots, n\}$  作为  $S'$ , 集  $\{1, 2, \dots, n, \dots, m\}$  相当于  $S''$ . 但上述在集  $S$  上的

和的定义，并未限制如何选取 $S'$ 。当 $S$ 是所有自然数集时， $S'$ 不必选取前 $n$ 个自然数的集，也就是说现在 $f$ 在 $S$ 上的和的定义允许选取 $S$ 的任何的有限集。正因为这样，把(9·23)称为无序和。

**定理9·31** 设 $S$ 是一无限集， $f: S \rightarrow R_1$ 为给定的函数，那么 $f$ 在 $S$ 上最多有一个和 $s$ 。

**证明** 假定 $f$ 在 $S$ 上有两个和 $s_1, s_2$ ，且 $s_1 < s_2$ 。我们取 $\varepsilon = \frac{1}{2}(s_2 - s_1)$ 。由定义 $\exists S$ 的有限子集 $S_1'$ 与 $S_2'$ ，使对任何分别包含 $S_1', S_2'$ 的 $S$ 的有限子集 $S''$ ， $\overline{S''}$ 有

$$\left| \sum_{p \in S''} f(p) - s_1 \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{p \in \overline{S''}} f(p) - s_2 \right| < \varepsilon.$$

取 $S^*$ 为含有 $S_1' \cup S_2'$ 的 $S$ 的有限子集，那么

$$\sum_{p \in S^*} f(p) < s_1 + \varepsilon, \quad s_2 - \varepsilon < \sum_{p \in S^*} f(p).$$

由此便得

$$s_2 - \varepsilon < s_1 + \varepsilon,$$

这与 $\varepsilon$ 的定义相矛盾。因此定理成立。

**定理9·32** 设 $f_1$ 与 $f_2$ 在 $S$ 上都有和， $C_1, C_2$ 是实数。那么 $C_1 f_1 + C_2 f_2$ 在 $S$ 上有和，并且

$$\sum_{p \in S} (C_1 f_1(p) + C_2 f_2(p)) = C_1 \sum_{p \in S} f_1(p) + C_2 \sum_{p \in S} f_2(p).$$

**证明** 对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists S$ 的有限子集 $S_1', S_2'$ ，使对含有 $S_1', S_2'$ 的有限集 $S''$ 都有

$$\left| \sum_{p \in S'} f_i(p) - \sum_{p \in S} f_i(p) \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{1 + |C_1| + |C_2|}, \quad i = 1, 2.$$

取  $S' = S_1' \cup S_2'$ , 那么对包含  $S'$  的  $S$  的任何有限子集  $S''$ , 都有

$$\left| \sum_{p \in S''} (C_1 f_1 + C_2 f_2) - \left( C_1 \sum_{p \in S} f_1 + C_2 \sum_{p \in S} f_2 \right) \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^2 |C_i| \left| \sum_{p \in S''} f_i(p) - \sum_{p \in S} f_i(p) \right|$$

$$\leq \frac{(|C_1| + |C_2|)\varepsilon}{1 + |C_1| + |C_2|} < \varepsilon.$$

**推论** 设  $f_1, f_2, \dots, f_n$  在  $S$  上都有和,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  都是实数, 那么  $C_1 f_1 + C_2 f_2 + \dots + C_n f_n$  在  $S$  上有和, 且

$$\sum_{p \in S} \left( \sum_{i=1}^n C_i f_i(p) \right) = \sum_{i=1}^n C_i \sum_{p \in S} f_i(p).$$

**定理9.33** 设  $S$  是无限集,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_1$  在  $S$  上有和, 那么  $\exists$  数  $M$  使对  $S$  的任何有限集  $\bar{S}$  都有

$$\left| \sum_{p \in \bar{S}} f(p) \right| < M.$$

**证明** 设  $S = \sum_{p \in S} f(p)$ , 并取  $\varepsilon = 1$ , 那么  $\exists$  有限集  $S'$ , 使

对任何含有  $S'$  的有限集  $S''$  都有

$$\left| \sum_{p \in S''} f(p) - S \right| < 1. \quad (9.24)$$

由 (9.24) 可知

$$\left| \sum_{p \in S''} f(p) \right| < 1 + |S| \quad (9.25)$$

现设  $\bar{S}$  是  $S$  的任一有限子集. 定义  $S'' = \bar{S} \cup S'$  并注意 (9.25) 对这一  $S''$  成立, 此外

$$\bar{S} = (\bar{S} \cup S') - (S' - \bar{S}),$$

如图 9.7 所示, 记  $A = \sum_{p \in S'} |f(p)|$ . 于是

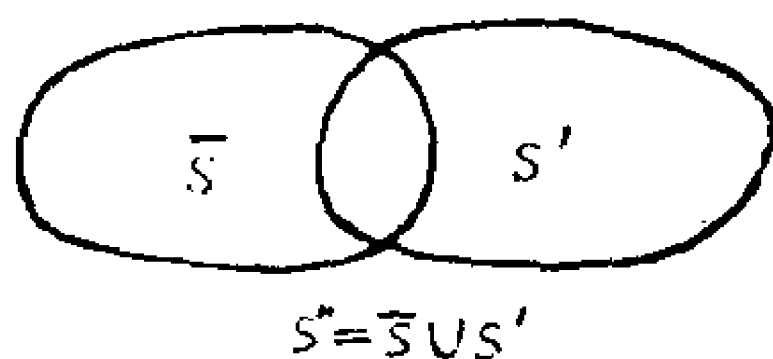


图 9.7

$$\sum_{p \in \bar{S}} f(p) = \sum_{p \in S''} f(p) - \sum_{p \in (S' - \bar{S})} f(p)$$

及

$$\left| \sum_{p \in \bar{S}} f(p) \right| \leq \left| \sum_{p \in S''} f(p) \right| + \sum_{p \in S'} |f(p)|$$

$$\leq 1 + |S| + A.$$

取  $M = 1 + |S| + A$ , 便满足定理的要求.

**定理9·34** 设  $f: S \rightarrow R_1$  是给定的, 且  $\forall p \in S, f(p) \geq 0$ .

那么  $f$  在  $S$  上有和  $\iff \sum_{p \in S'} f(p)$  对所有  $S$  的有限子集  $S'$  是一致有界的.

**证明** 由定理9·33, 仅需证明当  $f$  的有限和一致有界,  $f$  在  $S$  上有和.

现在以  $S^*$  表示  $S$  的任一有限子集, 定义

$$A = \sup_{S^*} \left\{ \sum_{p \in S^*} f(p) \right\}, \quad (9 \cdot 26)$$

这里上确界是对一切  $S$  的有限子集所取的.

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由上确界定义,  $\exists$  有限集  $S'$ , 使

$$\sum_{p \in S'} f(p) > A - \varepsilon.$$

因为  $f(p) \geq 0$ , 那么对每一含有  $S'$  的有限集  $S''$  都有

$$A \geq \sum_{p \in S''} f(p) > A - \varepsilon. \quad (9 \cdot 27)$$

由 (9·27) 及 (9·26),  $f$  在  $S$  上有和并且

$$\sum_{p \in S} f(p) = A.$$

**推论** 设  $f: S \rightarrow R_1$ ,  $g: S \rightarrow R_1$ , 且对一切  $p \in S$  成立着

$0 \leq f(p) \leq g(p)$ . 如果  $g$  在  $S$  上有和, 那么  $f$  在  $S$  上有和, 且

$$\sum_{p \in S} f(p) \leq \sum_{p \in S} g(p).$$

**例1** 设  $S$  是所有自然数序偶  $(m, n)$  的集.  $f$  是  $S$  上的函数:  $f(m, n) = \frac{1}{m^2 n^2}$ . 证明  $f$  在  $S$  上有和.

**解** 设  $S'$  是  $S$  的任一有限子集, 分别以  $m', n'$  表示  $S'$  内序偶  $(m, n)$  之  $m$  与  $n$  的最大数. 那么

$$\sum_{(m, n) \in S'} \frac{1}{m^2 n^2} \leq \sum_{m=1}^{m'} \sum_{n=1}^{n'} \frac{1}{m^2 n^2}.$$

因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛 (其和为  $\frac{\pi^2}{6}$ ), 有

$$\sum_{(m, n) \in S'} \frac{1}{m^2 n^2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^2 = \frac{\pi^4}{36} = A.$$

这表明  $f$  的有限和一致有界, 据定理 9.34,  $f$  在  $S$  上有和.

**例2** 设  $S$  与例1的  $S$  相同,  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $f(m, n) = \frac{1}{m^4 + n^4}$ .

证明  $f$  在  $S$  上有和.

**解** 因为对一切  $m, n$ ,  $2m^2 n^2 \leq m^4 + n^4$ ,

$$\frac{1}{m^4 + n^4} \leq \frac{1}{2m^2 n^2}.$$

令  $g(m, n) = \frac{1}{2m^2 n^2}$ , 由例1,  $g$  在  $S$  上有和, 据定理9·34推论  $f$  在  $S$  上有和.

**定义** 设  $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 集  $S^+ = \{p: p \in S, f(p) \geq 0\}$ ,  $S^- = \{p: p \in S, f(p) < 0\}$ . 定义  $f^+(p) = \frac{1}{2}[|f(p)| + f(p)]$ ,  $f^-(p) = \frac{1}{2}[|f(p)| - f(p)]$ .

由定义立即得出:

$$0 \leq f^+(p) \leq |f(p)|, \quad 0 \leq f^-(p) \leq |f(p)|$$

$$f^+ + f^- = |f|, \quad f^+ - f^- = f.$$

$$f^+(p) = \begin{cases} f(p) & \text{当 } p \in S^+, \\ 0 & \text{当 } p \in S^-; \end{cases}$$

$$f^-(p) = \begin{cases} f(p) & \text{当 } p \in S^-, \\ 0 & \text{当 } p \in S^+. \end{cases}$$

在研究变号级数时, 提出了条件收敛与绝对收敛的概念.  $f$  在集  $S$  上的无序和的概念是绝对收敛概念的一般化. 下面的定理就说明这一点.

**定理9·35**  $f$  在  $S$  上有和  $\iff |f|$  在  $S$  上有和, 当和存在时, 有

$$\left| \sum_{p \in S} f(p) \right| \leq \sum_{p \in S} |f(p)| \quad (9 \cdot 28)$$

**证明** 设  $|f|$  在  $S$  上有和, 那么由定理9·34的推论,  $f^+$  及  $f^-$  都在  $S$  上有和. 用定理9·32, 可得

$$\sum_{p \in S} f(p) = \sum_{p \in S} f^+(p) - \sum_{p \in S} f^-(p),$$

$$\sum_{p \in S} |f(p)| = \sum_{p \in S} f^+(p) + \sum_{p \in S} f^-(p).$$

于是 (9.28) 式成立.

现在设  $f$  在  $S$  上有和, 证明  $|f|$  在  $S$  上有和. 为此仅需  $f^+$ ,  $f^-$  在  $S$  上都有和. 若不然, 假定  $f^+$  在  $S$  上没有和. 据定理 9.33,

对于任一正数  $M$ ,  $\exists$  一有限子集  $S'$ , 使  $\sum_{p \in S'} f^+(p) > M$ . 因为

在  $S^-$  上  $f^+(p) = 0$ , 有

$$\begin{aligned} M &< \sum_{p \in S'} f^+(p) = \sum_{p \in (S' - S^-)} f^+(p) \\ &= \sum_{p \in S' \cap S^+} f^+(p) = \sum_{p \in S' \cap S^+} f(p), \end{aligned}$$

由  $M$  的任意性, 按定理 9.33,  $f$  在  $S$  上不可能有和. 这与  $f$  有和相矛盾, 由此可见  $f^+$  在  $S$  上有和. 而  $f^- = f^+ - f$ , 所以  $f^-$  在  $S$  上也有和, 由  $|f| = f^+ + f^-$ , 可知  $|f|$  在  $S$  上有和.

下面显然的简单引理留作习题.

**引理 9.4** 设  $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $S$  上有和. 若  $U$  是  $S$  的一个子集, 那么  $f$  在  $U$  上有和.

在无穷级数问题里, 有时要改变求和的集  $S$ . 例如

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{与} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$



求和的集一是  $\{1, 2, \dots\}$ ，另一则是  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ，而两级数有同样的和。下一定理就这种变形的一般情况给出证明。

**定理9·36** 设  $S_0, S_1$  是给定的集， $T: S_0 \rightarrow S_1$  为1—1到上的映象。如果  $f$  在  $S_0$  上有和且  $g: S_1 \rightarrow R_1$ ，对  $\forall q \in S_1$ ， $T(p)=q$ ， $g$  按  $g(q)=f(p)$  所定义的。那么  $g$  在  $S_1$  上有和并且

$$\sum_{q \in S_1} g(q) = \sum_{p \in S_0} f(p).$$

**证明** 设  $f$  在  $S_0$  上的和为  $s$ 。那么对  $\forall \varepsilon > 0$ ，存在一有限集  $S_0' \subset S_0$ ，使对任何含有  $S_0'$  的有限集  $S_0'' \subset S_0$ ，都有

$$\left| \sum_{p \in S_0''} f(p) - s \right| < \varepsilon.$$

记  $S_1' = T(S_0')$ ， $S_1'' = T(S_0'')$ 。按  $g$  的定义，我们有

$$\left| \sum_{q \in S_1''} g(q) - s \right| < \varepsilon$$

由  $S_0''$  是含有  $S_0'$  的任意有限集，因而  $S_1''$  是含有  $S_1'$  的任意有限集，所以  $\sum_{q \in S_1} g(q) = s$ 。

在第一章曾用  $N$  表示所有正整数的集，现在还继续用它。此外，用  $N_0$  表示非负整数集，即  $N_0 = N \cup \{0\}$ 。

**定理9·37** 设  $f: N \rightarrow R_1$  是给定的。对  $\forall n \in N$ ，令

$a_n = f(n)$ . 那么  $f$  在  $N$  上有和  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛. 且

$$\sum_{n \in N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**证明** 设  $f$  在  $N$  上有和, 那么  $|f|$ ,  $f^+$ ,  $f^-$  在  $N$  上都有和.

令  $S^+ = \sum_{n \in N} a_n^+$ , 这里  $a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ .  $\exists$  一有

限集  $N'$ , 使

$$S^+ - \varepsilon < \sum_{n \in N'} a_n^+ \leq S^+.$$

以  $n'$  表  $N'$  中最大数. 那么对所有  $n'' \geq n'$ , 有

$$S^+ - \varepsilon < \sum_{n=1}^{n'} a_n^+ \leq S^+.$$

因此  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$  收敛于  $S^+$ , 同理可得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$  收敛于  $\sum_{n \in N} a_n^-$ , 进而

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-) \text{ 收敛于 } \sum_{n \in N} |a_n|.$$

现在设  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛于  $s$ . 设  $N'$  是  $N$  的任一有限子集, 其

最大数为  $n'$ . 那么

$$\sum_{n \in N} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq s.$$

因此由定理9·34,  $|f|$  在  $N$  上有和且按定理9·35  $f$  在  $N$  上有和.

由定理证明的第一部分  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = \sum_{n \in N} a_n^+$ , 及  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- =$

$\sum_{n \in N} a_n^-$ , 所以

$$\sum_{n \in N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

若一无穷级数任意排列其各项得到的级数都收敛, 就说级数无条件收敛. 根据定理9·37, 下面的推论说明无条件收敛与绝对收敛性等价.

**定理9·37推论** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛,  $\{K_n\}$  是正

整数序列, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{K_n}$  是收敛的. 若  $\{K_n\}$  包括了  $N$  的所有数, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{K_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

当级数条件收敛时, 任意排列它的项, 所得级数可能发散或收敛于任一预先给定的实数.

**例3** 设  $f: N \rightarrow R_1$  是给定的,  $f(n) = \frac{(-1)^n}{n}$  证明  $f$  在

$N$ 上不存在和。

解 因为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  不绝对收敛, 由定理9.37,

$f$  在  $N$  上没有和。

由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1}$  都发散。设  $r$  是任一实数, 能从

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  中选取一些偶数的项, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  的一些项, 然后再选

取一些奇数的项, 即  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1}$  的一些项, 可能得到  $f$  的一个

排列, 所得新排列的级数的和是  $r$ 。这过程的细节读者可参看

习题11的提示自行完成。

## 习 题

1. 设  $S$  是所有整数的集合,  $f: S \rightarrow R_1, f(n) = n2^{-|n|}$ 。证明  $f$  在  $S$  上有和。

2. 设  $S$  是所有整数的集合,  $g: S \rightarrow R_1, g(n) = \sqrt{|n|} \cdot e^{-n}$ 。  
 $g$  在  $S$  上有和吗?

3.  $S = \{x: x \text{ 是有理数}, 0 < x < 1\}$ ,  $f: S \rightarrow R_1, f\left(\frac{p}{q}\right) =$

$\frac{1}{q}, r = \frac{p}{q}, p, q$  是既约的整数。  $f$  在  $S$  上有和吗?

4. 设  $S = \{(m, n): m, n \text{ 是整数}, 0 < m < \infty, 0 < n < \infty\}$ ,

定义  $f: S \rightarrow R_1, f(m, n) = \frac{1}{m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{5}{2}}}$ . 证明  $f$  在  $S$  上有和.

5. 设  $S$  与习题4之  $S$  相同,  $g: S \rightarrow R_1$  为  $g(m, n) = \frac{1}{mn^3}$ ,  $g$  在  $S$  上有和吗?

6. 设  $S = \{(l, m, n): l, m, n \text{ 都是自然数}\}$ . 定义  $f: S \rightarrow R_1, f(l, m, n) = \frac{1}{l^8 + 2m^8 + n^8}$ . 证明  $f$  在  $S$  上有和.

7. 设  $S = \{(m, n): m, n \text{ 为自然数且 } m \neq n\}$ .  $f: S \rightarrow R_1$  为  $f(m, n) = \frac{1}{m^2 - n^2}$ . 证明  $f$  在  $S$  上没有和.

8. 证明引理9.4.

9. 设  $T: S_0 \rightarrow S_1$  是由集  $S_0$  到  $S_1$  上的映象. 设  $f: S_0 \rightarrow R_1$  在  $S_0$  上有和. 对  $\forall q \in S_1$  取集  $\{T^{-1}(q)\}$  的唯一元素  $p$ , 且函数  $S_1 \rightarrow R_1$  按公式  $g(q) = f(p)$  定义. 证明  $g$  在  $S$  上有和.

10. 写出定理9.37推论的完整证明.

11. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.  $r$  为任一实数. 证明存在一排列, 使

得到的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛于  $r$  ( $b_n$  与某  $a_k$  相同, 反过来  $\forall a_k$ , 为某一  $b_n$ ).

[提示: 把级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的项分为  $a_n' > 0, a_n'' < 0$ , 那么

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$  都发散 (否则原级数便绝对收敛) 规定

重排的项  $a_{n+1}' \leq a_n'$ ,  $-a_{n+1}' < -a_n'$ . 由原级数收敛,  $a_n' \rightarrow 0$  及  $a_n'' \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ . 现在顺次取第一序列  $\{a_n'\}$  的项使其和刚刚超过  $r$ ; 再顺次选取  $\{a_n''\}$  的项使之总和刚刚小于  $r$ . 然后再顺次从  $\{a_n'\}$  中取上一过程末取去的项使之总和刚刚超过  $r$ , 再顺次从  $\{a_n''\}$  中取上一过程末取去的项, 使之总和刚刚小于  $r$ . 如此重复地选取, 所得新级数的部分和序列收敛于  $r$ . ]

## § 9.6 无序和的比较判别法, 一致收敛性

类似于级数收敛性的比较判别法, 对于无序和也有比较判别法.

**定理 9.38 (比较判别法)** 设  $f: S \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $F: S \rightarrow \mathbb{R}_1$ .

(i) 若  $F$  在  $S$  上有和, 且对  $\forall p \in S$ ,  $|f(p)| \leq |F(p)|$ , 那么  $f$  在  $S$  上有和.

(ii) 若  $F$  在  $S$  上没有和, 且对  $\forall p \in S$ ,  $|f(p)| > |F(p)|$ , 那么  $f$  在  $S$  上没有和.

读者可参照定理 9.4, 给出证明.

**例 1** 设  $S = \{(m, n): m, n \text{ 为所有自然数}\}$ , 证明

$$f(m, n) = \frac{(-1)^{m+n}}{m^3 + n^3} \text{ 在 } S \text{ 上有和.}$$

**解** 由  $m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \leq 2(m^3 + n^3)$ , 对  $\forall (m, n) \in S$  成立. 定义

$F(m, n) = \frac{2}{m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$ , 显然  $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}}}$  收敛 (由  $p = \frac{3}{2}$  的

$p$ -级数收敛), 由定理9·37,  $F$ 在 $S$ 上有和. 进而由  $|f(m, n)| \leq |F(m, n)|$  及定理9·38,  $f$ 在 $S$ 上有和.

**例2** 设 $S$ 如同例1, 证明  $f(m, n) = \frac{1}{m^2 + n^2}$  在 $S$ 上没有和.

**解** 定义

$$F(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{2n^2} & \text{当 } m \leq n. \\ \frac{1}{2m^2} & \text{当 } m > n. \end{cases}$$

显然对一切  $(m, n)$ ,  $f(m, n) \geq F(m, n) > 0$ . 现设  $S_{n'} = \{(m, n) : 0 < m < n', 0 < n < n', m, n \text{ 为整数}\}$ . 那么

$$\sum_{(m, n) \in S_{n'}} F(m, n) = \sum_{n=1}^{n'} \left( \sum_{m=1}^{n'} \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= n' \sum_{n=1}^{n'} \frac{1}{n^2} > \sum_{n=1}^{n'} \frac{1}{n}.$$

于是, 若 $M$ 是任一正数, 可取 $n'$ 大到使

$$\sum_{(m, n) \in S_{n'}} F(m, n) > M.$$

因此由定理9·34,  $F$ 在 $S$ 上没有和. 再据比较判别法  $f$ 在 $S$ 上

也没有和。

下面两个定理是已有结果的直接推论。

**定理9·39** 若  $f: S \rightarrow R_1$ ,  $g: S \rightarrow R_1$  在  $S$  上有和, 且对  $p \in S$ ,  $f(p) \leq g(p)$ . 那么

$$\sum_{p \in S} f(p) \leq \sum_{p \in S} g(p).$$

**定理9·40** (两边夹定理) 设给定  $f: S \rightarrow R_1$ ,  $g: S \rightarrow R_1$ ,  $h: S \rightarrow R_1$ , 且  $f, h$  在  $S$  上有和, 对  $p \in S$  有

$$f(p) \leq g(p) \leq h(p).$$

那么  $g$  在  $S$  上有和。

虽然集  $S$  可以是相当任意的, 但是当  $f$  在  $S$  上有和的情况下,  $f$  在  $S$  中不等于零的那些元素的集至多是可列集。

**定理9·41** 设  $f: S \rightarrow R_1$  在  $S$  上有和,  $S^* = \{x: p \in S, f(p) \neq 0\}$ . 那么  $S^*$  是可列集。

**证明** 对于  $n = 1, 2, \dots$ , 定义

$$S_n = \{p \in S: \frac{1}{n+1} < |f(p)| < n\}$$

那么由  $f$  于  $S_n$  上有和,  $S_n$  是有限集。由  $S^*$  定义,  $S^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$  是可列集。细节留给读者完成。

设  $A$  是距离空间  $T$  内的集,  $S$  是任意的一非空集。于  $A \times S$  上定义实值函数  $f$ 。即  $f: A \times S \rightarrow R_1$ 。对于  $x \in A$ ,  $f$  在  $S$  上可能有和或无和。当有和时, 以  $s(x)$  表示  $f$  在  $S$  上的和。



**定义** 设  $f: A \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$  是给定的。称  $f$  关于  $A$  在  $S$  上一致地有和  $\iff$  对  $\forall x \in A$ ,  $f$  在  $S$  上有和, 且对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists S$  的有限子集  $S'$ , 使对每一含有  $S'$  的  $S$  的有限子集  $S''$ , 都有

$$\left| \sum_{p \in S''} f(x; p) - s(x) \right| < \varepsilon,$$

这里的  $S'$  不依赖于  $x$ 。当集  $A$  能被清楚地理解时, 简称  $f$  在  $S$  上一致地有和。

“一致地有和”是相应于无穷级数一致收敛性的概念。一致收敛性有关的定理, 可以推广为一致地有和的关于无序和的相应定理。

**定理9.42** 设函数  $f: A \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 对  $\forall p \in S$ , 在距离空间  $T$  的集  $A$  上连续, 且  $f$  在  $S$  上一致地有和。如果对  $\forall x \in A$ , 由无序和定义的函数为

$$s(x) = \sum_{p \in S} f(x; p),$$

那么  $s(x)$  在  $A$  上是连续的。

**证明** 对于给定  $x_0 \in A$ , 证明  $s(x)$  在  $x_0$  点连续。据  $f$  在  $S$  上一致地有和, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  有限集  $S'$ , 对任何含有  $S'$  的有限集  $S''$ , 都有

$$\left| \sum_{p \in S''} f(x_0; p) - S(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left| \sum_{p \in S''} f(x; p) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

固定 $S''$ ，可有

$$|s(x) - s(x_0)| \leq |s(x) - \sum_{p \in S''} f(x; p)| +$$

$$\left| \sum_{p \in S''} [f(x; p) - f(x_0; p)] \right|$$

$$+ \left| \sum_{p \in S''} f(x_0; p) - s(x_0) \right|$$

上式右端第二项由 $f(x, p)$ 关于 $x$ 的连续性， $\exists \delta > 0$ ，使当 $x$ 与 $x_0$ 距离小于 $\delta$ ，便有

$$\left| \sum_{p \in S''} [f(x; p) - f(x_0; p)] \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对一切这样的 $x$ ，便有

$$|S(x) - S(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即 $S(x)$ 在 $x_0$ 点连续。

容易看出定理9·42的证明是仿照定理9·12的证明写出的。同样，下面定理9·43及证明可仿照定理9·13与9·16的证明写出。

**定理9·43** (a) (关于无序和的逐项积分) 设 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 是一有限区间， $f : I \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$ 关于 $I$ 在 $S$ 上一致地有和，且设对每一 $p \in S$ ， $f(x; p)$ 在 $I$ 上可积。 $s(x) =$

$\sum_{p \in S} f(x; p)$ 。那么 $s(x)$ 在 $I$ 上可积，且

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{p \in S} \int_a^b f(x;p)dx.$$

(b) 设  $F$  是  $\mathbf{R}_N$  内的图形,  $f: F \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$  在  $F$  上可积, 且在  $S$  上一致地有和  $s(x)$ . 那么  $s(x)$  在  $F$  上可积, 且

$$\int_F s dV_N = \sum_{p \in S} \int_F f(x;p) dV_N.$$

下一定理是关于无序和逐项可微性的, 它与定理9.14相似.

**定理9.44** 设  $G$  是  $\mathbf{R}_N$  内开集且  $f: G \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$  连续, 且在  $G$  内有连续的偏导数  $f_{,K}(x;p)$  ( $K=1, 2, \dots, N$ ). 设  $f(x;p)$  在  $S$  上的和为  $s(x)$ ,  $f_{,K}(x;p)$  在  $S$  上一致地有和  $t(x)$ . 那么对所有  $x \in G$ , 有

$$s_{,K}(x) = t(x).$$

关于无序和的一致地有和的  $M$ -判别法与定理9.21类似.

**定理9.45** (外尔斯特拉斯  $M$ -判别法) 设  $A$  是距离空间  $T$  内的集且  $u: A \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 对  $\forall p \in S$ , 有  $|u(x;p)| \leq f(p)$ . 如果  $f(p)$  在  $S$  上有和, 那么  $u(x;p)$  及  $|u(x;p)|$  关于  $A$  在  $S$  上一致地有和.

## 习 题

1. 设  $S = \{(m,n): m,n \text{ 是自然数}\}$ ,  $f(m,n) = \frac{1}{m^{\frac{5}{2}} + n^{\frac{5}{2}}}$ ,

证明  $f$  在  $S$  上有和.

2. 设 $S$ 同习题1.  $f(m, n) = \frac{1}{m + n^3}$ , 证明 $f$ 在 $S$ 上没有和。

3. 设 $S = \{(l, m, n), l, m, n \text{ 是自然数}\}$ , 于 $S$ 上定义

$$f(l, m, n) = \frac{1}{l^2 + m^2 + n^4},$$

$f$ 在 $S$ 上有和吗?

4. 证明定理9.38.

5. 证明定理9.39.

6. 证明定理9.40.

7. 完成定理9.41的证明.

8. 设 $S = \{x : 0 < x < 1\}$ ,  $f : S \rightarrow \mathbf{R}_1$ ,  $f$ 的值域含有集  $A = \{x : 0 < x < 1, x \text{ 为有理数}\}$ . 证明 $f$ 在 $S$ 上没有和。

9. 设 $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $S = \{n : n \text{ 为自然数}\}$ . 若 $f$ 定义在 $I \times S$ ,  $f(x; n) = \frac{x^n}{n}$ .  $f$ 关于 $I$ 在 $S$ 上是否一致地有和?

10. 设 $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $S = \{(m, n) : m, n \text{ 为自然数}\}$ .  $f : A \times S \rightarrow \mathbf{R}_1$ ,  $f = x^m y^n / m^2 n^2$ .  $f$ 关于 $A$ 在 $S$ 上是否一致地有和?

11. 证明定理9.43(a).

12. 证明定理9.43(b).

13. 设 $S = \{n : n \text{ 为整数}\}$ ,  $I = \{x : 0 \leq x < \infty\}$ . 定义 $f(x, n)$

$$= \frac{e^{-nx}}{1 + n^4}, \text{ 无序和 } \sum_{n \in S} f(x; n) \text{ 能否逐项微分?}$$

14. 证明定理9.44.

# 15. 证明定理9.45.

## § 9.7 多重序列与多重级数

**定义** 以 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 表示所有自然数偶的集, 以 $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ 表示所有非负整数偶的集. 由 $\mathbf{N}_0 \times \mathbf{N}_0$ 到 $\mathbf{R}_1$ 内的函数 $u$ 称为二重数列.  $u$ 的值表示成 $u(m, n)$ 或习惯地表示成 $u_{mn}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . 二重序列的定义域可以是 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 或它的子集. 称当 $(m, n)$ 趋向于无穷时, 二重序列收敛于 $a \iff$  对 $\forall \varepsilon > 0 \exists$  自然数 $p$ , 使当 $m > p, n > p$ , 有 $|u_{mn} - a| < \varepsilon$ . 记为当 $(m, n) \rightarrow \infty, \{u_{mn}\} \rightarrow a$ .

基于二重序列概念相应地引入二重级数概念.

**定义** 二重序列的序偶 $(\{u_{mn}\}, \{S_{mn}\})$ 称为二重级数.

$u_{mn}$ 是它的项. 其中 $S_{mn} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n u_{ij}$ , 称为级数的部分和,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . 称二重级数为收敛的 $\iff \exists$  数 $S$ , 当 $(m, n) \rightarrow \infty$ 时,  $S_{mn} \rightarrow S$ . 否则二重级数是发散的. 通常习惯地记二重级数为 $\sum_{m, n=0}^{\infty} u_{mn}$ , 而不采用序偶的记法.

下面定理是极限定理及收敛定义的直接推论.

**定理9.46** (a) 若二重级数 $\sum_{m, n=0}^{\infty} u_{mn}, \sum_{m, n=0}^{\infty} v_{mn}$  都是

收敛的,  $c, d$ 是常数, 那么级数 $\sum_{m, n=0}^{\infty} (cu_{mn} + dv_{mn})$ 是收敛

的, 且

$$\sum_{m; n=0}^{\infty} (cu_{mn} + dv_{mn}) = c \sum_{m; n=0}^{\infty} u_{mn} + d \sum_{m; n=0}^{\infty} v_{mn}.$$

(b) 若级数  $\sum_{m; n=0}^{\infty} u_{mn}$  是发散的,  $c \neq 0$ , 那么级数  $\sum_{m; n=0}^{\infty} cu_{mn}$

是发散的.

下一定理说明二重级数收敛性与无序和之间的关系.

**定理9.47** 设二重序列  $u: N_0 \times N_0 \rightarrow R_1$  的项  $u_{mn}$  是非负

的. 那么级数  $\sum_{m; n=0}^{\infty} u_{mn}$  收敛  $\iff$  函数  $u$  在  $S = N_0 \times N_0$  上有

和, 并且

$$\sum_{m; n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{(m; n) \in S} u_{mn}. \quad (9.29)$$

**证明** (a) 设  $u$  在  $S$  上有和, 以  $s$  表示. 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists S$  的一

有限集  $S'$ , 使含有  $S'$  的任何有限集  $S''$ , 有  $\left| \sum_{(m; n) \in S''} u_{mn} - s \right|$

$< \varepsilon$ . 若  $p > S'$  中每一  $(m, n)$  的  $m$  及  $n$ . 由  $u_{mn}$  的非负性, 可知当  $m_0 \geq p, n_0 \geq p$  时,

$$s - \varepsilon < \sum_{(m; n) \in S} u_{mn} \leq \sum_{i=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{n_0} u_{ij} = S_{m_0, n_0} \leq s.$$

所以二重级数收敛于和  $s$ .

(b) 假设二重级数收敛于和  $s$ ,  $S'$  是  $S$  的任意给定的有限子

集. 由收敛定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists p$ , 使当  $m_0 > p, n_0 > p$ , 有  $S_{m_0, n_0} < s + \varepsilon$ . 由  $S'$  是  $S$  的有限子集, 可以认为 对  $\forall (m, n) \in S'$ , 有  $p > m, p > n$ . 于是有

$$\sum_{(m, n) \in S'} u_{mn} \leq \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^p u_{mn} = S_{p,p} \leq s + \varepsilon.$$

由定理9.34.  $u$  在  $S$  上有和.

显然对于三重、四重以至任意多重级数相应于定理9.46. 定理9.47的定理也成立.

**定理9.48** 设  $u: N_0 \times N_0 \rightarrow R_1$  的项为  $u_{mn}$ , 级数  $\sum_{m, n=0}^{\infty} u_{mn}$

绝对收敛  $\iff u$  在  $S = N_0 \times N_0$  上有和. 并且在收敛情况下 (9.29) 式成立.

定理9.48可由定理9.47直接推出, 细节留给读者. 定理9.47、9.48是 § 9.6中关于无序和定理9.35的特殊情况. 下一定理则是有关无序和一般的定理9.50的特殊情况.

**定理9.49** 给定  $u: N_0 \times N_0 \rightarrow R_1$ , 其项为  $u_{mn}$ . 设  $\sum_{m, n=0}^{\infty} u_{mn}$  是绝对收敛的, 那么对每一固定  $m, (m = 0, 1, 2, \dots)$  单重级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$  是绝对收敛的; 对每一固定  $n, (n = 0, 1, 2, \dots)$  级数  $\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}$  是绝对收敛的. 如果定义

$$U_m = \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}, \quad V_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{mn}, \quad W_k = \sum_{m+n=k} u_{mn}$$

那么级数  $\sum_{m=0}^{\infty} U_m$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ ,  $\sum_{r=0}^{\infty} W_r$  都绝对收敛且与  $\sum_{m;n=0}^{\infty} u_{mn}$

有同样的和。

**证明** 先假定  $u_{mn} \geq 0$ . 由定理 9.48 可知  $u$  在  $S = N_0 \times N_0$  上

有和. 对每一  $m$ ,  $\sum_{n=0}^p u_{mn}$  是  $u$  在  $S$  的有限子集上的和, 对任何

$p$ ,  $\sum_{n=0}^p u_{mn} \leq \sum_{(m;n) \in S} u_{mn}$ . 即对  $\forall m$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$  的部分

和一致有界, 因此级数  $\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$  对每一  $m$  收敛. 这样对  $\forall m$ ,

$U_m$  有定义. 现在来研究  $\sum_{m=0}^{\infty} U_m$  的部分和  $\sum_{m=0}^M U_m$ . 对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$\exists p$  使对  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  都有

$$\sum_{n=0}^p u_{mn} > \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} - \frac{\varepsilon}{M}.$$

由此

$$\sum_{m=0}^M U_m = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} < \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^p u_{mn} + \varepsilon.$$

因为  $u$  在  $S$  上有和, 由上面不等式所示,  $\sum_{m=0}^M U_m$  有界, 我们断定

$\sum_{m=0}^{\infty} U_m$  收敛, 且其和不超过  $u$  在  $S$  上的和。



现在证明还有  $\sum_{m=0}^{\infty} U_m \geq \sum_{(m;n) \in S} u_{m,n}$ . 为此, 对于  $\forall \varepsilon > 0$ .

$\exists$  有限集  $S' \subset S$ , 使

$$\sum_{(m;n) \in S'} u_{m,n} > \sum_{(m;n) \in S} u_{m,n} - \varepsilon.$$

取  $M'$  大于  $S'$  中  $(m,n)$  的诸  $m$  的值, 有

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} U_m &\geq \sum_{m=0}^{M'} U_m = \sum_{m=0}^{M'} \sum_{n=0}^{\infty} u_{m,n} \\ &\geq \sum_{(m;n) \in S'} u_{m,n} > \sum_{(m;n) \in S} u_{m,n} - \varepsilon. \end{aligned}$$

既然  $\varepsilon$  是任意的,  $\sum_{m=0}^{\infty} U_m \geq \sum_{(m;n) \in S} u_{m,n}$ . 因此断定  $\sum_{m=0}^{\infty} U_m =$

$$\sum_{(m;n) \in S} u_{m,n}. \text{ 由定理 9.48, 得 } \sum_{m=0}^{\infty} U_m = \sum_{m;n=0}^{\infty} u_{m,n}.$$

对于  $u_{m,n}$  符号可正可负的一般情况, 根据绝对收敛的假设, 分别讨论级数的正部分及负部分, 重复上述推理便得结论.

同理可得关于  $\sum_{r=0}^{\infty} V_r, \sum_{r=0}^{\infty} W_r$  的结论.

注 定理 9.49 关于二重绝对收敛级数适合结合律的结论, 通过无序和给出了证明. 仿照这一定理可以把它推广为下面关于无序和的结合律的一般定理.

**定理9·50** 设 $S'$ 是一集, 对 $\forall x \in S'$  伴之一集 $S_x$ . 定义 $S = \{(x, y) : x \in S', y \in S_x\}$ . 若 $f : S \rightarrow R_1$  在 $S$ 上有和.

定义 $g(x) = \sum_{y \in S_x} f(x, y)$ . 那么 $g$ 在 $S'$ 上有和且

$$\sum_{x \in S'} g(x) = \sum_{x \in S'} \left[ \sum_{y \in S_x} f(x, y) \right] = \sum_{(x, y) \in S} f(x, y).$$

定理9·50的证明可仿照定理9·49的证明写出来, 把它作为习题留给读者. 下面以三重级数为例具体说明定理9·50.

设 $S' = N \times N$ , 对 $\forall x \in S', S_x = N_0$ . 那么 $S = N \times N \times N_0$ . 如果 $f : S \rightarrow R_1$  在 $S$ 上有和; 以 $u_{l, m, n}$ 表示 $f$ 的项. 定理9·50指出

$$g(x) \equiv \sum_{y \in S_x} f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{l, m, n}$$

对 $\forall (l, m) \in S'$  是收敛的. 以 $U_{l, m}, (l, m) \in S'$  表示 $g(x)$ 的项, 那么

$$\sum_{l, m=1}^{\infty} U_{l, m} = \sum_{l, m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{l, m, n} = \sum_{(l, m, n) \in S} u_{l, m, n}.$$

定理9·50 有如下的部分逆成立.

**定理9·51** 设 $S', S, S_x$ 均如定理9·50所述.  $f : S \rightarrow R_1$ 是

给定的, 对 $\forall x \in S', f$ 在 $S_x$ 上有和. 定义 $g(x) = \sum_{y \in S_x} |f(x, y)|$

且 $g$ 在 $S'$ 上有和. 那么 $f$ 在 $S$ 上有和.

把这一定理及下一结果的证明都留给读者。

**定理9.52** (无序和的相乘) 设给定  $f: S' \rightarrow R_1$  与  $g: S'' \rightarrow R_1$ . 定义  $S = S' \times S''$  及对  $\forall x \in S', \forall y \in S'', h(x, y) = f(x)g(y)$ . 若  $f$  在  $S'$  上有和,  $g$  在  $S''$  上有和. 那么  $h$  在  $S$  上有和而且

$$\sum_{(x, y) \in S} h(x, y) = \left[ \sum_{x \in S'} f(x) \right] \cdot \left[ \sum_{y \in S''} g(y) \right].$$

本节的定理可用来建立幂级数相乘的法则。假设级数

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

对  $|x| < R$  是收敛的。先不论其收敛性, 按如下多项式相乘法把两幂级数相乘:

$$b_0 f(x) = a_0 b_0 + a_1 b_0 x + \cdots + a_n b_0 x^n + \cdots$$

$$b_1 x f(x) = a_0 b_1 x + \cdots + a_{n-1} b_1 x^n + \cdots$$

$\vdots$

$$b_n x^n f(x) = a_0 b_n x^n + \cdots$$

$(l, m, n)$  相加得到级数

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)x^n + \cdots$$

用和的表示法, 这一乘积写作

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j}.$$

令  $i + j = n$ , 合并  $n$  次项, 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

我们将证明上式确是  $f(x)g(x)$  的展开式.

**定义** 设给定幂级数  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-C)^i$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-C)^j$ ,

称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) (x-C)^n \quad (9.30)$$

为所给两级数的哥西乘积.

**定理9.53** 设  $f, g$  的幂级数展开

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-C)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-C)^n$$

对  $|x-C| > R$ , ( $R > 0$ ) 收敛. 那么对于  $|x-C| < R$ , 积  $f(x)g(x)$  的幂级数展开是  $f(x)$  与  $g(x)$  之展开式的哥西乘积.

**证明** 既然对  $|x-C| < R$ , 给出的两个级数是绝对收敛的. 由此导出

$$f(x) = \sum_{i \in N_1} C_i(x-C)^i, \quad g(x) = \sum_{j \in N_2} d_j(x-C)^j$$

在定理 9.52 中, 取  $S' = N_0$ ,  $S'' = N_0$ , 那么对  $(i, j) \in N_0 \times N_0$ ,  $h_{ij} = C_i d_j (x-C)^{i+j}$  定义  $h$ . 因而对满足  $|x-C| < R$

的每一固定 $x$ , 有

$$f(x)g(x) = \sum_{(i; j) \in N_0 \times N_0} C_i d_j (x - C)^{i+j}.$$

现在对 $\forall n \in N_0$ , 定义 $S_n = \{(i, j) \in N_0 \times N_0 : i+j=n\}$ , 那么由一般结合律 (定理9.50) 得出函数

$$u_n(x) = \sum_{(i; j) \in S_n} C_i d_j (x - C)^{i+j}$$

在 $N_0$ 上有和, 并且

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n \in N_0} \left( \sum_{(i; j) \in S_n} C_i d_j \right) (x - C)^n, \\ |x - C| < R.$$

这就是形如 (9.30) 的公式.

假若 $g$ 在 $|x - C| < R$ 内可表示为幂级数,  $b$ 是常数. 那么由定理9.53,  $[g(x) - b]^n$ 在 $|x - C| < R$ 内可表示为幂级数, 这一幂级数可由 $[g(x) - b]$ 的幂级数展开的逐次哥西乘积得到. 按这一方法能够获得复合函数的幂级数展开. 如果对 $|x - b| < R_0 (R_0 > 0)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - b)^n,$$

那么构成级数

$$f(g) = \sum_{n \in N_0} a_n (g - b)^n. \quad (9.31)$$

把 $[g(x) - b]^n$ 的由哥西乘积得到的幂级数代入 (9.31) 中, 当 $|g(C) - b| < R_0$ 时, 所得级数对充分小的 $|x - C|$ 中的 $x$ 收

敛于复合函数  $f[g(x)]$ .

容易用定理9.52将二重级数的结果推广到多重级数. 因此, 下面只讨论二重级数.

若二重级数的项  $u_{mn} = C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$ , 这里  $C_{mn}$ ,  $a, b, x, y$  都属于  $R_1$ , 称

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$$

为二重幂级数. 类似地定义三重、四重及  $n$ -重幂级数. 下面两个定理可从先前关于收敛性的结果直接导出.

**定理9.54** 设二重幂级数  $\sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}x^m y^n$  对于  $x=x_1, y=y_1$  ( $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ ) 是绝对收敛的,  $R = \{(x,y) : |x| < |x_1|, |y| < |y_1|\}$ . 那么级数在  $R$  上绝对收敛, 且以  $C_{mn}x^m y^n$  为项的函数关于  $R$  在  $N_0 \times N_0$  上有和.

令定理9.54中  $x=x'-a, y=y'-b$  可以得到关于点  $(a,b)$  的二重幂级数的同样的结果.

**定理9.55** (二重幂级数的逐项微分) 设二重幂级数

$$f(x,y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n \quad (9.32)$$

在  $S = \{(x,y) : |x-a| < r, |y-b| < t\}$  上绝对收敛. 那么  $f$  在  $S$  内有各阶偏导数, 且这些偏导数可由 (9.32) 逐项微分得到, 逐项微分得到的级数在  $S$  内绝对收敛, 其中

$$C_{mn} = \frac{1}{m!n!} \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f \right]_{x=a, y=b}.$$

**例1** 求  $f(x, y) = e^{x+y}$  ( $a=1, b=0$ ) 的幂级数展开, 计算到三次项.

**解** 由计算得:  $f(1, 0) = 1, f_x(1, 0) = 0, f_y(1, 0) = 1, f_{xx}(1, 0) = 0, f_{xy}(1, 0) = 1, f_{xx}(1, 0) = f_{xyx}(1, 0) = 0, f_{xyy}(1, 0) = 2, f_{yyy}(1, 0) = 1$ . 因此

$$e^{x+y} = 1 + y + (x-1)y + \frac{1}{2!}y^2 + (x-1)y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \dots$$

**例2** 证明: 对一切  $x, y$ , 有

$$\sum_{K=0}^{\infty} \frac{(x+y)^K}{K!} = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

因此  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ .

**解** 据定理9.52, 对任何  $x, y$ , 有

$$\left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \sum_{m; n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m! n!}.$$

应用定理9.49, 并令  $n = p - m$  可得

$$\begin{aligned} \sum_{m; n=0}^{\infty} \frac{x^m y^n}{m! n!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m=0}^p \frac{x^m y^{p-m}}{m! (p-m)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{m=0}^p \frac{p! x^m y^{p-m}}{m! (p-m)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x+y)^p}{p!}. \end{aligned}$$

## 习 题

习题1—6, 求给定的函数 $f(x, y)$ 的幂级数展开, 要求到三次项, 取 $a = b = 0$ .

1.  $f(x, y) = e^x \cos y,$

2.  $f(x, y) = (1 - x - 2y + x^2)^{-1}.$

3.  $f(x, y) = e^{-x} \sec y.$

4.  $f(x, y) = e^{-2x} \log(1 + y).$

5.  $f(x, y) = \cos(xy).$

6.  $f(x, y) = (1 + x + y)^{-\frac{1}{2}}.$

7. 对三重级数叙述与证明如定理9.46同样的定理.

8. 设 $S = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 且 $u : S \rightarrow \mathbf{R}_1$ 其 $u_{mn} = \frac{1}{mn^4}$ . 证明二重级数

$$\sum_{m, n=1}^{\infty} \frac{1}{mn^4} \text{ 不收敛, 因此 } u \text{ 在 } S \text{ 上没有和.}$$

9. 证明定理9.48.

10. 详细地写出定理9.49中 $w_r = \sum_{m+n=r} u_{mn}$ 的证明.

11. 证明定理9.50. 然后令 $S' = \mathbf{N}$ 及对所有 $x$ ,  $S_x = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ , 以此对三重级数导出类似于定理9.49的定理.

12. 令 $\mathbf{Z}$ 表示所有整数的集. 在定理9.50中之 $S' = \mathbf{N}_0$ ,

$$S_x = \mathbf{Z}. \text{ 证明形如 } \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{mn} \text{ 的“二重级数”的收敛性}$$

定理.

13. 证明定理9.51.

14. 如果在定理9.51中, 选取 $S' = \mathbf{N}$ ,  $S'' = \mathbf{N}$ , 并定义 $f(m, n)$



$= (-1)^{m+n} / (m^2 + n^2)$ 。定理的条件是否成立？

15. 证明定理9.52。

16. 用定理9.52求 $e^x \cos y$ 关于 $(0, 0)$ 点的二重幂级数的展开式。

17. 证明定理9.54。

18. 叙述并证明二重幂级数逐项积分的定理。

19. 证明定理9.55。

20. 用幂级数展开式证明  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ 。

## 第十章 伏里叶级数

### § 10.1 展开公式

当函数 $f$ 可以展开成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n, \quad 0 < |x-a| < R, \quad (10.1)$$

的幂级数时( $R$ 是收敛半径), 称 $f(x)$ 在 $|x-a| < R$ 内是解析的。(10.1) 中的 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ . 解析函数具有比无限可微性质还要强的性质. 为了得到不光滑函数的展开, 本章研究三角函数项级数. 下列函数称为三角函数系:

$$\begin{aligned} &1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \\ &\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \end{aligned}$$

形如

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (10.2)$$

的级数称为三角级数, 系数 $a_n, b_n$ 是常数. 三角函数系都是周期函数, 它们的共同周期是 $2\pi$ , 因此我们可只在 $[-\pi, \pi]$ 区间上讨论级数 (10.2). 如果级数 (10.2) 的和函数为 $f(x)$ , 为了用 $f(x)$ 表示出系数 $a_n, b_n$ , 要利用三角函数系的正交

性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{当 } m = n. \\ 0, & \text{当 } m \neq n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad m, n = 1, 2, \dots.$$

上述正交性的诸等式容易由初等积分法证实. 借助于正交性可求出 (10.2) 的系数  $a_n, b_n$  的表达式.

**定理10.1** 设  $f$  是  $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  上的连续函数,  $f(-\pi) = f(\pi)$ . 如果级数 (10.2) 于  $I$  上一致收敛于  $f(x)$ ,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (10.3)$$

那么

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nt dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.5)$$

**证明** 级数的部分和记为  $S_K(x)$ ,

$$S_K(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^K a_m \cos mx + b_m \sin mx.$$

因为  $S_K(x)$  一致收敛于  $f(x)$ , 注意到

$$|S_K(x) \cos nx - f(x) \cos nx| =$$

$$|S_K(x) - f(x)| \cdot |\cos nx| \leq |S_K(x) - f(x)|,$$

可知对  $\forall n$ , 当  $K \rightarrow \infty$  时  $S_K(x) \cos nx$  一致收敛于  $f(x) \cos nx$  同样,  $S_K(x) \sin nx$  一致收敛于  $f(x) \sin nx$ .

因此

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx \cos nx + b_m \sin mx \cos nx),$$

$$f(x) \sin nx = \frac{a_0}{2} \sin nx + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx \sin nx + b_m \sin mx \sin nx).$$

对这两个一致收敛的级数从  $-\pi$  到  $\pi$  逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \pi b_n.$$

除以  $\pi$  便是 (10.4)、(10.5)。

由 (10.4), (10.5) 给出的数  $a_n, b_n$  称为  $f$  的伏里叶系数, 这时 (10.3) 的级数称为  $f$  的伏里叶级数。

当  $f$  是在  $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  上可积的函数, 那么由 (10.4) 及 (10.5) 式可以确定  $a_n, b_n$ , 但 (10.3) 的伏里叶级数可能不收敛于  $f$ 。我们表示成

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

理论研究的中心问题应当是确定 $f$ 具有什么性质， $f$ 的伏里叶级数收敛于 $f$ 。

**定义** 称函数 $f$ 在区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上是分段连续的 $\iff$  (i)  $\exists I$ 的划分；

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

使 $f$ 在每一子区间 $I_K = \{x : x_{K-1} < x < x_K\}$ 上连续；(ii) 在每个分点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处， $f$ 的单边极限存在。

分别以 $f(x_K-)$ 、 $f(x_K+)$ 表示 $f$ 在间断点 $x_K$ 点的左、右极限，称 $f(x_K+) - f(x_K-)$ 为 $f$ 在 $x_K$ 点的跃度。于 $x_K$ 处将 $f$ 的值改成

$$f(x_K) = \frac{1}{2}[f(x_K+) + f(x_K-)],$$

称 $f$ 为标准化的。图10·1是标准化的函数的示意图。今后总假定分段连续函数是标准化的。由于改变被积函数的有限个

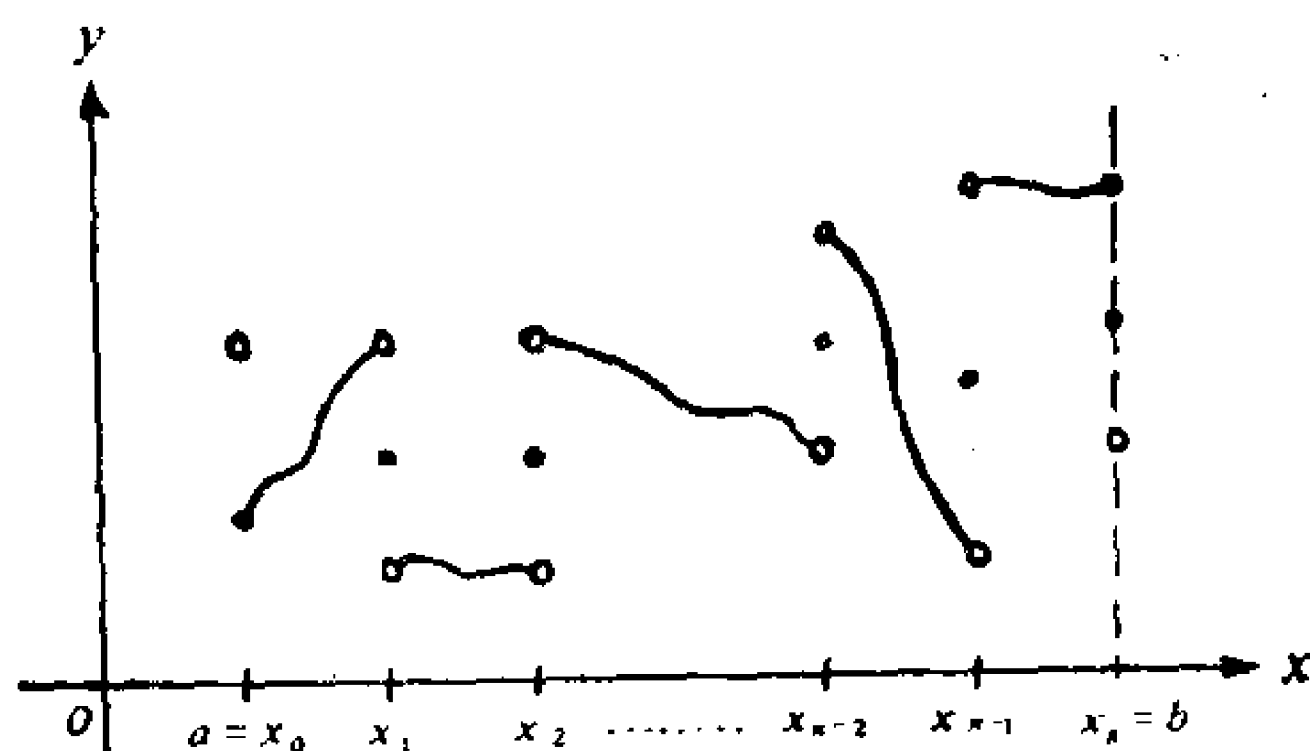


图 10·1

点上的值不影响积分值，分段连续的函数，标准化之后，它的伏氏系数并不改变。

**定义** 函数 $f$ 称为在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上是分段光滑的

$\Leftrightarrow$  (i)  $f$  是分段连续的; (ii)  $f'$  在每个子区间  $I_k = \{x: x_{k-1} < x < x_k\}$  内存在并且连续. 称  $f$  在  $I$  上光滑  $\Leftrightarrow f$  及  $f'$  都在  $I$  上连续.

函数的伏氏级数的收敛性问题将于 § 10.3 中讨论, 这里先形式地讨论求  $f$  的伏氏级数的步骤.

设  $f$  是  $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  上分段连续的函数. 如下定义  $f$  的周期延拓:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当 } -\pi \leq x < \pi, \\ f(x - 2\pi) & \text{当 } x \notin I. \end{cases}$$

然后在  $-\pi, \pi$  及所有其他间断点把  $\tilde{f}$  标准化, 这样  $\tilde{f}$  对  $-\infty < x < \infty$  都有定义.

**例1** 求函数  $f(x) = x$ ,  $x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  的伏里叶级数.

**解** 把  $f$  按周期延拓并标准化为  $\tilde{f}$  (图10.2). 求出

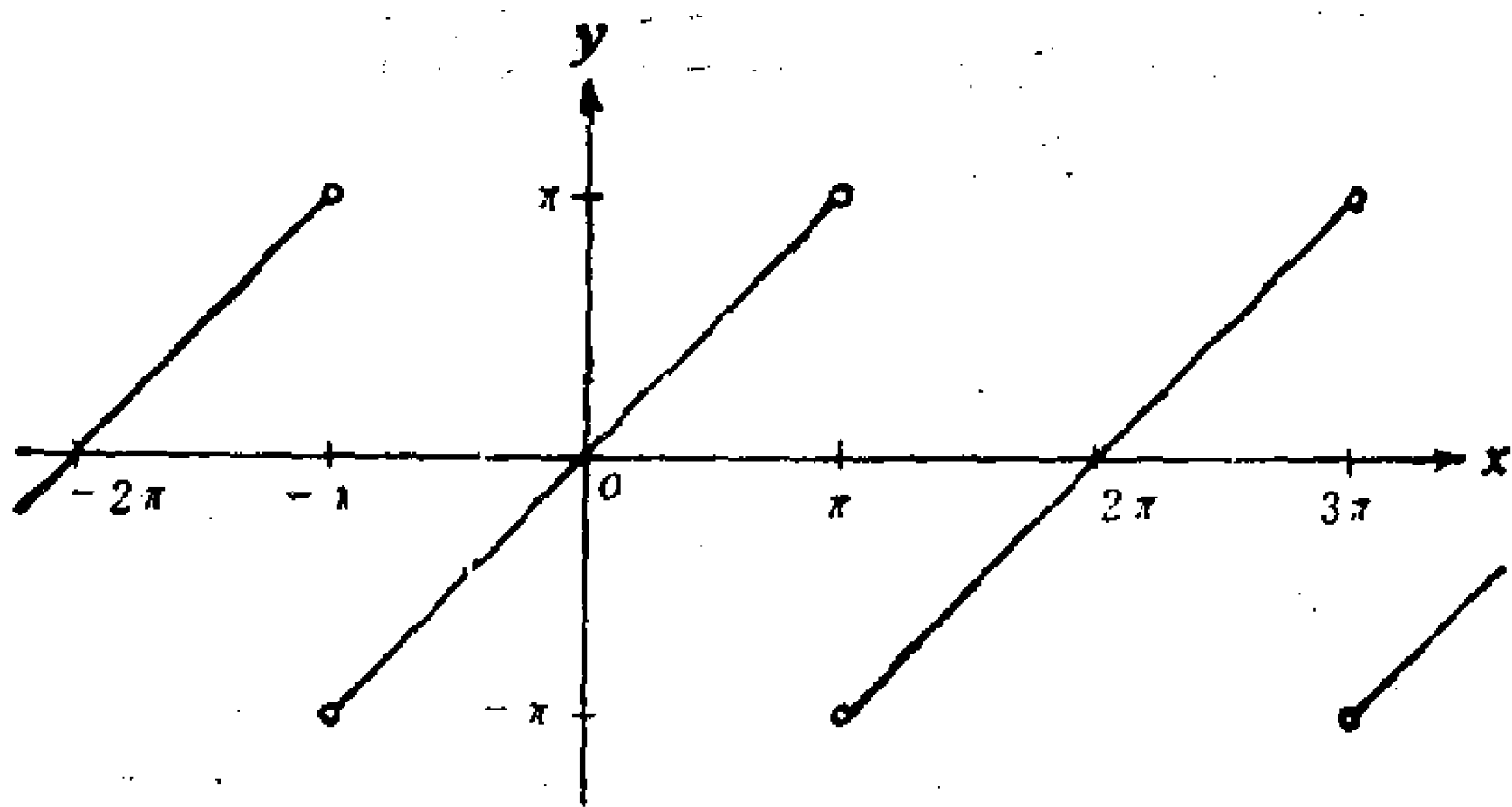


图 10.2

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx,$$

按部分积分法, 得出  $a_0 = 0$  及

$$a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

所以

$$f(x) \sim 2 \left[ \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right], \quad -\pi < x < \pi.$$

对于  $\tilde{f}(x)$ , 上面的级数允许  $x$  取任何实数. 在 § 10.3 就会知道级数在  $-\pi < x < \pi$  内收敛, 而当  $x = \pm \pi$  时显然级数的值为零.

例 1 中  $f(x)$  是奇函数,  $a_n = 0$ . 一般地当函数是奇函数 ( $\forall x, f(-x) = -f(x)$ ), 或是偶函数 ( $f(-x) = f(x)$ ), 相应的  $f(x) \cos nx$ , 及  $f(x) \sin nx$  则是奇或偶函数,  $a_n, b_n$  的计算可以得到简化.

**例 2** 求函数  $f(x) = |x|$ ,  $x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  的伏里叶级数.

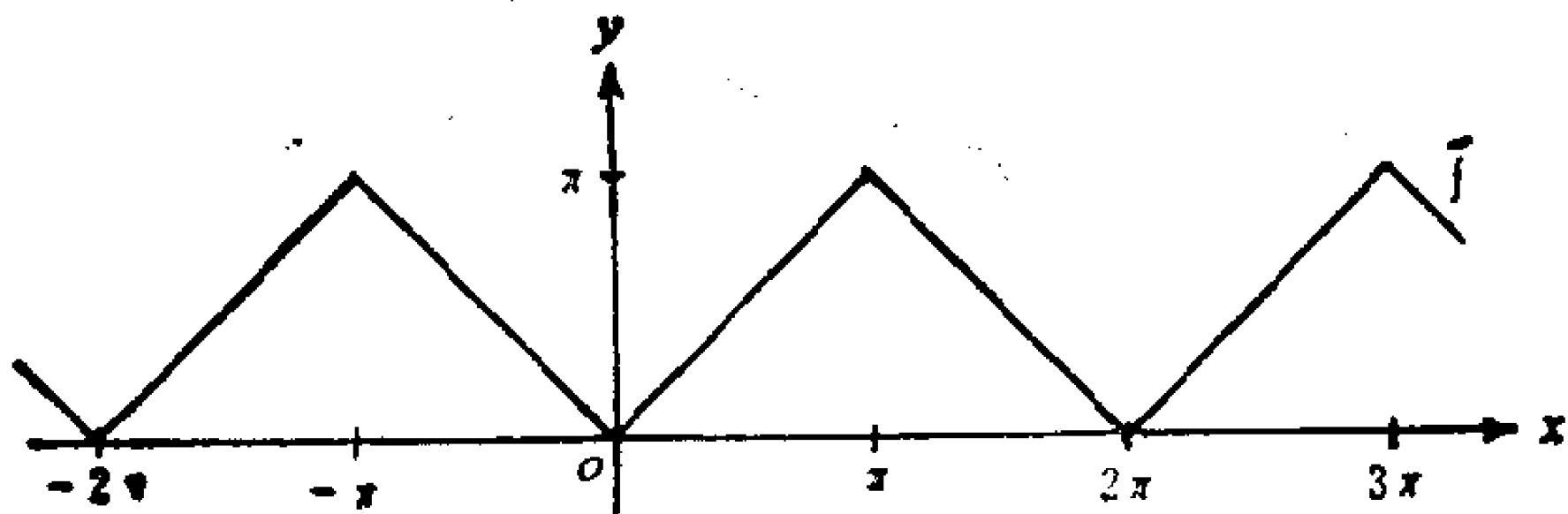


图 10.3

解  $f$  的周期延拓如图10·3所示。由  $f$  是偶函数，那么  $f(x)\sin nx$  是奇函数， $f(x)\cos nx$  是偶函数。因此对  $\forall n$ ， $b_n = 0$ ，而  $a_0 = \pi$  及

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx.$$

按部分积分法，求得

$$a_n = \frac{2}{n^2 \pi} [\cos n\pi - 1] = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \frac{-4}{(2K+1)^2 \pi}, & n = 2K+1, \\ 0, & n = 2K. \end{cases} \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

于是  $f$  的伏里叶级数是

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2K+1)x}{(2K+1)^2} + \dots \right], \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

于 § 10·3 我们证明上述级数收敛于  $|x|$ 。取  $x = 0$  便得出计算  $\pi$  的著名公式

$$\frac{1}{8} \pi^2 = \left[ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right]$$



## 习 题

习题1—10, 求所给函数 $f$ 的伏里叶级数.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x < 0\}, \\ 1, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x < \frac{\pi}{2}\}, \\ 1, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

$$3. \quad f(x) = x^2, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x < 0\}, \\ x, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = |\cos x|, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

$$6. \quad f(x) = x^3, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

$$7. \quad f(x) = e^{2x}, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x < 0\}, \\ \sin x, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

$$9. \quad f(x) = \sin^2 x, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

$$10. \quad f(x) = x \sin x, \quad x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}.$$

11. 验证等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{当 } m = n, \\ 0, & \text{当 } m \neq n. \end{cases}$$

$$12. (a) \text{ 求 } f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x < 0\} \\ \frac{\pi}{4}, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq \pi\} \end{cases}$$

的伏里叶级数;

(b) 假定(a)的级数收敛于 $f$  (标准化的), 证明

$$(i) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

$$(ii) \quad \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \cdots,$$

$$(iii) \quad \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \cdots.$$

13. (a) 求函数 $f(x) = x + x^2, x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$

的伏里叶级数;

(b) 假定(a)的级数收敛于 $f$  (标准化的), 证明

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

## § 10.2 伏里叶正弦与余弦级数, 区间的改变

如果求定义域为 $J = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}$ 上的函数 $f$ 的伏里

叶级数，必须把 $f$ 的定义域变为 $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$ 。为此，可以在 $I' = \{x: -\pi \leq x < 0\}$ 上灵活地定义 $f$ 。例如当 $x \in I'$ 令 $f = 0$ ；另一种选择是定义 $f$ 为 $I$ 上的偶函数或奇函数。这样做的好处是：对偶函数其 $b_n = 0$ ， $f$ 的伏里叶级数仅有余弦项；对奇函数其 $a_n = 0$ ， $f$ 的伏里叶级数仅有正弦项。对原来的 $f$ 的定义域 $J$ 是这伏里叶展开的半幅级数。这样的仅含余弦或仅含正弦的级数分别称为余弦或正弦级数。我们举例说明求出余弦、正弦级数的步骤。

### 例1 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x \in I_1 = \{x: 0 \leq x < \frac{\pi}{2}\} \\ 1 & \text{当 } x \in I_2 = \{x: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\}, \end{cases}$$

求 $f$ 的余弦级数。

**解** 推广 $f$ 为偶函数，如图10·4所示，那么函数被标准

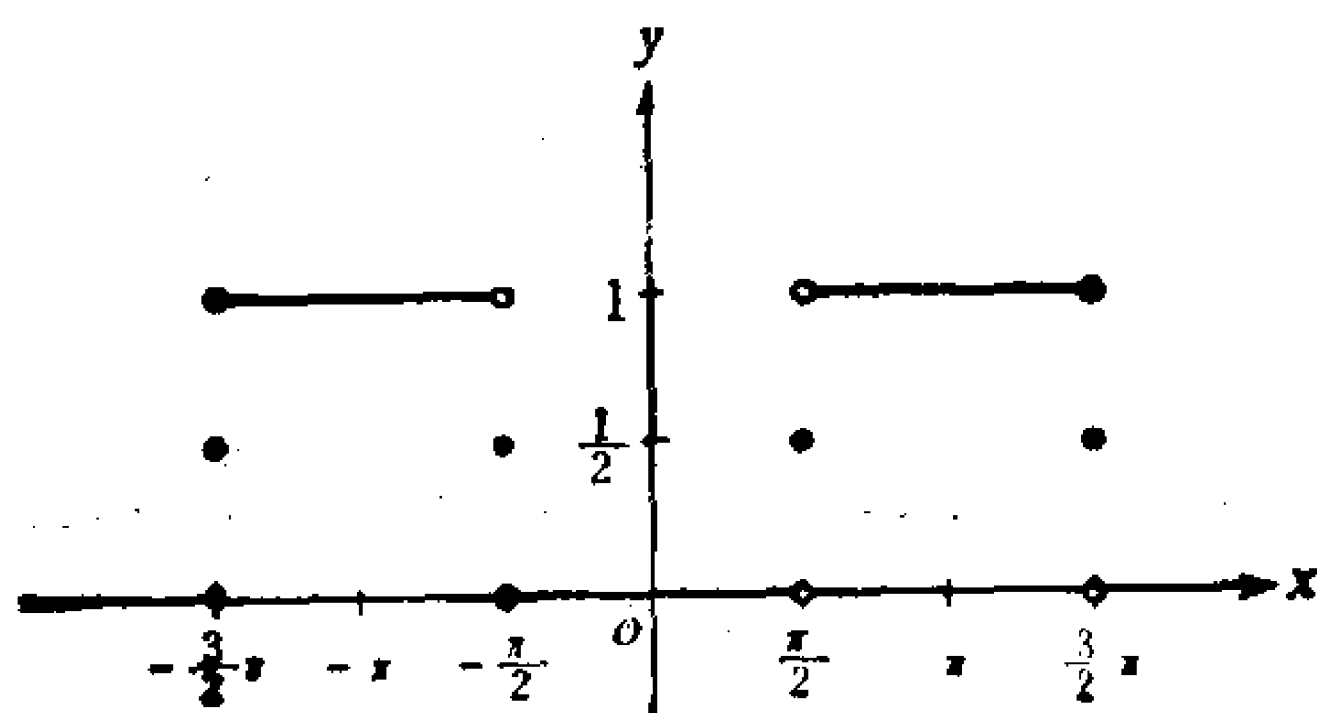


图 10·4

化为  $\widetilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \widetilde{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \widetilde{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 。因为  $\widetilde{f}$  是偶函数

$b_n = 0, n = 1, 2, \dots$ 。而

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

由简单计算得:  $a_0 = 1$ ,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2K, \\ \frac{2(-1)^{K+1}}{2K+1}, & \text{当 } n = 2K+1, \\ & K = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

于是

$$\widetilde{f}(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \dots \right],$$

$$x \in I_1 \cup I_2.$$

**例2** 求例1中  $f$  的正弦级数。

**解** 推广  $f$  为奇函数, 如图10·5所示, 其标准化为,

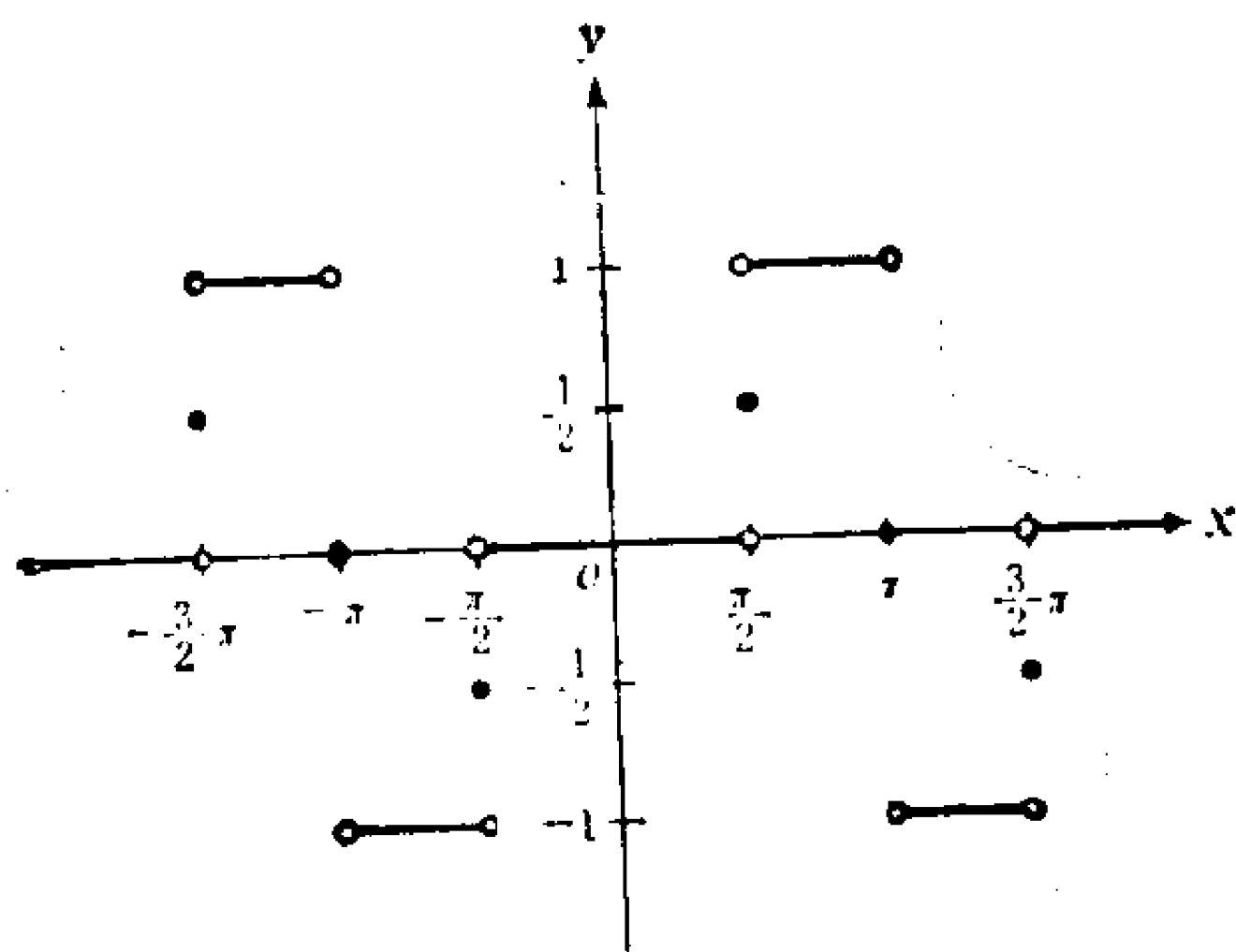


图 10·5

$$\widetilde{f}\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\widetilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cdots=\frac{1}{2}, \quad \widetilde{f}(-\pi)=\widetilde{f}(\pi)=\cdots=0$$

$$\text{以及 } \widetilde{f}\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\widetilde{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cdots=-\frac{1}{2}. \quad \widetilde{f} \text{ 为奇函数, } a_n=0,$$

$$n=0, 1, 2, \cdots.$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx,$$

算得

$$b_n=\begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & \text{当 } n=2K-1, \\ \frac{2}{K\pi}[(-1)^K-1], & \text{当 } n=2K, K=1, 2, \cdots. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(x)=\frac{2}{\pi}\bigg[\frac{\sin x}{1}-2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5} \\ -\frac{2\sin 6x}{6}+\frac{\sin 7x}{7}+\cdots\bigg], \quad x\in I_1\cup I_2. \end{aligned}$$

如果 $f$ 是定义在区间 $J=\{x:c-\pi<x<c+\pi\}$ 上的分段光滑的函数, 可以构造 $f$ 的周期延拓 $\widetilde{f}$ , 并按公式(10·4)与(10·5)求 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ . 由三角函数系有 $2\pi$ 的周期,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 也可按以下公式计算:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{c-x}^{c+x} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{c-x}^{c+x} f(x) \sin nx dx.$$

**例3** 给定  $f(x) = x$ ,  $x \in I = \{x: 0 \leq x \leq 2\pi\}$ . 求  $f$  的伏里叶级数.

**解** 按周期延拓  $f$  并把它标准化, 如图10.6所示. 计算它的伏氏系数

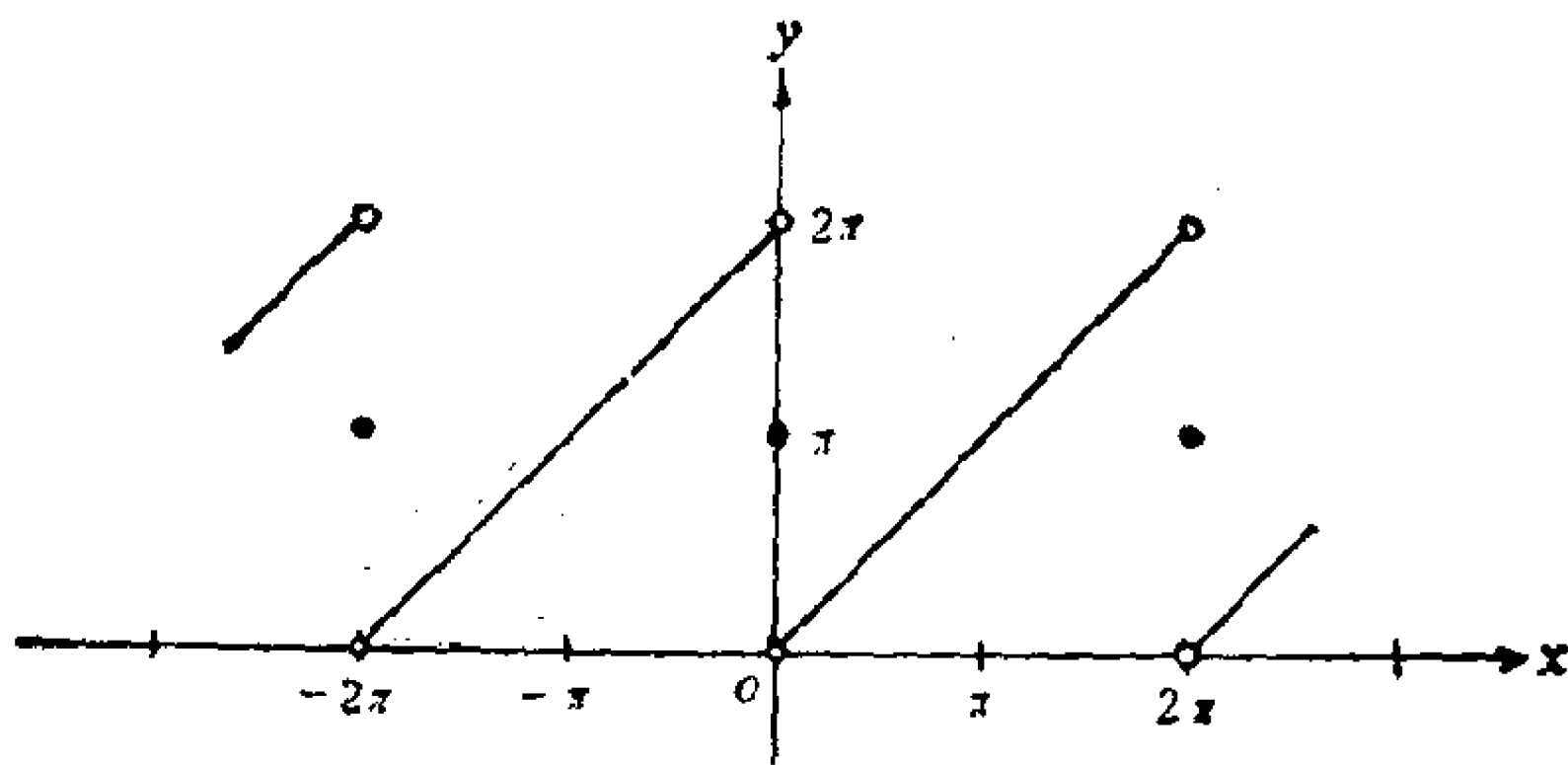


图 10.6

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

于是

$$x \sim \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

若函数  $f$  在区间  $I = \{x: -L \leq x \leq L\}$  ( $L > 0$ ) 上分段连续, 可引用变换  $y$  及  $g(y)$ :

$$y = \frac{\pi}{L}x; \quad f(x) = f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) = g(y) = g\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$y = \frac{\pi x}{L}$  把  $I$  映象为  $I' = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$ ,  $g$  是  $I'$  上分段连续的函数。因此

$$g(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny), \quad y \in I', \quad (10.6)$$

其系数

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy.$$

代回原变量  $x$  及函数  $f$ , 得到

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

级数 (10.6) 成为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad x \in I.$$

**例4** 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{当 } x \in I_1 = \{x: -1 \leq x < 0\}, \\ x-1, & \text{当 } x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq 1\}. \end{cases}$

求  $f$  关于  $I = I_1 \cup I_2$  的伏里叶级数.

解  $f$  的周期延拓并标准化如图10·7所示. 又  $f$  是奇函数,

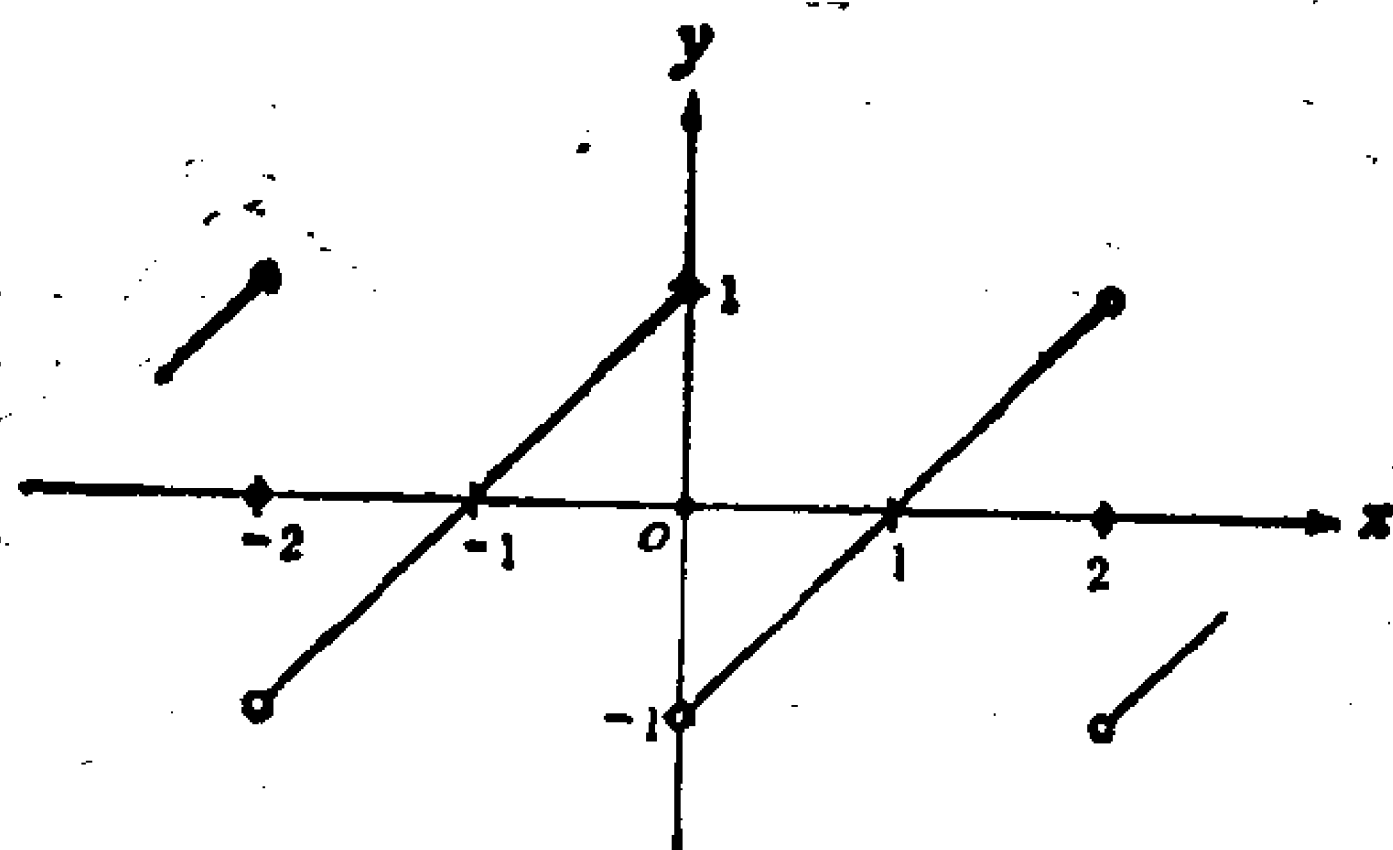


图 10·7

所以  $a_n = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$b_n = 2 \int_0^1 (x-1) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = -\frac{2}{n\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

于是

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}, \quad x \in I.$$

## 习 题

习题1—4, 求函数  $f$  的余弦级数并画出  $f$  的标准化的延拓草图.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1 = \{x: 0 \leq x < \frac{\pi}{2}\} \\ 0, & x \in I_2 = \{x: \frac{\pi}{2} \leq x < \pi\} \end{cases}$$



$$2. \quad f(x) = \sin x, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

$$3. \quad f(x) = x, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

$$4. \quad f(x) = x^3, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

习题5—8, 求函数 $f$ 的正弦级数并画出 $f$ 的标准化的延拓草图.

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1 = \{x: 0 \leq x < \frac{\pi}{2}\}, \\ -1, & x \in I_2 = \{x: \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

$$6. \quad f(x) = \cos x, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

$$7. \quad f(x) = x, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

$$8. \quad f(x) = x^3, \quad x \in I = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}.$$

习题9—12, 求在区间 $I = \{x: -L < x < L\}$ 上函数 $f$ 的伏里叶级数.

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1 = \{x: -2 \leq x < 0\}, \\ -1, & x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq 2\}, \end{cases}$$

$$10. \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \in I_1 = \{x: -2 \leq x < 0\}, \\ x, & x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq 2\}. \end{cases}$$

$$11. \quad f(x) = x^2, \quad x \in I = \{x: -1 \leq x \leq 1\}.$$

$$12. \quad f(x) = 1 - |x|, \quad x \in I = \{x: -1 \leq x \leq 1\}.$$

### § 10.3 收敛性定理

这一节，建立判定伏里叶级数收敛性的定理，这些定理说明具有何种性质的函数能够展开成伏里叶级数。

**定理10.2** (贝塞尔不等式) 设定义域为  $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  的函数  $f$ ,  $f$  及  $f^2$  在  $I$  上可积,  $f$  的伏氏级数是

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

那么有下列贝塞尔不等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \quad (10.7)$$

**证明** 用  $S_n(x)$  表示这个伏氏级数的第  $n$  个部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

这样便有

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_n(t)]^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(t) dt \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t) dt. \end{aligned} \quad (10.8)$$

由伏氏系数的定义可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\
&+ \sum_{k=1}^n \left( a_k \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \right. \\
&\left. + b_k \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \right) \\
&= \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2). \quad (10 \cdot 9)
\end{aligned}$$

将  $S_n^2(t)$  按多项式乘法展开, 并由三角函数系的正交性, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(t) dt. \quad (10 \cdot 10)$$

综合 (10·8), (10·9) 及 (10·10) 便得

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - S_n(t)]^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\}. \quad (10 \cdot 11)
\end{aligned}$$

因此对  $\forall n$  都有

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt,$$

这说明  $\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$  收敛, 并且

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt.$$

由级数收敛的必要条件，贝塞尔不等式说明，任意的在  $I$  上平方可积的函数  $f$  的伏氏系数，当  $n \rightarrow \infty$  时都有  $a_n \rightarrow 0$ ， $b_n \rightarrow 0$ 。

在研究伏里叶级数收敛性中，经常出现狄里赫莱核  $D_n$ ，其定义为

$$D_n : x \rightarrow \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

容易验证三角恒等式：

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} = D_n(x). \quad (10 \cdot 12)$$

狄里赫莱核具有如下性质：

(i)  $D_n(x)$  是关于  $x$  的偶函数；

(ii)  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi$ ，

(iii)  $D_n$  以  $2\pi$  为周期。

**引理10.1** 设  $S_n(x)$  是以  $2\pi$  为周期的分段连续函数  $f$  的伏氏级数第  $n$  个部分和。那么

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x+u) \\
&\quad - f(x^+)] D_n(u) du \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x-u) - f(x-)] D_n(u) du. \quad (10 \cdot 13)
\end{aligned}$$

**证明** 因为  $S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ,

把  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \cos kt dt$ ,  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \sin kt dt$  代入  $S_n(x)$  得

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \cos kx \right. \\
&\quad \left. + \sin kt \sin kx \right] dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt.
\end{aligned}$$

令  $t = x + u$ , 上式成为

$$\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \right] du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du.
\end{aligned}$$

因为 $D_n$ ,  $f$ 都以 $2\pi$ 为周期, 积分区间可以变为 $I = \{u: -\pi \leq u \leq \pi\}$ . 于是

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^0 f(x+v) D_n(v) dv \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x+u) D_n(u) du.$$

再将 $v$ 换为 $-u$ 并注意 $D_n(-v) = D_n(v)$ , 上式第一个积分成为 $\frac{1}{\pi} \int_0^x f(x-u) D_n(u) du$ , 于是

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x [f(x+u) + f(x-u)] D_n(u) du.$$

由 $D_n(x)$ 的性质(ii),  $\frac{1}{2} f(x+) = \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x+) D_n(u) du$ ,

$\frac{1}{2} f(x-) = \frac{1}{\pi} \int_0^x f(x-) D_n(u) du$ , 于是

$$S_n(x) - \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^x [(f(x+u) - f(x+)) + (f(x-u) - f(x-))] D_n(u) du.$$

**定理10·3** 设 $f$ 是分段光滑标准化的以 $2\pi$ 为周期的函数, 那么对每一 $x$ ,  $f$ 的伏氏级数收敛于 $f(x)$ .

**证明** 对 $\forall x$ , 证明当 $n \rightarrow \infty$ ,  $S_n(x) - f(x) \rightarrow 0$ . 把(10·13)式写成

$$S_n(x) - f(x) = S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = T_n(x) + R_n(x)$$

其中

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u) - f(x+)] D_n(u) du,$$

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x-u) - f(x-)] D_n(u) du.$$

由  $D_n(u)$  定义可得

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \sin \frac{1}{2} u} \sin(n + \frac{1}{2})u du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \sin \frac{1}{2} u} (\sin n u \cos \frac{1}{2} u \\ &\quad + \cos n u \sin \frac{1}{2} u) du. \end{aligned} \quad (10 \cdot 14)$$

如下定义  $g_1, g_2$ :

$$g_1(x, u) = \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \sin \frac{1}{2} u} \cos \frac{1}{2} u,$$

$$g_2(x, u) = \frac{1}{2} (f(x-u) - f(x-)).$$

$g_1(x, u)$  关于  $u$  可能除了  $u = 0$  点之外, 是分段光滑的. 而 由

洛比达法则可得

$$g_1(x, 0+) = -f'(x-),$$

即 $g_1$ 是处处分段光滑的。现在把(10·14)写成

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [g_1(x, u) \sin nu + g_2(x, u) \cos nu] du.$$

$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_1(x, u) \sin nu du$ 可看作 $\frac{1}{2}g_1(x, u)$ 的正弦级数的第 $n$ 个

系数,  $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_2(x, u) \cos nu du$ 可看作 $\frac{1}{2}g_2(x, u)$ 的余弦级数的

第 $n$ 个系数, 根据贝塞尔不等式, 当 $n$ 趋向于无穷时, 它们都趋向于零, 因此 $T_n(x) \rightarrow 0$ . 同理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $R_n(x) \rightarrow 0$ .

定理证迄.

一个比定理10·3条件更弱的定理可借助于下列应用广泛的黎曼引理得到.

**定理10·4** (黎曼—勒贝格引理) 设 $f$ 定义在 $I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$ 上且 $|f|$ 在 $I$ 上可积. 设 $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 是 $f$ 的伏氏系数. 那么当 $n \rightarrow \infty$ 时,  $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ .

**证明** 当 $f$ 为有界可积时,  $f^2$ 为有界可积, 据贝塞尔不等式立即得知当 $n \rightarrow \infty$ 时 $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ . 这里要讨论的是 $|f|$ 无界, 在 $I$ 上广义可积的情况.

$|f|$ 在 $I$ 上无界时, 其可积的定义在第十一章详细讨论. 现在如下规定它的意义: 对 $\forall$ 正数 $N$ , 定义

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当 } |f(x)| \leq N, \\ 0 & \text{当 } |f(x)| > N. \end{cases}$$



$|f(x)|$  可积指  $f_N(x)$  可积且  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)| dx$  存在, 并且定义

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)| dx.$$

由此, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  充分大的  $N$ , 使

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} [|f(x)| - |f_N(x)|] dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

既然  $|f_N(x)|$  以  $N$  为界, 由此导出

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)|^2 dx \leq N \int_{-\pi}^{\pi} |f_N(x)| dx \leq N \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

由贝塞尔不等式,  $f_N(x)$  的伏氏系数当  $n \rightarrow \infty$  时趋向于零, 即对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists n_0$ , 使当  $n > n_0$  便有

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \cos nx dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \sin nx dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是, 对  $\forall n > n_0$  及充分大的  $N$ , 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \right| &\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_N(x) \cos nx dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f_N(x)) \cos nx dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)| |\cos nx| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)| dx < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

同样可得  $\left| \int_{-x}^x f(x) \sin nx dx \right| < \varepsilon$ .

借助于黎曼—勒贝格引理，建立下面的收敛准则。

**定理10·5 (狄尼判别法)** 设  $f$  是标准化的以  $2\pi$  为周期的函数，且积分

$$\int_{-x}^x \left| \frac{f(x+u) - f(x+)}{\sin \frac{1}{2}u} \right| du, \\ \int_{-x}^x \left| \frac{f(x-u) - f(x-)}{\sin \frac{1}{2}u} \right| du. \quad (10 \cdot 15)$$

对于  $x$  的值存在。那么  $f$  的伏里叶级数在  $x$  点收敛于  $f(x)$ 。

**证明** 重复定理10·3直到 (10·14) 式的证明，得到定理10·3中的

$$S_n(x) - f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (g_1(x, u) \sin nu + g_2(x, u) \cos nu) du,$$

$$g_1(x, u) = \frac{f(x-u) - f(x-)}{2 \sin \frac{1}{2}u} \cos \frac{1}{2}u,$$

$$g_2(x, u) = \frac{1}{2} (f(x-u) - f(x-)).$$

由 (10.15) 的积分有限，对  $g_1$ ,  $g_2$  应用黎曼—勒贝格引理，可得  $n \rightarrow \infty$  时  $T_n(x) \rightarrow 0$ 。同理  $R_n(x) \rightarrow 0$ 。于是定理获证。

注 (i) 由于量  $\left| \frac{\sin \frac{u}{2}}{u} \right|$  是有界的, 条件 (10·15) 可以换成

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x+u) - f(x-)}{u} \right| du < +\infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(x-u) - f(x-)}{u} \right| du < +\infty. \quad (10·16)$$

(ii) 重要的是找出关于  $f$  自身的简单条件来代替难于验证的条件 (10·15) 或 (10·16). 例如当  $f$  具有有界导数的话, (10·16) 的积分以  $2\pi \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f'(x)|$  为界.

(iii) 称函数是罕尔德连续的  $\Leftrightarrow$  对  $\forall x, \exists$  常数  $M$  和  $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$  使

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y|^\alpha$$

对  $I = \{y : -\pi \leq y \leq \pi\}$  内的所有  $y$  都成立. 若  $f$  是罕尔德连续的, 那么 (10·16)

的积分以  $A \int_{-\pi}^{\pi} |u|^{\alpha-1} du$  ( $A$  是常数) 为界, 而  $\int_{-\pi}^{\pi} |u|^{\alpha-1} du$  存在. (参看 § 11·2). 因此罕尔德连续的函数满足条件 (10·16).

为了给出伏里叶级数可以逐项微分与积分的定理, 要用到如下的引理.

**引理10·2** 设  $f$  是以  $2\pi$  为周期分段光滑的函数, 那么它的伏氏系数  $a_n, b_n$ , 满足不等式:

$$|a_n| \leq \frac{c}{n}, \quad |b_n| \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

这里  $c$  是仅与  $f$  有关的常数.

**证明** 假设  $f$  的跃度 出现在下列各点  $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_i = \pi$ . 那么

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^r \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos nt dt.$$

用部分积分法得出

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^r \left[ \frac{f(t) \sin nt}{n} \right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^r \frac{1}{\pi} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t) \sin nt dt. \end{aligned}$$

因为 $f$ 和 $f'$ 是有界的, 立即得出 $a_n$ 的估计:

$$|a_n| \leq \frac{c}{n}. \text{ 同样可得 } |b_n| \leq \frac{c}{n}.$$

**推论** 设 $f$ 及它的前 $p-2$ 阶导数都是以 $2\pi$ 为周期的函数, 且 $f^{(p-1)}$ 是分段光滑的. 那么 $f$ 的伏里叶系数 $a_n, b_n$ 满足不等式

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^p}, \quad |b_n| \leq \frac{c}{n^p}, \quad n = 1, 2, \dots$$

这里 $c$ 不依赖于 $n$ .

为了证明推论, 按引理的方法重复 $p$ 次部分积分就行了. 推论说明函数具有更高阶的导数时, 它的伏氏级数收敛得越快.

**定理10.6** (伏里叶级数逐项微分的定理) 设 $f$ 处处连续且以 $2\pi$ 为周期,  $f'$ 分段光滑且是标准化的. 那么

(i) 把  $f$  的伏里叶级数逐项微分得到的级数在每一点收敛于  $f'(x)$ 。

(ii)  $f$  的伏里叶级数对所有  $x$  一致收敛于  $f(x)$ 。

**证明** 设  $f'$  的跃度出现在  $-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_{r-1} < x_r = \pi$ 。定义

$$g(x) = \int_{-\pi}^x f'(t) dt$$

并注意到  $g(x)$  连续, 且在  $x_{i-1} < x < x_i$  ( $i = 1, 2, \cdots, r$ ) 内  $g'(x) - f'(x) \equiv 0$ , 函数  $g - f$  在每个区间  $(x_{i-1}, x_i)$  内为常数, 那么由  $f, g$  连续,  $g - f$  恒等于常数。如以  $A_n, B_n$  表示  $f'$  的伏氏系数, 而  $f$  的伏氏系数为  $a_n, b_n$ , 按  $a_n$  的公式并用部分积分法

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^r \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) \cos nt dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^r \frac{f(x_i) \sin nx_i - f(x_{i-1}) \sin nx_{i-1}}{n} \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \sum_{i=1}^r \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t) \sin nt dt \\ &= \frac{-1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \sin nt dt = \frac{-B_n}{n}. \end{aligned}$$

上面等式中  $\sum_{i=1}^p \frac{f(x_i) \sin nx_i - f(x_{i-1}) \sin nx_{i-1}}{n}$

$$= \frac{1}{n} (f(\pi) \sin n\pi - f(-\pi) \sin(-n\pi)) = 0 \text{ 同理可得 } b_n = \frac{A_n}{n}.$$

逐项微分级数

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \sin nx + A_n \cos nx). \end{aligned}$$

上式右端是  $f'(x)$  的伏氏级数, 由定理 10.3, 它收敛于  $f'(x)$ .

(i) 的结论获证.

为了证明 (ii), 应用引理 10.2 的推论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq 2c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

由  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 所以  $f$  的伏里叶级数一致收敛, 并且还是绝

对一致收敛的.

**定理10·7** (伏里叶级数的逐项积分定理) 设 $f$ 是处处分段光滑以 $2\pi$ 为周期的函数。并设它的伏氏系数 $a_0 = 0$ ，定义

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f(x) dx.$$

那么 $F$ 的伏里叶级数除了常数项 $A_0$ 待定外，可由 $f$ 的伏里叶级数逐项积分得到。而 $A_0$ 由如下的积分确定：

$$A_0 = - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x) dx.$$

**证明** 为了使 $F$ 有 $2\pi$ 的周期，要求 $a_0 = 0$ 。由定理10·6可知 $F$ 与 $f$ 的伏里叶级数之间的关系是：除相差一常数外， $F$ 的伏氏级数是 $f$ 的伏氏级数的逐项积分。为了求 $A_0$ ，注意到

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_{-\pi}^x f(t) dt \right] dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[ \int_1^x dx \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - t) f(t) dt = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t f(t) dt. \end{aligned}$$

**注** (i) 若函数 $f$ 的伏氏系数 $a_0 \neq 0$ ，可以 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}a_0$ 代替 $f$ ，对 $g(x)$ 定理10·7是适用的。

(ii) 定理10·7不要求 $F'(x) = f(x)$ 的级数一致收敛，一般地说积分所得的级数的收敛速度比原级数的收敛速度快。

**例** 在§10·1的例1中，建立了展开式

$$f(x) = x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n},$$

$$x \in I = \{x : -\pi < x < \pi\}.$$

使用这一结果求函数  $F: x \rightarrow x^2$  在  $I$  上的伏里叶级数.

**解** 据狄尼判别准则,  $f, F$  在  $I$  上都能展开成伏氏级数. 显然  $a_0 = 0$ ,  $f$  是光滑的, 因此定理 10.7 适用. 令

$$F(x) = \int_{-\pi}^x 2t dt = x^2 - \pi^2,$$

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot 2t dt = -\frac{4}{3} \pi^2.$$

因此

$$x^2 - \pi^2 = -\frac{2}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2},$$

从而

$$x^2 = \frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}.$$

## 习 题

1. 求函数  $f: x \rightarrow \frac{1}{3}(\pi^2 x - x^3)$ ,  $x \in I = \{x : -\pi \leq x$



$\leq \pi$  的伏里叶级数, 并证明  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-6} = \frac{\pi^6}{945}$ .

2. 用定理10.7求  $f: x \rightarrow |x|$ ,  $x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  的伏里叶级数.

3. 求  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 - \pi x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ -\frac{1}{2}(x^2 + \pi x), & -\pi \leq x \leq 0. \end{cases}$  的伏里叶级数.

4. 用问题1的结果, 求  $f: x \rightarrow \frac{1}{12}(\pi^2 - x^2)^2$ ,  $x \in I = \{x: -\pi \leq x \leq \pi\}$  的伏里叶级数.

5. 求函数  $f$  和  $F$  的伏里叶级数

$$f: x \rightarrow |\sin x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

$$F: x \rightarrow \begin{cases} -1 + \cos x - \frac{2}{\pi}x, & x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x \leq 0\} \\ 1 - \cos x - \frac{2}{\pi}x, & x \in I_2 = \{x: 0 \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

6. 求  $f$  的伏里叶级数

$$f: x \rightarrow \begin{cases} -(\pi + x) & x \in I_1 = \{x: -\pi \leq x \leq -\frac{1}{2}\pi\}, \\ x & x \in I_2 = \{x: -\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi\}, \\ \pi - x & x \in I_3 = \{x: \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi\}. \end{cases}$$

7. 设 $f$ 是以 $2\pi$ 为周期的具有各阶连续导数的函数， $a_n$ ， $b_n$ 是 $f$ 的伏氏系数， $K$ 是一自然数，对于 $a_n n^K$ ，及 $b_n n^K$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时有何结论？

# 第十一章 积分所定义的函数

## § 11.1 积分所定义函数的导数

物理及工程学中出现的微分方程，它们的解往往是用积分给出的。这种解的积分表达式大都是被积函数无界或积分区域无界的情况，这时应当研究积分的收敛性并确定是否可以在积分号下进行微分。本节先研究被积函数或积分区间无界的情况，下两节分别研究被积函数、积分区间无界的情况。此外，应用压缩映象定理给出微分方程解的存在唯一性作为 § 11.4。

设  $f$  是定义在  $R_2$  内矩形  $R = \{ (x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d \}$  上的实值函数。在  $I = \{ x : a \leq x \leq b \}$  上定义函数

$$\varphi'(x) = \int_c^d f(x, t) dt, \quad (11.1)$$

在什么条件下能够在 (11.1) 式的积分号下进行微分，以求  $\varphi'(x)$ ？基本的结果由下面定理给出。

**定理11.1** (莱布尼兹法则) 设  $f$  与  $f_{,1}$  在矩形  $R$  上连续， $\varphi$  由 (11.1) 式定义。那么

$$\varphi'(x) = \int_c^d f_{,1}(x, t) dt, \quad a < x < b. \quad (11.2)$$

**证明** 构造  $\varphi$  的差商

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_c^d [f(x+h, t) - f(x, t)] dt,$$

注意到

$$f(x+h, t) - f(x, t) = \int_x^{x+h} f_{,1}(z, t) dz,$$

便有

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_c^d \left[ \int_x^{x+h} f_{,1}(z, t) dz \right] dt. \quad (11.3)$$

因为 $R$ 是有界闭集,  $f_{,1}$ 在 $R$ 上连续因而还是一致连续的。因此, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 对  $c \leq t \leq d$  中的任何  $t$ , 使当  $|z-x| < \delta$  的  $x, z$ , 都有

$$|f_{,1}(z, t) - f_{,1}(x, t)| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

现在用等式

$$\int_c^d f_{,1}(x, t) dt = \frac{1}{h} \int_c^d \int_x^{x+h} f_{,1}(x, t) dz dt. \quad (11.4)$$

这一等式的技巧所在是右端被积函数与 $z$ 无关。由 (11.3) 减去 (11.4) 得

$$\left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_c^d f_{,1}(x, t) dt \right|$$

$$= \left| \int_c^d \left\{ \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f_{,1}(z, t) - f_{,1}(x, t)] dz \right\} dt \right|. \quad (11.5)$$

如果  $|h|$  小到使 (11.5) 右端被积函数的  $|z - x| < \delta$ , 这时

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_c^d f_{,1}(x, t) dt \right| \\ & \leq \int_c^d \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{\varepsilon}{d-c} dz \right| dt = \frac{\varepsilon}{d-c} (d-c) = \varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  是任意的, 说明上面不等式的左端当  $h \rightarrow 0$  时趋向于零, 即 (11.2) 式成立.

当  $\varphi(x) = \int_c^d f(x, t) dt$  是  $x$  的显函数时, 可以直接对

$\varphi(x)$  求导数. 但是, 确有许多不能积分出来, 而  $f_{,1}$  能积分出来的情况. 下面例子说明这一点.

**例1** 设  $f: \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin xt}{t}, & \text{当 } t \neq 0, \\ x & \text{当 } t = 0. \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, t) dt, \text{ 求 } \varphi'(0).$$

**解** 我们有

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin xt}{t} = x \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin xt}{xt} = x,$$

因此 $f$ 在 $A = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$ 上连续.

而

$$f_{,1}(x, t) = \begin{cases} \cos xt, & \text{当 } t \neq 0, \\ 1, & \text{当 } t = 0, \end{cases}$$

也在 $A$ 上连续. 应用莱布尼兹法则

$$\varphi'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos xt \, dt = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}, \quad x \neq 0,$$

由此  $\varphi'(0) = \frac{\pi}{2}$ .

现在对莱布尼兹法则作如下的重要推广. 设 $f$ 定义如前, 令 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 及 $J = \{t : c \leq t \leq d\}$ ,  $h_0$ 及 $h_1$ 是定义在 $I$ 上值域为 $J$ 的函数. 假若  $\varphi : I \rightarrow R_1$  其定义为

$$\varphi(x) = \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x, t) \, dt,$$

现在来研究  $\varphi'$  的公式. 为此, 考察函数  $F : R_3 \rightarrow R_1$

$$F(x, y, z) = \int_y^z f(x, t) \, dt. \quad (11.6)$$

**定理11.2** 设 $f$ 与 $f_{,1}$ 在 $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ 上连续, 且 $F$ 由(11.6)式定义,  $x \in I, y \in J, z \in J$ . 那么

$$F_{,1} = \int_a^x f_{,1}(x,t) dt, \quad F_{,2} = -f(x,y),$$

$$F_{,3} = f(x,z). \quad (11.7)$$

**证明** (11.7) 中第一个公式由定理11.1便得。第二、第三个公式由微积分基本定理导出。

**定理11.3** (一般的莱布尼兹法则) 设  $f$  与  $f_{,1}$  都在  $R = \{(x,t) : a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$  上连续,  $h_1$  与  $h_2$  在  $I$  上具有一阶连续的导数。若  $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}_1$  的定义为

$$\varphi(x) = \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x,t) dt,$$

那么

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= f(x, h_1(x)) h_1'(x) - f(x, h_0(x)) h_0'(x) \\ &\quad + \int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f_{,1}(x,t) dt. \end{aligned} \quad (11.8)$$

**证明** 按 (11.6) 式定义  $F$ , 那么  $\varphi(x) = F(x, h_0(x), h_1(x))$ , 应用求导的链法则求得

$$\varphi'(x) = F_{,1} + F_{,2} h_0'(x) + F_{,3} h_1'(x).$$

现在把 (11.7) 的  $F_{,1}$ ,  $F_{,2}$  及  $F_{,3}$  的值代入上式, 并且代入  $y = h_0(x)$ ,  $z = h_1(x)$  就得出了 (11.8) 式。

**例2** 设  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{x^2} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{x^2}\right) dt$ , 求  $\varphi'$ 。

解 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{arctg} \frac{t}{x^2}) = - \frac{2tx}{t^2 + x^2}$$

用一般的莱布尼兹法则 (11.8), 得到

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg} 1) \cdot (2x) - \int_0^{x^2} \frac{2tx}{t^2 + x^2} dt,$$

令  $t = x^2 u$  代入右端积分, 有

$$\varphi'(x) = \frac{\pi x}{2} - x \int_0^1 \frac{2udu}{1+u^2} = x \left( \frac{\pi}{2} - \log 2 \right).$$

例3 设  $F: (x, y) \rightarrow \int_y^{\log x} \frac{\sin xt}{t(1+y)} dt$ , 求  $F_{,1}$

解 用一般的莱布尼兹法则 (11.8), 得到

$$\begin{aligned} F_{,1} &= \frac{\sin(x \log x)}{(1+y)(x \log x)} + \int_y^{\log x} \frac{\cos xt}{1+y} dt \\ &= \frac{\sin(x \log x)}{(1+y)(x \log x)} + \frac{\sin(x \log x)}{(1+y)x} - \frac{\sin xy}{(1+y)x}. \end{aligned}$$

## 习 题

习题1—12, 求  $\varphi'$ .



$$1. \quad \varphi : x \rightarrow \int_0^1 \frac{\sin xt}{1+t} dt.$$

$$2. \quad \varphi : x \rightarrow \int_1^2 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

$$3. \quad \varphi : x \rightarrow \int_0^1 f(x, t) dt,$$

$$f(x, t) = \begin{cases} (t^x - 1)/\log t, & \text{当 } t \neq 0, 1, \\ 0 & \text{当 } t = 0, \\ x & \text{当 } t = 1. \end{cases}$$

$$4. \quad \varphi : x \rightarrow \int_1^{x^2} \cos(t^2) dt.$$

$$5. \quad \varphi : x \rightarrow \int_{x^2}^x \sin(x, t) dt.$$

$$6. \quad \varphi : x \rightarrow \int_{x^2}^{e^x} \operatorname{tg}(xt) dt.$$

$$7. \quad \varphi : x \rightarrow \int_{\cos x}^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

$$8. \quad \varphi : x \rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos xt}{t} dt.$$

$$9. \quad \varphi : x \rightarrow \int_{x^2}^x \frac{\sin xt}{t} dt.$$

$$10. \quad \varphi: x \rightarrow \int_{x^m}^{x^{\frac{1}{m}}} \frac{dt}{x+t}.$$

$$11. \quad \varphi: x \rightarrow \int_0^1 \frac{xt}{\sqrt{1-x^2t^2}} dt, \quad |x| < 1.$$

$$12. \quad \varphi: x \rightarrow \int_0^\pi \log(1 - 2x \cos t + x^2) dt, \quad |x| < 1.$$

习题13—15计算偏导数。

$$13. \quad \varphi: (x, y) \rightarrow \int_y^{x^2} \frac{1}{t} e^{x^2} dt, \quad \text{计算 } \varphi_{,1}.$$

$$14. \quad \varphi: (x, z) \rightarrow \int_{z^2}^{x^2} f(x, t) dt,$$

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \sin^2(x, t), & t \neq 0, \\ 0, & t = 0; \end{cases}$$

求  $\varphi_{,1}$ 。

$$15. \quad \varphi: (x, y) \rightarrow \int_{x^2+y^2}^{x^2-y^2} (t^2 + 2x^2 - y^2) dt, \quad \text{求 } \varphi_{,2}.$$

16. 设  $m, n$  是正整数, 证明

$$\int_0^1 t^n (\log t)^m dt = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

〔提示: 对  $n$  求  $\int_0^1 x^n dx$  的导数并用归纳法〕

17. 设  $F(x, y) = \int_{h_2(x, y)}^{h_1(x, y)} f(x, y, t) dt$ . 求出  $F_{,1}, F_{,2}$  的公式.

18. 设方程

$$\int_{h_2(x, y)}^{h_1(x, y)} f(x, y, t) dt = 0$$

确定隐函数  $y = \varphi(x)$ . 求  $\varphi'$ .

## § 11.2 广义积分

假若函数  $f$  在半开区间  $I = \{x : a \leq x < b\}$  上有定义, 且对  $\forall c \in I$ , 积分

$$\int_a^c f(x) dx$$

存在. 我们关心的是  $f$  在  $b$  点邻域为无界的情况下, 如何定义积分  $\int_a^b f(x) dx$ . 例如, 函数  $f : x \rightarrow (1-x)^{-1}$ , 在它的定义域  $J = \{x : 0 \leq x < 1\}$  上无界, 对于  $c \in J$  有积分

$$\int_0^c (1-x)^{-1} dx = -\log(1-c).$$

当  $c \rightarrow 1^-$  时, 积分值趋向于正无穷. 另一方面, 对于  $J$  上定义  
的无界函数  $g : x \rightarrow (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ , 对  $c \in J$  求积分

$$\int_0^c (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = 2 - 2\sqrt{1-c},$$

当  $c \rightarrow 1^-$  时, 积分值有极限为 2.

**定义** 设对  $\forall c \in \{x: a \leq x < b\}$ ,  $f$  在区间  $[a, c]$  上可积, 如果

$$\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

存在, 则称积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛 否则称  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

若  $f$  在区间  $J = \{x: a \leq x \leq b\}$  上除去内点  $d$  的邻域之外是有界的, 如果

$$\lim_{c_1 \rightarrow d^-} \int_a^{c_1} f(x) dx, \quad \lim_{c_2 \rightarrow d^+} \int_{c_2}^b f(x) dx$$

都存在, 则称广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 否则称  $\int_a^b f(x) dx$  发散. 广义积分也称瑕分积.

区间上某点使函数在该点邻域内无界, 这种点称为瑕点. 如果函数在  $I$  上有几个瑕点, 可把  $I$  上的积分分解成每个积分仅有一个瑕点的积分, 当且仅当分解的各项的广义积分都收敛, 称积分在  $I$  上收敛, 否则称  $I$  上积分发散. 在广义积分收敛的情况下, 定义极限值为广义积分的值.

**例1** 证明  $\int_a^b (b-x)^{-p} dx$  及  $\int_a^b (x-a)^{-p} dx$ , 当  $p < 1$  时

收敛, 当  $p \geq 1$  时发散.

**解** 对于  $a < c < b$ ,  $p \neq 1$  有

$$\begin{aligned} \int_a^c (b-x)^{-p} dx &= \left[ \frac{-(b-x)^{1-p}}{1-p} \right]_a^c \\ &= \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{(b-c)^{1-p}}{1-p}. \end{aligned}$$

当  $p < 1$ , 上式右端在  $c \rightarrow b^-$  时以  $\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$  为极限. 而当

$p > 1$  时极限不存在; 当  $p = 1$  时上式右端成为  $\log(b-a) - \log(b-c)$ , 当  $c \rightarrow b^-$  时极限不存在.

对广义积分也有比较判别法, 象无穷级数那样比较判别法是判定积分敛散性的基本工具.

**定理 11.4 (比较判别法)** 设  $f$  在半开区间  $I = \{x : a \leq x < b\}$  上连续, 且  $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ , 对  $\forall x \in I$  成立. 那么当  $\int_a^b g(x) dx$  收敛时,  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

**证明** 首先假定对  $\forall x \in I$ ,  $f(x) \geq 0$ , 且定义

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

$F$  与  $G$  都是  $I$  上不减函数, 由  $\int_a^b g(x) dx$  收敛的条件, 可知当

$x \rightarrow b^-$ ,  $G(x)$  有极限  $M$ . 因为对  $\forall x \in I$ ,  $F(x) \leq G(x) \leq M$ . 由连续性公理 (§ 2.5), 当  $x \rightarrow b^-$ ,  $F(x)$  有极限存在, 即  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 且由  $F(x) \leq G(x) \leq M$ ,  $\int_a^b f(x) dx \leq M = \int_a^b g(x) dx$ .

如果  $f$  能取负值时, 定义

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

那么  $f_1, f_2$  在  $I$  上都是非负连续的, 且

$$f_1(x) + f_2(x) = |f(x)| \leq g(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = f(x).$$

由上面对非负情况的证明,  $\int_a^b f_1(x) dx, \int_a^b f_2(x) dx$  都收敛,

用和的极限定理可知  $\int_a^b |f(x)| dx$  及  $\int_a^b f(x) dx$  存在.

最后

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx \right| \\ &\leq \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

**定理11.5** 设 $f$ 与 $g$ 在半开区间 $I = \{x : a \leq x < b\}$ 上连续, 且对 $x \in I$ 有 $0 \leq g(x) \leq f(x)$ . 如果 $\int_a^b g(x) dx$ 发散, 那么 $\int_a^b f(x) dx$ 发散.

**证明** 若 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 按定理11.4,  $\int_a^b g(x) dx$ 应是收敛的, 导致矛盾, 因而定理11.5成立.

**例2** 判别 $\int_0^1 \frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}} dx$  ( $\beta > 0$ ) 的收敛性.

**解** 把 $f(x) = \frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}}$  与 $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 相比较,

$$\frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^\beta}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{x^\beta}{\sqrt{1+x}} g(x),$$

对于 $0 \leq x < 1$ 及 $\beta > 0$ 有 $0 < \frac{x^\beta}{\sqrt{1+x}} < 1$ , 因此 $|f(x)| \leq g(x)$ .

由例1知道  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$  是收敛的, 据定理11.4. 断定

$\int_0^1 \frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}} dx$  收敛.

现在讨论被积函数有界而积分区间无界的情况.

**定义** 设 $f$ 定义在区间 $I = \{x : a \leq x < +\infty\}$ 上, 且对

$\forall c \in I$ ,  $\int_a^c f(x) dx$  存在. 如果  $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$  存在, 则定义

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx,$$

这时称广义积分  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  收敛. 当极限不存在时, 称积分发散.

若  $f$  定义在  $J = \{x : -\infty < x < +\infty\}$  上, 研究  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  的广义积分. 设  $d \in J$ , 定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c_1 \rightarrow -\infty} \int_{c_1}^d f(x) dx + \lim_{c_2 \rightarrow +\infty} \int_d^{c_2} f(x) dx. \quad (11.9)$$

当且仅当右端两个极限都存在. 由  $f$  在  $J$  的每个有限区间上可积, 容易验证 (11.9) 的值与  $d$  的选取无关.

为了说明区间无限的广义积分定义, 我们证明

$$\int_a^{+\infty} x^{-p} dx \quad (a > 0)$$

当  $p > 1$  时收敛; 当  $p \leq 1$  时发散. 注意到  $p \neq 1$  时, 对  $\forall c > a$ ,

$$\int_a^c x^{-p} dx = \frac{1}{1-p} [c^{1-p} - a^{1-p}].$$

对  $p > 1$ , 当  $c \rightarrow +\infty$  时, 右端趋向于  $\frac{1}{p-1} a^{1-p}$ . 对  $p < 1$  极限



不存在。当  $p=1$  时右端成为  $\log \frac{c}{a}$ ，当  $c \rightarrow \infty$  时极限也不存在。同样地，积分

$$\int_{-\infty}^b |x|^{-p} dx \quad (b < 0)$$

当  $p < 1$  时收敛； $p \leq 1$  时发散。

对积分区间无限的广义积分也有类似于无界函数积分的比较判别法。

**推论** 若对  $\forall x \in \{x : a \leq x < +\infty\}$ ， $|f(x)| \leq g(x)$ ，且  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  收敛，那么  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ ， $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛。

若对  $\forall x \in \{x : a \leq x < +\infty\}$ ， $0 \leq g(x) \leq f(x)$ ，且  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  发散，那么  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散。

**例3** 判别  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx$  的敛散性。

**解** 对  $x \geq 1$ ，注意

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}} \geq \frac{\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2x},$$

而  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx$  发散，因此  $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}} dx$  发散。

**例4** 判别  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$  的敛散性。

**解** 考察  $A \equiv \int_0^c x e^{-x^2} dx$ , 且令  $u = x^2$ ,  $du = 2x dx$  则

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{c^2} e^{-u} du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-c^2},$$

当  $c \rightarrow +\infty$  时,  $A \rightarrow \frac{1}{2}$ .

因被积函数是奇函数, 有

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^0 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2},$$

因而  $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$  收敛。

被积函数无界, 积分区间也无界的情况, 可以联合定理 11.4 及推论来处理, 下面举例说明这种方法。

**例5** 判别  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  的敛散性。

**解** 被积函数在  $x=0$  邻域内无界, 把积分分解为两部分:

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{与} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

对  $0 < x \leq 1$ ,  $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$  而  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  收敛由比较判别法

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  收敛. 对  $1 \leq x$ ,  $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}$ , 而  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$

收敛于1, 由比较判别法  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  收敛. 综合起来可知

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  收敛.

## 习 题

习题1—12判别各积分的敛散性.

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x}}.$

2.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

3.  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

5.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

6.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx.$

7.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} dx.$

8.  $\int_0^{+\infty} \frac{(\arctg x)^2}{1+x^2} dx.$

9.  $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx.$

10.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$11. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx. \quad 12. \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx.$$

13. 证明  $\int_2^{+\infty} x^{-1} (\log x)^{-p} dx$ , 当  $p > 1$  时收敛, 当  $p \leq 1$  发散.

14. 设  $f$  在  $I = \{x : 1 \leq x < +\infty\}$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\log x)^2 f(x)$

$= A$ . 且  $A \neq 0$ . 证明  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  是收敛的.

### § 11.3 广义积分所定义的函数, $\Gamma$ 函数

首先来研究积分  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  的收敛性. 因为被积函数

在  $t = 0$  点邻域无界, 积分可分为两部分

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

且以  $I_1, I_2$  记右端两个积分. 对  $I_1$ , 当  $x > 0$ ,  $0 < t \leq 1$  时, 有

$$0 < t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1},$$

而积分  $\int_0^1 t^{x-1} dt$  对  $x > 0$  收敛, 因此  $I_1$  收敛. 对于第二个积分,

$I_2$ , 先把  $t^{x-1} e^{-t}$  写成  $t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} t^{-2}$ , 再估计函数  $f(t) = t^{x+1} e^{-t}$  在  $t \in \{t : 1 \leq t < +\infty\}$  上的界. 由  $f'(t) = t^x e^{-t} (x+1-t)$ ,  $t = x+1$  为  $f$  的唯一临界点, 且  $f$  在这一点取得最

大值  $f(x+1) = (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)}$ 。所以

$$I_2 = \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_1^{+\infty} (t^{x+1} e^{-t}) t^{-2} dt$$

$$\leq (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = (x+1)^{x+1} e^{-(x+1)}.$$

因此  $I_2$  对每一固定的  $x > -1$  收敛。综合起来, 对  $x > 0$  积分  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  收敛。

**定义** 称  $I = \{x : 0 < x < +\infty\}$  上的函数

$$x \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

为  $\Gamma$  函数。

$\Gamma$  函数的一个最重要的性质是

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x). \quad (11.10)$$

这一性质容易由部分积分法得出。事实上,

$$\int_0^c t^x e^{-t} dt = [t^x (e^{-t})] \Big|_0^c + x \int_0^c t^{x-1} e^{-t} dt,$$

令  $c \rightarrow +\infty$  便得 (11.10)。

而  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ , 因此对自然数  $n$  有

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n \cdot (n-1) \Gamma(n-1) = \cdots = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

这说明  $\Gamma$  函数是仅对自然数有定义的  $n!$  的推广。

为了对于广义积分建立类似如 § 11.1 那种在积分号下求导数的莱布尼兹法则，需要作更深入的研究。

设  $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t < d\}$  是一个不含“上”边的矩形。  $F: R \rightarrow R_1$  是连续的且对  $\forall x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$   $\lim_{t \rightarrow d-} F(x, t)$  存在，以  $f(x)$  表示这一极限。

**定义** 函数  $F(x, t)$  关于  $I$  当  $t \rightarrow d-$  时一致趋向于  $f(x)$   $\iff$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使对  $J_\delta = \{t : d - \delta < t < d\}$  内的  $t$  及所有  $I$  中的  $x$ , 都有

$$|F(x, t) - f(x)| < \varepsilon, \quad (11.11)$$

这里  $\delta$  仅依赖于  $\varepsilon$  而与  $x$  无关。我们也说当  $t \rightarrow d-$  时  $F$  一致收敛于  $f$ 。矩形  $R$  可换成无限带形  $S = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t < \infty\}$ , 一致极限 (即一致收敛) 修改成: 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$  仅与  $\varepsilon$  有关的  $T$  使 (11.11) 式对  $t > T$  及  $I$  内一切  $x$  都成立,  $T$  与  $x$  无关。

与无穷级数那里的情况一样，一致收敛性对于极限运算交换次序起着重要的作用。下面两个定理是关于广义积分莱布尼兹法则的基础。

**定理 11.6** 设  $F: R \rightarrow R_1$  对  $\forall t \in J = \{t : c \leq t < d\}$  在  $I$  上连续，且当  $t \rightarrow d-$  时， $F(x, t) \rightarrow \varphi(x)$  关于  $I$  是一致收敛的，那么  $\varphi$  在  $I$  上是连续的。若  $J$  是半开无穷区间  $\{t : c \leq t < +\infty\}$ ，当  $t \rightarrow +\infty$  时， $F(x, t) \rightarrow \varphi(x)$  关于  $I$  是一致收敛的，那么  $\varphi$  在  $I$  上是连续的。

**证明** 设  $x_1, x_2 \in I$ , 有

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leq |F(x_1, t) - \varphi(x_1)| + |F(x_2, t) -$$

$$-F(x_1, t)| + |F(x_2, t) \varphi(x_2)|.$$

由 $F$ 一致收敛于 $\varphi$ , 对 $\forall \varepsilon > 0$ , 当 $t$ 充分逼近于 $d$ , 上式右端第一项、第三项都可以小于 $\frac{\varepsilon}{3}$ , 而由 $F$ 的连续性假设, 当 $x_1, x_2$ 充分接近时, 第二项也小于 $\frac{\varepsilon}{3}$ . 因此 $\varphi$ 是连续的.

**定理11.7** 设定理11.6条件成立, 并且对 $\forall t \in J$ ,  $F, _1$ 在 $I$ 上连续. 如果 $F, _1(x, t) \rightarrow \psi(x)$ , 当 $t \rightarrow d-$ 或 $t \rightarrow +\infty$ , 关于 $I$ 收敛是一致的, 那么在 $I$ 上有

$$\varphi'(x) = \psi(x).$$

**证明** 设 $a$ 是 $I$ 的任一点, 那么 $\forall x \in I$ , 有

$$\int_a^x F, _1(\xi, t) d\xi = F(x, -t) - F(a, t).$$

因为 $F, _1$ 当 $t \rightarrow d-$ 时关于 $I$ 一致收敛于 $\psi(x)$ , 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists$ 与 $x$ 无关的 $\delta > 0$ , 使 $0 < d - t < \delta$ 都有

$$|\psi(\xi) - F, _1(\xi, t)| < \frac{\varepsilon}{|x - a| + 1}.$$

由此

$$\begin{aligned} \left| \int_a^x \psi(\xi) d\xi - \int_a^x F, _1(\xi, t) d\xi \right| &\leq \left| \int_a^x |\psi(\xi) - F, _1(\xi, t)| d\xi \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|x - a| + 1} |x - a| < \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\int_a^x \psi(\xi) d\xi = \lim_{t \rightarrow d-} \int_a^x F_{,1}(\xi, t) d\xi = \lim_{t \rightarrow d-} [F(x, t) - F(a, t)]$$

而由  $\varphi(x)$  定义上式最右端为  $\varphi(x) - \varphi(a)$ , 即

$$\int_a^x \psi(\xi) d\xi = \varphi(x) - \varphi(a).$$

由  $\psi(x)$  连续及微积分基本定理, 对上面等式求导数便得  $\psi(x) = \varphi'(x)$ .

下面关于广义积分的莱布尼兹法则是定理11·6与11·7的直接结果.

**定理11·8** 设  $f$  在  $R$  上连续, 定义

$$F(x, t) = \int_c^t f(x, \tau) d\tau.$$

如果对  $\forall x \in I$ , 广义积分  $\varphi(x) = \int_c^d f(x, \tau) d\tau$  存在, 且  $\lim_{t \rightarrow d-} F$

$(x, t) = \varphi(x)$  关于  $I$  是一致的, 那么  $\varphi$  在  $I$  上连续. 同样结果对  $J$  换成区间  $\{t : c \leq t < +\infty\}$  及  $t \rightarrow d-$  换成  $t \rightarrow +\infty$  成立.

注意到  $F(x, t)$  在  $R$  上连续,  $F(x, t)$  满足定理11·6的条件, 定理11·8的结论成立.

**定理11·9** (关于广义积分的莱布尼兹法则) 设定理11·8的条件成立, 且  $f_{,1}$  在  $R$  上连续. 如果当  $t \rightarrow d-$  (或  $t \rightarrow +\infty$ ),  $F_{,1}$  或对  $x$  一致收敛于  $\psi$ . 那么

$$\psi(x) = \varphi'(x) = \int_c^d f_{,1}(x, \tau) d\tau$$



$$(\text{或 } \psi(x) = \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} f_{,1}(x, \tau) d\tau).$$

**证明** 根据定理11.1, 对  $\forall t < d$  我们由莱布尼兹法则有

$$F_{,1}(x, t) = \int_0^t f_{,1}(x, \tau) d\tau.$$

由此据定理11.7便导出定理的结论.

**例1** 设  $\varphi: x \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t} dt$ . 证明当  $x > 0$ ,  $\varphi$  及  $\varphi'$  都是连续的并且

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-x^2 t} dt. \quad (11.12)$$

**解** 定义  $F(x, t) = \int_0^t e^{-x^2 s} ds = \frac{1 - e^{-x^2 t}}{x}$ .

因此

$$F_{,1}(x, t) = -\frac{1 - e^{-x^2 t} - xte^{-x^2 t}}{x^2}.$$

当  $t \rightarrow +\infty$ , 有  $F \rightarrow \frac{1}{x}$ ,  $F_{,1} \rightarrow -\frac{1}{x^2}$ . 为证明收敛是一致的, 注意对  $h > 0$ , 及满足  $x \geq h$  的所有  $x$ , 有

$$|F(x, t) - \frac{1}{x}| = \frac{e^{-x^2 t}}{x} < \frac{e^{-h^2 t}}{h},$$

$$|F_{,1}(x, t) - (-\frac{1}{x^2})| = \frac{e^{-x^2 t}(1 + xt)}{x^2} \leq \frac{e^{-h^2 t}(1 + ht)}{h^2}$$

于是对  $\forall h > 0$ , 在  $x \geq h$  的任何区间上收敛是一致的, 应用广义积分的莱布尼兹法则, 使得 (11.12) 成立.  $\varphi$  及  $\varphi'$  的连续性由定理 11.8 得到.

下一定理证明比较判别法, 当积分不能直接计算的情况下, 莱布尼兹法则仍然有效.

**定理 11.10** (i) 设  $f$  在矩形  $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t < d\}$  上连续, 且在  $R$  上  $|f(x, t)| \leq g(t)$ . 如果  $\int_c^d g(t) dt$  收敛, 那么广义积分

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, t) dt$$

对  $\forall x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$  都有定义, 并且  $\varphi(x)$  在  $I$  上连续.

(ii) 设  $f_1$  在  $R$  上连续, 且在  $R$  上  $|f_1(x, t)| \leq h(t)$ . 如果  $\int_c^d h(t) dt$  收敛, 那么对  $I$  的每一内点  $x$

$$\varphi'(x) = \int_c^d f_{1,1}(x, t) dt, \quad (11.13)$$

即莱布尼兹法则成立. 同样的结果对  $t \rightarrow +\infty$  代替  $t \rightarrow d-$  也成立.

**证明** (i) 由比较判别法导出  $\varphi(x)$  的存在性. 定义

$$F : (x, t) \rightarrow \int_c^t f(x, \tau) d\tau, \quad c \leq t < d.$$

那么

$$|\varphi(x) - F(x, t)| = \left| \int_1^d f(x, \tau) d\tau \right| \leq \int_1^d g(\tau) d\tau. \quad (11.14)$$

既然(11.14)右端积分收敛, 对 $\forall \varepsilon > 0$ , 当 $t$ 充分逼近于 $d$ 时,

有 $\left| \int_1^d g(\tau) d\tau \right| < \varepsilon$ . 所以当 $t \rightarrow d^-$ 时

$$|\varphi(x) - F(x, t)| \rightarrow 0$$

对 $I$ 上的一切 $x$ 一致地成立, 由此 $\varphi$ 是 $I$ 上的连续函数.

为了证明(ii), 注意到当 $t \rightarrow d^-$ 时,

$$\left| \int_1^d f_{,1}(x, \tau) d\tau \right| \leq \int_1^d h(t) dt \rightarrow 0$$

关于 $I$ 中的一切 $x$ 一致的收敛, 于是(11.13)成立.

**定义** 设 $f(x, t)$ 在 $R = \{(x, t) : a \leq x \leq b, c \leq t < d\}$ 上连续, 对 $(x, t) \in R$ 定义

$$F(x, t) = \int_c^t f(x, \tau) d\tau,$$

对 $x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$ , 定义

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, t) dt. \quad (11.15)$$

如果当 $t \rightarrow d^-$ ,  $F(x, t) \rightarrow \varphi(x)$ 对 $I$ 上的 $x$ 一致收敛, 称广义积分(11.15)关于 $I$ 对 $x$ 一致收敛. 同样的定义对 $d = +\infty$ 也适用.

## 例2 证明广义积分

$$\varphi(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2 + t^2} dt \quad (11.16)$$

对  $-\infty < x < +\infty$  一致收敛。

解 对所有  $x$  及  $t \geq 1$ , 有

$$\left| \frac{\sin x}{x^2 + t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}.$$

因为  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  收敛, 应用定理 11.10 断定 (11.16) 的广义积分一致收敛。

## 例3 设积分

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-t}}{t} dt, \quad (11.17)$$

$I = \{x : a \leq x \leq b\}$  且  $a > 0$ . 证明 (11.17) 的积分及被积函数对  $x$  的导函数的积分关于  $I$  对  $x$  一致收敛, 并计算  $\varphi'(x)$  及  $\varphi(x)$ 。

解 令  $f(x, t) = (e^{-xt} - e^{-t}) \frac{1}{t}$ , 求得

$$f_{,1}(x, t) = -e^{-xt}, \quad |f_{,1}(x, t)| \leq e^{-ht}$$

$$(h = \min \{a, 1\}).$$

视  $f$  为  $x$  的函数应用微分中值定理得出:

$$\left| \frac{e^{-x\xi} - e^{-\xi}}{t} \right| = e^{-\xi} |1-x|, \text{ 对 } 0 \leq \xi < 1.$$

这里 $\xi$ 介于1与 $x$ 之间。而对 $t \geq 1$ 也有

$$\left| \frac{e^{-x\xi} - e^{-\xi}}{t} \right| \leq e^{-\xi}$$

所以积分 (11.17) 及积分

$$\int_0^{+\infty} f_{,1}(x,t) dt$$

关于 $I$ 对 $x$ 一致收敛。用莱布尼兹法则可得

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-x\xi} d\xi = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left. \frac{e^{-x\xi}}{x} \right|_0^t = -\frac{1}{x}.$$

积分  $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$ , 得到  $\varphi(x) = c - \log x$ . 为确定常数 $c$ ,

从  $\varphi(1) = c - \log 1 = c$  及

$$\varphi(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\xi} - e^{-\xi}}{t} dt = 0$$

得 $c=0$ , 因而  $\varphi(x) = -\log x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\xi} - e^{-\xi}}{t} dt$ .

## 习 题

习题1—8证明由积分所定义的  $\varphi$  及  $\varphi'$  关于给定区间一致收敛, 并按莱布尼兹法则求  $\varphi'$ .

1.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt, I = \{x : 0 < a \leq x \leq b\}$
2.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} e^{xt} dt, I = \{x : -A \leq x \leq A\}.$
3.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2} dt, I = \{x : -A \leq x \leq A\}.$
4.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt, I = \{x : 0 \leq x \leq a\}.$
5.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{-1} \sin(xt) (\log t) dt, I = \{x : -a \leq x \leq a\}$
6.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^1 \frac{(\log t)^2}{1+xt} dt, I = \{x : -1 < a \leq x \leq b\}.$
7.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{(1+xt)\sqrt{1-t}}, I = \{x : -a \leq x \leq a\}.$
8.  $\varphi : x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t(1+t^2)} dt, I = \{x : -a \leq x \leq a\}.$
9. 用  $\int_0^1 t^x dt = (x+1)^{-1}, x > -1$  来导出

$$\int_0^1 t^x (-\log t)^m dt = \frac{m!}{(x+1)^{m+1}}, x > -1.$$

10. 用  $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ ,  $0 < x < 1$ , 证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} \log t}{1+t} dt = \frac{-\pi^2 \cos \pi x}{\cos^2 \pi x}.$$

11. 验证  $\frac{d^n}{dx^n} \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\log t)^n e^{-t} dt$ .

12. 设  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} (1+t)^{-1} e^{-xt} dt$ ,

$$\text{证明 } \varphi(x) - \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$$

13. 设  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ , 证明  $\varphi(x) + \varphi''(x) = \frac{1}{x}$ .

14. 设  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t} (1 - \cos xt) dt$ , 求  $\varphi'$ , 并求  $\varphi$  的

显式.

15. 设  $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t} dt$ ,

$$x \in I = \{x : -1 < x < +\infty\}.$$

求  $\varphi'$ , 并求  $\varphi$  的显式.

16. 设  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} t^{-2} e^{-t} (1 - \cos xt) dt$ , 求  $\varphi'$ ,  $\varphi''$ , 并求

出  $\varphi'$  及  $\varphi$  的显式。论证这一过程。

17. 验证  $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$  并证明

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = (-1)^n n! x^{-n-1},$$

$x > 0$ .

18. 验证等式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + x} = \frac{1}{2} \pi x^{-\frac{1}{2}}.$$

并证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + x)^{n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} x^{-n-\frac{1}{2}}.$$

19. 设勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2(1-x^2)} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2 t^2}) dt,$$

证明

$$x \frac{d}{dx} P_n(x) - \frac{d}{dx} P_{n-1}(x) = n P_n(x).$$

#### § 11.4 微分方程解的存在唯一性定理

设  $D$  是  $\mathbf{R}_2$  内的开集,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}_1$  的连续函数。我们来研



## 究一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (11.18)$$

在 $D$ 内的解的存在性问题.

**定义** 设 $P(x_0, y_0) \in D$ , 称函数 $y = \varphi(x)$ 是(11.18)的初始值问题的解 $\iff$ 在 $x$ 的某一区间 $I = \{x : x_0 - h < x < x_0 + h\}$ 上有 $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ , 且 $\varphi$ 满足初始条件 $\varphi(x_0) = y_0$ .

下面引理把解微分方程的初始值问题化成解一个积分方程的问题.

**引理11.1** 设 $f : D \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是连续的,  $\varphi$ 是定义在 $I = \{x : x_0 - h < x < x_0 + h\}$ 上的实值连续函数,  $(x_0, y_0) \in D$ 且 $\varphi(x_0) = y_0$ . 那么  $\varphi$ 是微分方程

$$\frac{d\varphi}{dx} = f[x, \varphi(x)] \quad (11.19)$$

解的必要充分条件是在 $I$ 上  $\varphi$ 满足积分方程

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \quad x \in I. \quad (11.20)$$

**证明** 把(11.19)从 $x_0$ 到 $x$ 积分便得(11.20). 由微积分基本定理将(11.20)关于 $x$ 求导便得(11.19).

如果把(11.20)的右端看作把连续函数 $\varphi$ 映象为 $T\varphi = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$ , 即 $C(I) \rightarrow C(I)$ 的映象 $T$ , 那么积分方程(11.20)的解 $\varphi$ 恰好是 $T$ 的不动点. 我们将证明在 $f$ 满足一

定条件之下,  $T$ 是完备距离空间 $C(I)$ 内的压缩映象, 根据不动点定理 (定理6·46)得到(11·20)解的存在唯一性, 并且解总可由迭代法逐次逼近. 为此引进完备的距离空间 $C(S)$ .

**定义** 设 $S$ 是距离空间, 若以 $C(S)$ 表示定义在 $S$ 上的有界连续实值函数组成的集合. 对于 $f, g \in C(S)$ , 定义 $f, g$ 间的距离为

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)| \quad (11 \cdot 21)$$

容易验证在这距离之下 $C(S)$ 是一距离空间, 并仍以表 $C(S)$ 表示.

**定理11·11** 设 $\{f_n\}$ 是 $C(S)$ 的序列. 那么当 $n \rightarrow +\infty$ 时,  $f_n \rightarrow f, f \in C(S) \iff f_n$ 在 $n \rightarrow \infty$ 时在 $S$ 上一致收敛于 $f$ .

**证明** 据 $f_n$ 在 $S$ 上一致收敛于 $f$ 的定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 自然数 $n_0$ , 使当 $n > n_0$ 及 $S$ 中一切 $x$ , 都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此  $\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$  对 $n \geq n_0$ 成立. 依 $C(S)$ 中距离的定义, 就是 $n \rightarrow \infty$ 时,  $d(f_n, f) \rightarrow 0$ . 把上述步骤倒过来便得: 在 $C(S)$ 中若 $f_n \rightarrow f$ , 那么 $f_n$ 在 $S$ 上一致收敛于 $f$ .

由定理11·11及距离空间完备性定义, 容易证明下面两个定理, 它们的细节留给读者.

**定理11·12**  $C(S)$ 是完备距离空间.

**定理11·13** 完备距离空间的闭子集作为距离空间是完备的.

**注** 设 $S$ 是距离空间,  $f: S \rightarrow \mathbf{R}_N, g: S \rightarrow \mathbf{R}_N$ 是 $S$ 上的有界连续矢值函数,

是指  $f=(f_1, f_2, \dots, f_N)$   $g=(g_1, g_2, \dots, g_N)$  的  $f_i, g_i$  都属于  $C(S)$ . 定义

$$|f(x)-g(x)|=\left(\sum_{i=1}^N|f_i(x)-g_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{及 } d(f, g)=\sup_{x \in S}|f(x)-g(x)|.$$

$S$  上的一切有界连续矢值函数  $f$  组成一完备的距离空间, 记之为  $C_N(S)$ .

**定义** 设  $F$  是定义在  $R_1$  的集  $S$  上的实值函数, 称  $F$  在  $S$  上满足李布希兹条件  $\iff$  存在常数  $M$ , 使

$$|F(x_1)-F(x_2)| \leq M|x_1-x_2| \quad (11.22)$$

对  $S$  中的任何  $x_1, x_2$  成立. (11.22) 式中  $M$  的最小数叫作李布希兹常数.

如果定义在区间  $I$  上的函数  $F$ , 在  $I$  上导函数有界, 按微分中值定理, 对任意  $x_1, x_2 \in I$ , 有  $|F(x_2)-F(x_1)| \leq |F'(\xi)| |x_2-x_1|$ ,  $\xi$  是介于  $x_1, x_2$  之间的某一点, 由  $F'(x)$  在  $I$  上有界, (11.22) 显然成立. 另一方面确有满足李布希兹条件但不可微的函数. 如函数的图象由联结若干直线段所组成就是这种函数.

**定理 11.14** 设  $f$  是闭矩形  $R = \{(x, y) : |x-x_0| \leq h, |y-y_0| \leq K\}$  上连续的函数, 以  $M_0$  记  $\max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$ . 且  $f$

关于  $y$  满足李布希兹条件:

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leq M_1|y_1-y_2|,$$

这里  $(x, y_1), (x, y_2)$  都是  $R$  中的点. 那么对使  $M_0 h \leq K$  及  $0 < M_1 h < 1$  的  $h$ , 在区间  $I = \{x : x_0 - h < x < x_0 + h\}$  上存在唯一的连续可微函数  $\varphi$ , 满足  $\varphi(x_0) = y_0$ ,  $|\varphi(x) - y_0| < K$

及  $\frac{d\varphi}{dx} = f[x, \varphi(x)]$ .

**证明** 根据引理11.1, 若能求出下列积分方程

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \quad (11.23)$$

的解  $\varphi(x)$ , 且当  $x \in I$  满足  $|\varphi(x) - y_0| \leq K$ , 定理便被证明.

设  $C(I)$  是  $I$  上有界连续函数构成的距离空间, 且令  $E$  是  $C(I)$  中满足  $|\varphi - y_0| \leq K$  的子集. 如果  $\{\varphi_n\} \subset E$ , 且  $\varphi_n$  收敛于  $\varphi$ ,  $\varphi \in C(I)$ , 那么由

$$|\varphi - y_0| \leq |\varphi - \varphi_n| + |\varphi_n - y_0|$$

表明  $|\varphi - y_0| \leq K$ , 即  $\varphi \in E$ . 于是  $E$  是  $C(I)$  的闭子集. 根据定理11.12及定理11.13可知,  $E$  是完备距离空间. 定义  $E$  上的映象  $T$ : 对于  $\varphi \in E$ ,

$$T(\varphi) = \psi, \text{ 这里 } \psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt, \quad x \in I.$$

有  $\psi(x) \in C(I)$  且

$$|\psi(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f[t, \varphi(t)] dt \right| \leq M_0 |x - x_0|$$

$$< M_0 h \leq K.$$

即  $\psi \in E$ ,  $T$  是  $E \rightarrow E$  的映象. 现在来证明  $T$  是压缩映象. 设  $\varphi_1, \varphi_2 \in E$ ,  $T(\varphi_1) = \psi_1, T(\varphi_2) = \psi_2$ , 由  $f$  满足李布希兹

条件有

$$|\psi_2(x) - \psi_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x \{ f[t, \psi_2(t)] - f[t, \psi_1(t)] \} dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x M_1 |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| dt \right| \leq M_1 h d(\varphi_2, \varphi_1).$$

因此  $d(\psi_2, \psi_1) \leq M_1 h d(\varphi_2, \varphi_1)$ , 由  $M_1 h < 1$ ,  $T$  是压缩映象. 据不动点定理(定理6·46),  $T$  存在唯一不动点  $\varphi \in E$ . 即方程(11·23)存在唯一的解  $\varphi$ .

注 (i) 由不动点定理,  $\varphi$  可取  $E$  中任一满足初始条件者, 按  $T\varphi_{n-1} = \varphi_n, n=1, 2, \dots$ , 得到  $\varphi$  的逐次逼近的序列  $\{\varphi_n\}$ ,  $\varphi_n$  在  $I$  上一致收敛于  $\varphi$ .

(ii) 若  $f$  是定义在  $R_2$  内的连通开集  $D$  上, 定理11·14对  $D$  的任何一点都有以该点为中心的矩形, 在这小矩形上, 定理的条件成立. 那么先求出以  $(x_0, y_0)$  为中心的小矩形内方程的解, 于这一解曲线上取另一点  $(x_1, y_1)$ , 在以  $(x_1, y_1)$  为中心的矩形内解  $\varphi(x_1) = y_1$  的初值问题. 由解的唯一性, 在两小矩形重叠部分两个解重合, 重复这一步骤逐渐把局部的解延拓, 得到贯穿整个  $D$  内的初值问题的解(图11·1).

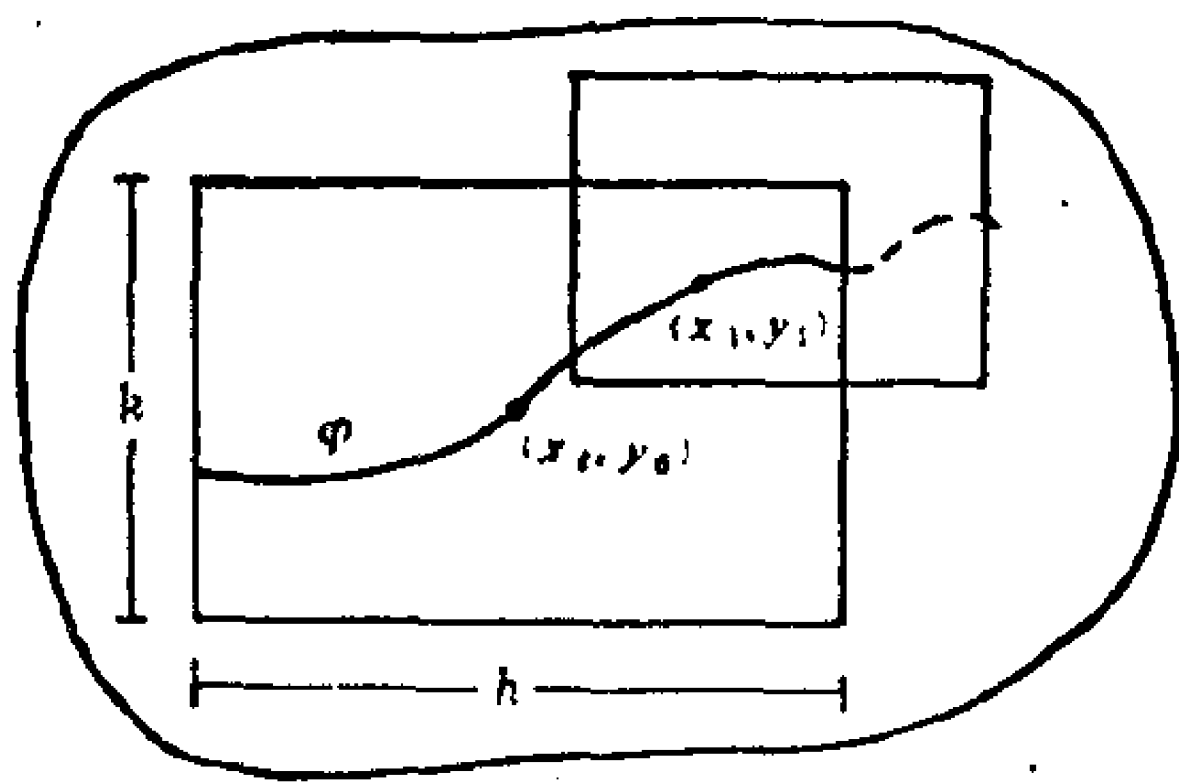


图 11·1

定理11·14可推广为关于方程组的定理. 设  $f_i$  是  $R_{N+1}$  中开集  $D$  上连续的函数, 方程组为

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_N), i = 1, 2, \dots, N, (11 \cdot 24) \\ y_{i0} = y_i(x_0), (x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{N0}) \in D \end{cases}$$

若 $f_i$ 对每个 $y_i$ 满足李布希兹条件, 那么研究从 $I$ 到 $\mathbf{R}_N$ 内的映象 $x \rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_N)$ . 以 $C_N(I)$ 代替定理11·14中的 $C(I)$ , 定义 $C_N(I) \rightarrow C_N(I)$ 的映象 $T$ , 对 $C_N(I)$ 中的 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ ,  $T\varphi = \psi$ ,  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ , 而 $\psi_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^x f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t))dt$ . 在以 $x_0$ 为中心的充分小的 $I$ 上,

$T$ 是 $C_N(I) \rightarrow C_N(I)$ 的压缩映象, 由不动点定理, 方程组初值问题(11·24)的解存在、唯一.

如果定理11·14中, 仅假定 $f$ 连续而不要求李布希兹条件成立的话, 那么初值问题的解可能不唯一. 例如方程

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$$

在包含 $(0, 0)$ 点的开集内 $y = \varphi_1(x) \equiv 0$ , 及 $y = \varphi_2(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 都是初值问题的解. 容易看出 $f(x, y) = y^{\frac{1}{3}}$ 在 $(0, 0)$ 点邻域内关于 $y$ 不满足李布希兹条件.

## 习 题

1. 设 $S$ 是距离空间, 证明 $C(S)$ 是完备的距离空间(定理11·12).
2. 设 $A$ 是完备距离空间 $S$ 的闭子集, 证明 $A$ 作为距离空间是

完备的 (定理11·13) .

3. 以 $C_N(S)$ 代替定理11·11中的 $C(S)$ , 对于 $C_N(S)$ 证明这一定理.
4. 研究积分方程

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy$$

这里 $\lambda$ 是常数,  $g$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上连续,  $K$ 在方形 $S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ 上连续. 定义映象

$$\psi = T \varphi \equiv g(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy.$$

用不动点定理证明: 对充分小的 $\lambda$ , 积分方程存在唯一的解.

5. 设初值问题:  $\frac{dx}{dx} = x^2 + y^2$ ,  $\varphi(0) = 1$ . 用化为积分方程及逐次逼近的方法求 $y = \varphi(x)$ 的近似序列的前六项.
6. 写出定理11·14证明中集 $E$ 是 $C(I)$ 的闭集的完整的证明.
7. 研究方程组  $\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N)$   $i = 1, 2, \dots, N$ . 对方程组叙述并证明类似于引理11·1的命题.
8. 对方程组叙述并证明类似于定理11·14的定理.

## 第十二章 有界变差函数与 黎曼—斯蒂阶斯积分

### § 12.1 有界变差函数

前些章研究了单变量、多变量函数的基本性质：连续性、可微性、解析性、可积性等。在物理以及应用问题中需要研究函数的另外的性质。拿最简单的  $\mathbb{R}_1 \rightarrow \mathbb{R}_1$  的函数来说，如何量度一个函数取值的“振动”特性，在实际中就很有意义，而这种特性不容易由连续性及可微性来确定。为了描述函数的这种性质，引进变差的概念。这一概念起源于物理问题、工程学、概率论、伏里叶级数等的需要。本节介绍有界变差函数类，在 § 12.2 用有界变差函数定义比黎曼积分更广泛的积分概念。

**定义** 设  $f$  是定义在区间  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上的实函数， $f$  在  $I$  上的变差表示为  $V_a^b f$ ，其定义为

$$V_a^b f = \sup \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

这里上确界是对  $I$  的所有划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  取的。如果  $V_a^b f$  是一有限数，称  $f$  在  $I$  上是有界变差函数，否则记为  $V_a^b f = +\infty$ 。



先来研究变差的基本性质. 如果给定函数 $f$ , 那么 $V_a^b f$ 仅依赖于区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ . 下面定理给出变差关于区间具有可加性, 这一结果类似于积分的区间可加性 (定理5.3(d)).

**定理12.1** 设给定 $f : I \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $c \in I$ . 那么

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f. \quad (12.1)$$

首先证明 $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$ . 不妨假设右端两项都是有限数. 设 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $I$ 的任意划分. 再加上分点 $C$ , 例如 $C$ 在 $x_{k-1}, x_k$ 之间, 构成划分 $\Delta'$ . 那么

$$\sum_{i=1}^{k-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_{k-1})| \leq V_a^c f,$$

$$\sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(x_k) - f(c)| \leq V_c^b f,$$

且由  $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq |f(x_k) - f(c)| + |f(c) - f(x_{k-1})|$ , 导出

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq V_a^c f + V_c^b f.$$

既然划分 $\Delta$ 是任意的, 便得 $V_a^b f \leq V_a^c f + V_c^b f$ .

再来证明 $V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f$ . 若 $V_a^b f = +\infty$ , 不等式显然. 若 $V_a^c f = +\infty$ , 对任一正数 $N$ ,  $\exists$  划分  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k$

$= c$ , 使  $\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| > N$ . 那么 $a = x_0 < x_1 < \cdots <$

$x_k < x_{k+1} = b$  是  $I$  的一个划分, 便有

$$V_a^b f \geq \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_k)| < N.$$

由  $N$  的任意性,  $V_a^b f = +\infty$ . 同理当  $V_a^b f = +\infty$ , 也有  $V_a^b f = +\infty$ . 这样, 可以假定  $V_a^c f$  与  $V_c^b f$  都有限. 现对  $\forall \varepsilon > 0$ , 按上确界的定义,  $\exists$  一划分

$$\Delta_1: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$$

使

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

同理  $\exists$  一划分

$$\Delta_2: c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

使

$$\sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$V_a^b f \geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^c f + V_c^b f - \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 有  $V_a^b f \geq V_a^c f + V_c^b f$ .

**例1** 设函数  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ , 当  $0 < x \leq 1$ ;  $f(0) = 0$ . 证

明  $V_0^1 f = +\infty$ .

**解** 选取特殊的划分  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{2}{(2n+1)}$ ,

$x_2 = \frac{2}{2n-1}$ , ...,  $x_n = \frac{2}{3}$ ,  $x_{n+1} = 1$ . 那么对  $\forall i$ ,  $2 \leq i$

$\leq n$ ,  $|f(x_i) - f(x_{i-1})| = 2$ ,  $|f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_{n+1})$

$- f(x_n)| = 1$ , 所以  $V_0^1 f \geq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 2n$ . 因

为  $n$  可以任意大, 所以  $V_0^1 f = +\infty$ .

**例2** 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续,  $f'$  在  $I$  上有界. 证明  $f$  是有界变差函数.

**解** 设对  $x \in I$ ,  $|f'(x)| \leq M$ , 应用微分中值定理, 当  $x_k, x_{k-1} \in I$ , 有

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M |x_k - x_{k-1}|.$$

因此对任意划分  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ,

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M \sum_{k=1}^n |x_k - x_{k-1}| = M(b-a),$$

所以  $V_a^b f \leq M(b-a)$ .

把上例  $f'$  在  $I$  上有界, 降低为  $f$  满足李布希兹条件:

$|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M |x_k - x_{k-1}|$ , 仍有  $V_a^b f \leq M(b-a)$ .

这就表明有界变差函数类比导数有界的函数类, 比满足李布

希兹条件的函数类都要广泛。事实上，当函数在 $I$ 上具有单调性，函数在 $I$ 上就是有界变差函数。

**例3** 设 $f$ 是 $I$ 上的递增函数，证明 $V_a^b f = f(b) - f(a)$ 。

**证明** 对于任一划分 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ ，有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n) \\ &- f(x_0) = f(b) - f(a), \end{aligned}$$

于是 $V_a^b f = f(b) - f(a)$ 。

为了建立单调函数与有界变差函数的关系，给出下面引理。

**引理12.1** 设 $f$ 是 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上的函数，且定义 $\varphi(x) = V_a^x f$ 。如果 $x_1, x_2 \in I, x_1 \leq x_2$ ，那么 $V_{x_1}^{x_2} f = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$ ，且 $V_{x_1}^{x_2} f \geq |f(x_2) - f(x_1)|$ ，函数 $\varphi(x)$ 是不减的。

引理容易由有界变差函数的定义及定理12.1导出。

**定理12.2** 设 $f$ 是 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上有界变差函数。如果 $f$ 在 $b$ 点左连续，那么 $\varphi(x) = V_a^x f$ 在 $b$ 点左连续。同样，如果 $f$ 在 $a$ 点右连续，那么 $\varphi$ 在 $a$ 点也右连续。 $f$ 在 $I$ 的任一连续点也是 $\varphi$ 的连续点。

**证明** 仅需证明第一个判断，余者类似。对 $\forall \varepsilon > 0$ ，  
 $\exists$  划分 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ，使

$$V_a^b f < \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \quad (12.2)$$

因为 $f$ 在 $b$ 点左连续, 必要时可以在 $b$ 点邻域增加新的分点, 可以认为 $|f(x_n) - f(x_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 由引理12.1, 对于 $x_{n-1} \leq x \leq b$ 的 $x$ , 有

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\geq \varphi(x_{n-1}) = V_a^{x_{n-1}} f \geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &> \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| - \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

把(12.2)式代入得到

$$\varphi(x) > V_a^b f - \varepsilon = \varphi(b) - \varepsilon,$$

由 $\varepsilon$ 是任意的而 $\varphi$ 不减, 所以 $\varphi$ 在 $b$ 点左连续.

下面定理指出了单调函数和有界变差函数的关系.

**定理12.3** 设 $f$ 是 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上的有界变差函数, 那么存在 $I$ 上不减函数 $g$ 与 $h$ , 使 $x \in I$ , 有

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad (12.3)$$

且

$$V_a^x f = g(x) + h(x) - f(a).$$

如果 $f$ 在 $c \in I$ 左(或右)连续, 那么 $g$ 及 $h$ 在 $c$ 点左(或右)连续.

**证明** 选取

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{1}{2} \left[ f(a) + V_a^x f + f(x) \right], \quad h(x) = \frac{1}{2} \left[ f(a) + V_a^x f \right. \\ &\quad \left. - f(x) \right].\end{aligned} \quad (12.4)$$

注意到  $x_1, x_2 \in I$ ,  $x_1 < x_2$  时,  $g(x_2) - g(x_1) = V_{x_1}^{x_2} f + f(x_2) - f(x_1)$ , 由引理 12.1. 有  $V_{x_1}^{x_2} f \geq |f(x_2) - f(x_1)|$ , 因此  $g(x_2) \geq g(x_1)$ . 同样可证  $h(x)$  是不减的.

设  $f$  在  $c$  点左 (或右) 连续, 由定理 12.2.  $\varphi(x) = V_x^c f$  在  $c$  点也左 (或右) 连续, 因而  $g, h$  在  $c$  点左 (或右) 连续.

注 由 (12.3) 及 (12.4) 给出的  $f$  的分解不是唯一的. 设  $\psi$  是  $I$  上任意的不减函数, 也有分解  $f = (g + \psi) - (h + \psi)$ . 当  $\psi$  是严格递增函数, 这一  $f$  的分解是两个严格递增函数的差.

**定理 12.4** 若  $f$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上的不减函数, 那么  $f$  的间断点至多是一可数集 (这一结果曾在 § 6.3 中叙述为定理 6.16).

**证明** 对  $\forall c \in I$ , 由函数单调性  $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$  都存在 (参看定理 3.7). 又  $f$  不减显然  $f(c^+) \geq f(c^-)$ . 定义集  $E_k = \{x : x \in I, f(x^+) - f(x^-) \geq k > 0\}$ ,  $k$  是任一正实数, 因为  $f$  是有界单调函数,  $E_k$  只能是有限点集. 集

$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\frac{1}{2^i}}$  是可数集, 而  $E$  包含了  $f$  的所有间断点.

**推论** 若  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上是有界变差函数, 那么  $f$  在  $I$  中的间断点至多组成一可数集.

证明在区间上变差一致有界的函数列存在收敛子列的赫利定理 (定理 12.7), 要用到选取收敛子列的著名的“康托对角线过程”. “对角线过程”是分析中应用广泛的一个重

要方法。虽然这里仅对区间上函数序列应用它，我们仍然给出它的相当一般化的形式。

**定理12.5** (康托对角线过程) 设  $X$  与  $Y$  是距离空间的集， $Y$  是紧的。  $f_n, n = 1, 2, \dots$ , 是给定的  $X \rightarrow Y$  的映象。  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  是  $X$  的可数子集，那么存在  $\{f_n\}$  的子列  $\{g_n\}$ ，  $\{g_n\}$  在  $S$  的每个点都收敛。

**证明** 因为  $Y$  是距离空间的紧集，序列  $\{f_n(x_1)\}$  存在收敛的子列  $\{f_{1n}(x_1)\}$ ，且设  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{1n}(x_1) = y_1 \in Y$ 。序列  $\{f_{1n}(x_2)\}$  含于  $Y$  内，它有收敛子列，记之为  $\{f_{2n}(x_2)\}$ ，且设  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}(x_2) = y_2 \in Y$ 。注意  $\{f_{2n}\}$  是  $\{f_{1n}\}$  的子列，所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{2n}(x_1) = y_1$ 。继续这一过程得到子序列  $\{f_{kn}\}$ ，分别在  $x_1, x_2, \dots, x_k$  各点上收敛于  $y_1, y_2, \dots, y_k$ 。

现在考察对角线序列  $\{f_{nn}\}$ ，对  $\forall p, x_p \in S, f_{pn}(x_p)$  收敛，对于  $m > p, \{f_{mn}\}$  是  $\{f_{pn}\}$  的子序列，因而  $\{f_{nn}\}$  在  $x_p$  点收敛。取  $g_n = f_{nn}$ ，便得所需的结果，即  $\{g_n\}$  在  $S$  的每个点上收敛。

下一定理说明单调的函数列  $\{f_n\}$  在  $I$  的稠密集上收敛于  $f$ ，那么在  $f$  的每个连续点处  $f_n$  收敛于  $f$ 。

**定理12.6** 设  $f$  及  $f_n, n = 1, 2, \dots$ , 都是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上的不减函数，而  $S$  是  $I$  内的一个稠密集，对  $\forall x \in S$  都有  $f_n(x) \rightarrow f(x) (n \rightarrow \infty)$ 。如果  $x_0$  是  $I$  的内点，且  $f$  在  $x_0$  点连续，那么  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0) (n \rightarrow \infty)$ 。

**证明** 由连续定义，对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使当  $|x - x_0| > \delta$ ，便有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon / 2.$$

由 $x_0$ 是 $I$ 的内点, 可以认为 $\delta$ 如此之小, 使 $|x - x_0| < \delta$ 含于 $I$ 内. 而 $S$ 在 $I$ 内稠密,  $\exists x_1, x_2 \in S$ 满足 $x_0 - \delta < x_1 < x_0$ ,  $x_0 < x_2 < x_0 + \delta$  (图12·1). 由 $f$ 不减, 有

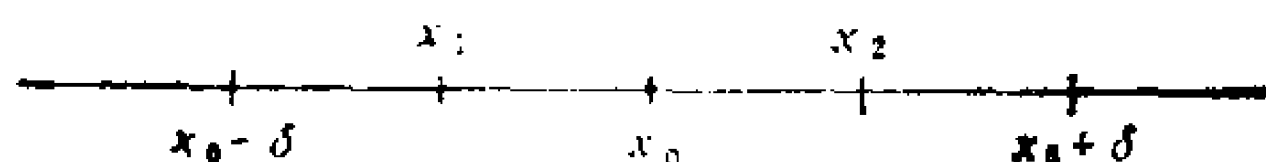


图 12·1

$$f(x_0) - \frac{1}{2}\varepsilon \leq f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (12\cdot5)$$

由 $\{f_n\}$ 在 $S$ 的点上收敛, 存在自然数 $N$ , 使

$$|f_n(x_1) - f(x_1)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

及

$$|f_n(x_2) - f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (12\cdot6)$$

对所有 $n > N$ 成立. 由 $f_n$ 不减, 所以 $f_n(x_1) \leq f_n(x_0) \leq f_n(x_2)$ , 由此及(12·5)与(12·6)导出

$$\begin{aligned} f(x_0) - \varepsilon &\leq f(x_1) - \frac{1}{2}\varepsilon < f_n(x_1) \leq f_n(x_0) \\ &\leq f_n(x_2) < f(x_2) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

于是

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即 $f_n$ 在 $x_0$ 点收敛于 $f(x_0)$ .

注 由定理12·4可知, 定理12·6中的 $f$ 至多有可数个间断点. 因此定理12·6中至多除去 $I$ 的一个可数集之外, 在 $I$ 其他点 $f_n$ 都收敛. 由有界变差函数的分解定理12·3可知定理12·6对有界变差函数也成立.



因为在每一区间内都有可数稠密集（例如有理数的集），用康托对角线过程及定理12·6，可得下面著名的赫利定理。

**定理12·7（赫利定理）** 设 $f_n, n=1, 2, \dots$ ，是 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上的有界变差函数，如果 $f_n$ 和它们的全变差一致有界（即 $\exists$ 常数 $L, M$ 使 $|f_n(x)| \leq L$ 及 $V_a^b f_n \leq M$ 对一切 $x$ 及 $n$ 成立）。那么存在 $\{f_n\}$ 的子序列 $\{g_n\}$ ， $g_n$ 在 $I$ 的每一点收敛于 $f$ ，且 $V_a^b f \leq M$ 。

**证明** 沿用(12·4)式，定义 $\bar{g}_n = \frac{1}{2}\{(f_n(a) + V_a^x f_n + f_n(x))\}$ ，  
 $\bar{h}_n = \frac{1}{2}\{f_n(a) + V_a^x f_n - f_n(x)\}$ ，那么 $\bar{g}_n, \bar{h}_n$ 是不减函数

且一致有界。因此以下仅就 $f_n$ 是不减函数证明定理就够了。

设 $S$ 是 $I$ 内包含 $a$ 及 $b$ 的稠密的可数集， $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ 。因为 $J = \{x: -L \leq x \leq L\}$ 是 $\mathbf{R}_1$ 内的紧集，可以应用康托对角线过程， $\exists \{f_n\}$ 的子序列 $\{h_n\}$ 对 $\forall x_i \in S$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x_i)$

$= y_i \in J$ 。 $h_n$ 是不减的，当 $x_i < x_j$ 时，有 $h_n(x_i) \leq h_n(x_j)$ 。

因此对 $x_p, x_q \in S, x_p < x_q$ 时，有 $y_p \leq y_q$ 。定义

$$f_0(x) = \sup_{x_p < x} y_p, \text{ 对 } x \in I, x_p \in S.$$

因当 $z < w$ 时， $S$ 内小于 $z$ 的点也小于 $w$ ，可知 $f_0$ 是 $I$ 上不减函数，对于 $x_p \in S$ ，当 $n \rightarrow \infty, h_n(x_p) \rightarrow f_0(x_p) = y_p$ 。根据定理12·6对 $f_0$ 的任意的连续点 $x, h_n(x) \rightarrow f_0(x)$ 。 $f_0$ 最多除去一可数集 $T$ 的点之外在 $I$ 内其他各点连续。既然 $T$ 是可数的，再次应用康托对角线过程，存在 $\{h_n\}$ 的子列 $\{g_n\}$ 在

$T$ 的每一点收敛, 这样的  $\{g_n\}$  在  $I$  的每一点收敛, 以  $f$  表示  $\{g_n\}$  的极限函数.

设  $a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_k = b$  是  $I$  的任一划分, 那么

$$\sum_{i=1}^k |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |g_n(x'_i) - g_n(x'_{i-1})| \leq M.$$

既然对任意  $n$ , 有  $V_a^b g_n \leq M$ . 因此  $V_a^b f \leq M$ .

下面定理给出确定函数为有界变差函数的充分条件, 并给出计算它的变差的公式.

**定理12.8** 设  $f$  及  $f'$  在区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 那么  $f$  在  $I$  上是有界变差函数, 且

$$V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

**证明** 定理的第一部分已在前面例2中给出了证明. 设  $\Delta : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$  是任意的划分, 那么按微分中值定理,  $\exists \xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ , 使

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)| |x_i - x_{i-1}|.$$

$|f'(x)|$  于  $I$  上连续,  $\int_a^b |f'(x)| dx$  存在, 因此对  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists$

$\delta > 0$ , 对网孔  $\|\Delta\| < \delta$  的划分  $\Delta$  都有

$$\left| \sum_{i=1}^n |f'(\xi_i)| |x_i - x_{i-1}| - \int_a^b |f'(x)| dx \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

由  $V_a^b f$  的定义, 对上述的  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists$  划分  $\Delta_0: a = z_0 < z_1 < \dots < z_m = b$ ,

使

$$V_a^b f \geq \sum_{i=1}^m |f(z_i) - f(z_{i-1})| > V_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

令  $\Delta_1$  是  $\Delta$  与  $\Delta_0$  的共同细分,  $\Delta_1: a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_p = b$ , 那么  $\|\Delta_1\| < \delta$ . 所以有

$$\begin{aligned} V_a^b f &\geq \sum_{i=1}^p |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| \geq \sum_{i=1}^m |f(z_i) - f(z_{i-1})| \\ &> V_a^b f - \frac{1}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

及

$$\left| \sum_{i=1}^p |f(x'_i) - f(x'_{i-1})| - \int_a^b |f'(x)| dx \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

综合起来, 得到

$$\left| V_a^b f - \int_a^b |f'(x)| dx \right| < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性,  $V_a^b f = \int_a^b |f'(x)| dx$  成立.

注 函数  $f: x \rightarrow x^{\frac{2}{3}}$  在  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$  上递增, 它是有界变差的, 但  $f'$  在 0 点邻域内无界, 在 0 点不存在右导数, 由此可见定理 12.8 的条件是充分而不必要的.

## 习 题

1. 设  $f$  在  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上为有界变差的, 证明

$$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^x f \leq |f(a)| + V_a^b f.$$

2. 设  $f, g$  是  $I$  上的有界变差函数, 证明  $f - g$  及  $f \cdot g$  是有界变差的.

3. 证明  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  在  $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$

上非有界变差; 而函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $I$

上是有界变差的.

4. 求使函数  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(x^{-\beta}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 成为有界变差

的  $\alpha, \beta$  的取值.

5. 设  $f, g$  是  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上的有界变差函数. 证明

$$V_a^b(f+g) \leq V_a^b f + V_a^b g$$

$$V_a^b(Kf) = |K| V_a^b f, \quad K \text{ 是常数.}$$

6. 设  $f$  是定义在  $I = \{x: a \leq x \leq b\}$  上的函数,  $\Delta$  是  $I$  的划

分:  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 那么  $\sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1})^2$

$+ (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$  是  $f$  的曲线内接多边形的长.

定义  $f$  在  $I$  上的长为  $L_a^b f = \sup \sum_{i=1}^n [(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i)$

$- f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$ , 上确界是对  $I$  的所有可能的划分所取的.

(a) 对任意的  $f$  证明不等式:

$$V_a^b f + (b - a) \geq L_a^b f \geq [(V_a^b f)^2 + (b - a)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

由此断定函数为有界变差  $\iff f$  的曲线是有限长度的.

(b) 设  $a < c < b$ , 证明

$$L_a^b f = L_a^c f + L_c^b f.$$

[提示: 按定理 12.1 同样方法证明]

7. 称定义在  $I$  上的函数  $f$  为满足指数为  $\alpha$  的一致的罕尔德条件, 如果存在数  $M$  使  $x_1, x_2 \in I$  有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|^\alpha.$$

(a) 若  $f$  满足  $\alpha = 1$  的一致罕尔德条件, 那么  $f$  是有界变差的.

(b) 举出一  $f$  满足  $\alpha < 1$  的一致的罕尔德条件, 但  $f$  不是有界变差函数.

8. 设  $f(x) = x^n e^{-x}$ ,  $x \in I = \{x: 0 \leq x \leq a\}$ ,  $a > n > 0$ , 计算  $V_a^0 f$ .

9. 完成引理12.1的证明.
10. 完成定理12.2的证明.
11. 若 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续且其极大、极小值点共计是有限个. 证明 $f$ 是 $I$ 上的有界变差函数. 据此证明多项式在有限区间上是有界变差的.
12. 设 $f$ 在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上有界变差. 若对 $\forall x \in I$ ,  $|f(x)| \geq C > 0$  ( $C$ 是常数), 证明

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ 是 } I \text{ 上的有界变差函数.}$$

## § 12.2 黎曼—斯蒂阶斯积分

黎曼—斯蒂阶斯积分是函数 $f$ 对于另一函数 $g$ 的积分. 当 $g(x) = x$ 的特殊情况, 这种积分成为黎曼积分. 为了叙述简便,  $R$ ,  $R-S$ 分别代表黎曼积分, 黎曼—斯蒂阶斯积分.  $R-S$ 积分在物理学、工程学及不少数学分支中都有重要应用. 通过 $g$ 的适当选取, 它还能表示离散过程的量, 这种积分特别适合于概率统计理论中应用.

**定义** 设 $f, g$ 是 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上的函数, 如果 $\exists$ 数 $A$ , 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当 $I$ 的划分 $\Delta$ 的网孔 $\|\Delta\| < \delta$ , 及 $\forall \xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] - A \right| < \varepsilon. \quad (12.7)$$

那么称 $f$ 关于 $g$ 为 $R-S$ 可积, 称数 $A$ 为 $f$ 关于 $g$ 在 $I$ 上的 $R-S$ 积

分, 记为

$$A = \int_a^b f dg = \int_a^b f(x) dg(x).$$

和R积分一样, 容易证明当A存在时它是唯一的. 如果  $g(x) = x$ , (12.7)式的和就是黎曼和, 这时R—S积分就变成了R积分.

重要的是函数g不连续, R—S积分也可能存在. 例如,  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  于I上  $f(x) \equiv 1$ , 而

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] \text{ 的积}$$

分和除了包含  $x = \frac{1}{2}$  的子区间的项之外, 其他各项均为零.

对任意的I的划分 $\Delta$ , R—S积分的和等于  $g(1) - g(0) = 1$ .

因此R—S积分存在且为1.

如果f与g在同一点间断, R—S积分可能不存在. 例如在  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  上定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

只有含  $x = \frac{1}{2}$  的子区间的项不为零。即形如

$$f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})], \quad x_{k-1} < \frac{1}{2} \leq x_k,$$

$$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k.$$

的项不等于零。其中  $g(x_k) - g(x_{k-1}) = 1$ ，而  $f(\xi_k)$  依  $\xi_k < \frac{1}{2}$ ，还是  $\xi_k \geq \frac{1}{2}$  分别取 1 或 2 的值，并且  $f(\xi_k)$  的两种取值与划分的网孔大小无关。因此  $R-S$  积分不存在。

作为和式极限的  $R-S$  积分，如下面定理所述，也有与  $R$  积分同样的基本性质，把它的证明留给读者。

**定理 12.9** (a) 设  $\int_a^b f dg_1$ ,  $\int_a^b f dg_2$  都存在, 定义  $g = g_1$

+  $g_2$ , 那么

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_1 + \int_a^b f dg_2.$$

(b) 设  $\int_a^b f_1 dg$  及  $\int_a^b f_2 dg$  存在, 定义  $f = f_1 + f_2$ , 那么

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2 dg.$$



(c)  $\int_a^b f dg$  存在,  $c$  是常数. 那么

$$\int_a^b (cf) dg = c \int_a^b f dg.$$

(d) 设  $a < c < b$ . 若  $\int_a^c f dg$  及  $\int_c^b f dg$  存在, 那么,  $\int_a^b f dg$  存在, 且

$$\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg.$$

下一定理指出当  $g$  是光滑函数,  $R-S$  积分可以化成  $R$  积分, 这对于  $R-S$  积分的计算是有用的.

**定理12·10** 设  $f, g$  与  $g'$  都在区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续. 那么  $\int_a^b f dg$  存在, 且

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f(x) g'(x) dx. \quad (12\cdot8)$$

**证明** 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 要证明当划分网孔充分小时, 有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x) g'(x) dx \right| < \varepsilon. \quad (12\cdot9)$$

对(12·9)式中的  $g(x_i) - g(x_{i-1})$ , 应用微分中值定理得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g'(\eta_i) (x_i - x_{i-1}), \end{aligned} \quad (12 \cdot 10)$$

其中  $x_{i-1} \leq \eta_i \leq x_i$ . (12·10) 右端的和在  $\xi_i = \eta_i$  时成为  $R$  积分和; 而在  $\xi_i \neq \eta_i$  时, 当划分  $\Delta$  的网孔充分小这个和能与  $R$  积分和任意地逼近. 事实上, 以  $M$  表示  $\sup_{x \in I} |f(x)|$ , 由  $g'$  在闭区间  $I$  上连续因而一致连续, 对上述  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使当  $|\xi_i - \eta_i| < \delta$  有

$$|g'(\xi_i) - g'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}. \quad (12 \cdot 11)$$

由此对任意的网孔小于  $\delta$  的划分

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g'(\eta_i) - g'(\xi_i)] (x_i - x_{i-1}) \right| \\ & < \sum_{i=1}^n M \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (12 \cdot 12)$$

据  $R$  积分定义, 当划分的网孔充分小 (令这网孔小于  $\delta$ ), 使

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) g'(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x) g'(x) dx \right| \\ & < \frac{1}{2} \varepsilon. \end{aligned} \quad (12 \cdot 13)$$

综合(12·12)与(12·13), 对于任意的 $\xi_i, \eta_i$ , 只要它们都是子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的点, 便有

$$\left| \sum_{i=1}^N f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)g'(x)dx \right| < \varepsilon.$$

把(12·10)代入上式, 便得(12·9)式成立. 定理获证.

**例1** 求 $\int_{-1}^2 x^5 d(|x|^3)$ .

**解** 分别计算 $\int_{-1}^0 x^5 d(-x^3)$ 及 $\int_0^2 x^5 d(x^3)$ . 按定理

12·10有

$$\int_{-1}^0 x^5 d(-x^3) = -3 \int_{-1}^0 x^7 dx = -\frac{3}{8}x^8 \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{8},$$

$$\int_0^2 x^5 d(x^3) = 3 \int_0^2 x^7 dx = \frac{3}{8}x^8 \Big|_0^2 = 96.$$

再由定理12·9(d)得

$$\int_{-1}^2 x^5 d(|x|^3) = \frac{3}{8} + 96 = 96\frac{3}{8}.$$

下一定理与R积分的定理5.13类似, 给出变量替换的公式, 应用于积分计算.

**定理12·11** 设 $f$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上关于 $g$ 是可积的,  $x(u)$ 在 $J = \{u : c \leq u \leq d\}$ 上是连续递增函数, 且 $x(c) = a$ ,

$x(d) = b$ . 定义

$$F(u) = f[x(u)], \quad G(u) = g[x(u)].$$

那么  $F$  关于  $G$  在  $J$  上可积, 且

$$\int_c^d F(u) dG(u) = \int_a^b f(x) dg(x). \quad (12 \cdot 14)$$

若  $x(u)$  在  $J$  上递减,  $x(c) = b, x(d) = a$ , 那么

$$\int_c^d F(u) dG(u) = - \int_a^b f(x) dg(x). \quad (12 \cdot 15)$$

**证明** 由  $R-S$  积分定义, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使当  $I$  的划分  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  的网孔小于  $\delta$  时, 对  $\forall \xi_i, x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ , 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x) dg(x) \right| < \varepsilon. \quad (12 \cdot 16)$$

因为  $x = x(u)$  在  $J$  上一致连续, 对上述  $\delta > 0, \exists \delta_1$ , 当  $J$  中  $u', u''$  满足  $|u' - u''| < \delta_1$ , 便有  $|x(u') - x(u'')| < \delta$ . 研究  $J$  的网孔小于  $\delta_1$  的划分  $\Delta_1: c = u_0 < u_1 < \cdots < u_n = d$ , 于其子区间任取  $\eta_i, u_{i-1} \leq \eta_i \leq u_i$ .  $x = x(u)$  在  $J$  上递增, 令  $x_i = x(u_i), \xi_i = x(\eta_i)$ , 相应地以  $x_i$  为分点的  $I$  的划分  $\Delta$  的网孔  $\|\Delta\| < \delta$ , 且  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n F(\eta_i) [G(u_i) - G(u_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

按照R—S积分定义，由上面等式便得

$$\int_c^d F(u) dG(u) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

当 $x(u)$ 是递减的，令 $x(u_i) = x_{n+1-i}$ ， $x(\eta_i) = \xi_{n+1-i}$ ，

那么

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n F(\eta_i) [G(u_i) - G(u_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_{n+1-i}) [g(x_{n+1-i}) - g(x_{n+1-i-1})]. \end{aligned}$$

令 $k = n + 1 - i$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，上式右端的和成为

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) [g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

这时由(12.16)导出

$$\int_c^d F(u) dG(u) = - \int_a^b f(x) dg(x).$$

下一结果是部分积分公式的一般化，它用于计算R—S

积分, 并且还表明  $\int_a^b f dg$  及  $\int_a^b g df$  同时存在。

**定理12·12 (部分积分法)** 若  $\int_a^b f dg$  存在, 那么  $\int_a^b g df$  也存在并且

$$\int_a^b g df = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b f dg \quad (12\cdot17)$$

**证明** 由R—S积分定义, 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta' > 0$ , 使对于网孔小于  $\delta'$  的划分  $\Delta: a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m = b$ , 及任取的  $\xi'_i$ ,  $x'_{i-1} \leq \xi'_i \leq x'_i$ , 都有

$$\left| \sum_{i=1}^m f(\xi'_i) [g(x'_i) - g(x'_{i-1})] - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon. \quad (12\cdot18)$$

取  $\delta = \frac{1}{2} \delta'$ , 对网孔  $\|\Delta\| < \delta$  的划分  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 及点  $\xi_i$ ,  $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n$ . 此外还取  $\xi_0 = a$  及  $\xi_{n+1} = b$ . 这样  $a = \xi_0 \leq \xi_1 \leq \cdots \leq \xi_{n+1} = b$  是网孔小于  $\delta'$  的划分, 也有  $\xi_{i-1} \leq x_{i-1} \leq \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, n+1$ . 因此

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n g(\xi_i) [f(x_i) - f(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^n g(\xi_i) f(x_i) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i) f(x_{i-1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} g(\xi_{i-1}) f(x_{i-1}) + g(a) f(a)$$

$$- g(a) f(a) - \sum_{i=1}^n g(\xi_i) f(x_{i-1})$$

$$- g(b) f(b) + g(b) f(b)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} g(\xi_{i-1}) f(x_{i-1}) - g(a) f(a)$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} g(\xi_i) f(x_{i-1}) + g(b) f(b)$$

$$= g(b) f(b) - g(a) f(a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_{i-1}) [g(\xi_i) - g(\xi_{i-1})] \quad (12 \cdot 19)$$

右端的R—S和满足 (12·18)。因此 (12·19) 的右端与 (12·17) 的右端的差的绝对值不超过  $\varepsilon$ 。而 (12·19) 的最左端是 (12·17) 式左端的R—S和，所以定理成立。

后面将证明当  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续,  $g$  在  $I$  上有界变差, 那么  $\int_a^b f dg$  存在。定理 12·12 说明交换关于  $f$  与  $g$  的

条件R—S积分也存在。

**例2** 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上具有连续的导函数,  $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$  是任意的一有限点列。定义

$$g(x) = \begin{cases} C_i & a_{i-1} < x \leq a_i \\ C_0 & x = a \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

其中 $C_0, C_1, C_2, \dots, C_N$ 是常数, 证明

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) f'(x) dx &= C_N f(b) - C_0 f(a) \\ &\quad - \sum_{i=0}^{N-1} f(a_i) (C_{i+1} - C_i). \end{aligned} \quad (12.20)$$

**解** 对于 $I$ 的每一子区间 $I_i = \{x : a_{i-1} < x \leq a_i\}$ .

按R—S积分定义可得

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dg(x) = f(a_{i-1}) (C_i - C_{i-1}).$$

再据定理12.9的(d)得

$$\int_a^b f dg = \sum_{i=0}^{N-1} f(a_i) (C_{i+1} - C_i).$$

由部分积分法可知,  $\int_a^b g df$ 存在并且

$$\int_a^b g df = C_N f(b) - C_0 f(a) - \sum_{i=0}^{N-1} f(a_i) (C_i - C_{i-1}).$$

注意到定理12.10对被积函数是阶梯函数时仍然成立, 即



$\int_a^b g df = \int_a^b g f' dx$ . 于是 (12.20) 式成立.

为了讨论  $R-S$  可积函数类, 采用第五章所叙述的达布方法.

**定义** 设  $f$  与  $g$  都定义在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上,  $g$  在  $I$  上不减.  $\Delta : a_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  是  $I$  的划分, 定义  $\Delta_i g = g(x_i) - g(x_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

达布—斯蒂阶斯上、下和简称为  $D-S$  和, 其定义分别为

$$S^+(f, g, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta_i g,$$

$$S_-(f, g, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta_i g.$$

由  $g$  在  $I$  上不减, 数  $I'_i = \Delta_i g = g(x_i) - g(x_{i-1}) \geq 0$ , 且  $\sum_{i=1}^n \Delta_i g = g(b) - g(a)$ . 这样  $\{I'_i\}$  构成以  $g(a)$ ,

$g(b)$  为端点的区间  $I'$  的一个划分  $\bar{\Delta}$ , 如果  $\Delta'$  是  $\Delta$  的细分, 相应的  $\bar{\Delta}'$  也是  $\bar{\Delta}$  的细分.

下述引理与  $R$  积分的达布和的性质定理 5.1 完全一样, 把它的证明留给读者.

**引理 12.2** 设  $f, g$  都定义在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上, 且  $g$  在  $I$  上不减.

(a) 如果  $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$ ,  $\Delta$  是  $I$  的划分, 那么

$$m[g(b) - g(a)] \leq S_-(f, g, \Delta) \leq S^+(f, g, \Delta) \leq M[g(b) - g(a)].$$

(b) 若  $\Delta'$  是  $\Delta$  的细分, 那么

$$S_-(f, g, \Delta') \geq S_-(f, g, \Delta),$$

$$S^+(f, g, \Delta') \leq S^+(f, g, \Delta).$$

(c) 若  $\Delta_1, \Delta_2$  都是  $I$  的任意划分, 那么

$$S_-(f, g, \Delta_1) \leq S^+(f, g, \Delta_2).$$

**定义** 上、下  $D-S$  积分分别定义为

$$\int_a^b f dg = \inf_{\Delta} S^+(f, g, \Delta),$$

$$\int_a^b f dg = \sup_{\Delta} S_-(f, g, \Delta).$$

确界是对  $I$  的所有划分  $\Delta$  取的。当

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg \quad (12 \cdot 21)$$

称  $f$  关于  $g$  是  $D-S$  可积的, (12·21) 式的值称为  $f$  关于  $g$  的  $D-S$  积分。

下面定理所列  $D-S$  上、下积分的基本性质与第五章所讲的达布积分的基本性质完全一样。

**定理12·13** 设  $f, f_1$  及  $f_2$  在区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上有界,  $g$  在  $I$  上不减。

(a) 若  $\forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$ , 那么

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq \int_a^b f dg \leq M[g(b) - g(a)].$$

(b) 若  $f_1(x) \leq f_2(x) (\forall x \in I)$ , 那么

$$\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg, \quad \int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg.$$

(c) 设  $a < c < b$ , 那么

$$\int_a^c f dg + \int_c^b f dg = \int_a^b f dg, \quad \int_a^c f dg + \int_c^b f dg = \int_a^b f dg.$$

(d)  $\int_a^c f dg$  及  $\int_c^b f dg$  都  $\exists \iff \int_a^b f dg \exists$ . 当此,

$$\int_a^c f dg + \int_c^b f dg = \int_a^b f dg.$$

定理12.13与定理5.2, 定理5.3的证明相同, 由读者完成它的证明.

**定理12.14** 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续,  $g$  在  $I$  上不减, 那么  $(R-S)$  积分  $\int_a^b f dg$  存在.

**证明** 由  $f$  在  $I$  上一致连续, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使  $I$  中  $x, y$  满足  $|x - y| < \delta$  时, 便有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2[1 + g(b) - g(a)]}.$$

设  $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$  是网孔小于  $\delta$  的划分,  $I_i = \{x: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ . 由  $f$  在每一  $I_i$  上连续,  $\exists \eta_i$  与  $\xi_i \in I_i$ . 使  $m_i = f(\eta_i)$ ,  $M_i = f(\xi_i)$ , 那么

$$\begin{aligned} S^+(f, g, \Delta) - S_-(f, g, \Delta) \\ &= \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \Delta_i g \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2[1 + g(b) - g(a)]} \Delta_i g < \frac{1}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

因为  $\varepsilon$  是任意的, 因而  $(D-S) \int_a^b f dg$  存在. 现在令  $\xi_i$  是  $I_i$  内的任意点, 由  $(D-S)$  和介于  $S^+$  与  $S_-$  之间, 有

$$\begin{aligned} (D-S) \int_a^b f dg - \varepsilon &< S_-(f, g, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta_i g \\ &\leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g \\ &= S^+(f, g, \Delta) < (D-S) \int_a^b f dg + \varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 可知,  $(R-S)$  积分和  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g$  趋向

于  $(D-S) \int_a^b f dg$ , 即  $(R-S)$  积分  $\int_a^b f dg$  存在且等于

$$(D-S) \int_a^b f dg.$$

**推论**  $f$  在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续,  $g$  在  $I$  上有界变差, 那么  $R-S$  积分  $\int_a^b f dg$  存在.

由定理12·3有界变差函数可以分解成两不减函数的差, 再据定理12·9的 (a), 可知定理12·14的推论成立.

容易举出  $f, g$ , 使得  $f$  在  $I$  上  $(R)$  积分不存在, 但  $\int_a^b f dg$  存在. 例如, 定义

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

显然  $\int_0^2 f(x) dx$  不存在. 但是, 在  $[0, 1]$  上  $(R-S)$  和

总等于零, 因此

$$\int_0^2 f dg = \int_1^2 f dg = \int_1^2 dx = 1.$$

下一结果给出  $(R-S)$  积分的上界.

**定理12·15** 设 $f$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上连续且 $g$ 在 $I$ 上有界变差, 令 $M = \max_x |f(x)|$ , 那么

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq M V_a^b g.$$

其证明由(R—S)积分定义及定理12·14推论立即可得, 细节留给读者.

如果在区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上 $\{f_n\}$ ,  $\{g_n\}$ 分别收敛于 $f$ ,  $g$ . 为了给出 $\int_a^b f_n dg_n$ 收敛于 $\int_a^b f dg$ 的条件. 先来证明如下的技术性结果.

**引理12·3** 设 $f$ 在 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上连续,  $g$ 在 $I$ 上有界变差. 对于 $\delta > 0$ , 定义

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{x, y \in I \\ |x-y| < \delta}} |f(x) - f(y)|$$

如果 $I$ 的划分 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 的网孔 $\|\Delta\| < \delta$ , 而 $\xi_i$ 满足 $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 那么

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g - \int_a^b f dg \right| \leq \omega(f, \delta) V_a^b g.$$

**证明** 由定理12·9, 有

$$\int_a^b f dg = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f dg,$$

又显然地有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i) dg = f(\xi_i) \Delta_i g,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g - \int_a^b f dg = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\xi_i) - f(x)] dg.$$

若 $\Delta$ 的网孔 $\|\Delta\| < \delta$ ，由 $\xi_i$ 与 $x$ 介于 $x_{i-1}$ ， $x_i$ 之间，对于这样的 $x$ ，便有

$$|f(\xi_i) - f(x)| \leq \omega(f, \delta).$$

因此

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta_i g - \int_a^b f dg \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\xi_i) - f(x)] dg \right| \\ & \leq \omega(f, \delta) \sum_{i=1}^n V_{x_{i-1}}^{x_i} g = \omega(f, \delta) V_a^b g. \end{aligned}$$

**定理12·16** 设 $f_n$ ， $n=1, 2, \dots$ ，在 $I = \{x: a \leq x \leq b\}$ 上连续，且 $f_n$ 在 $I$ 上一致收敛于 $f$ 。而 $g_n$ ， $g$ 都是有界变差的，且 $V_a^b g \leq L$ 以及对所有 $n$ ， $V_a^b g_n \leq L$ 。再设 $S$ 是 $I$ 内的稠密集，且 $S$ 含有 $a$ 及 $b$ 。如果在 $S$ 上有 $g_n \rightarrow g$ ，那么

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dg_n = \int_a^b f dg.$$

**证明** 令  $\varepsilon_n = \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ , 由定理12·15, 有

$$\left| \int_a^b (f_n - f) dg_n \right| \leq \varepsilon_n V_a^b g_n \leq \varepsilon_n L.$$

注意到当  $n \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , 所以

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n dg_n - \int_a^b f dg \right| &= \left| \int_a^b (f_n - f) dg_n + \int_a^b f (dg_n - dg) \right| \\ &\leq \varepsilon_n L + \left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right|. \end{aligned}$$

下面证明当  $n \rightarrow +\infty$  时,  $\left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| \rightarrow 0$ . 对给定

$\varepsilon > 0$ , 取  $\delta > 0$ , 使  $\omega(f, \delta) < \frac{\varepsilon}{3L}$ . 再取一网孔小于

$\delta$  的划分  $\Delta$ :  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ , 且分点都属于  $S$ , 由引理12·3有

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] - \int_a^b f dg_n \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3L} \cdot L = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \tag{12·22}$$



同理还有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f dg \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \quad (12 \cdot 23)$$

再根据在  $I$  的稠密子集  $S$  上  $g_n \rightarrow g$ , 对所有  $i$ ,  $\exists N$ , 使当  $n > N$  有

$$\left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \{ [g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] - [g(x_i) - g(x_{i-1})] \} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (12 \cdot 24)$$

而把 (12·22), (12·23), (12·24) 代入下列不等式得

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| &\leq \left| \int_a^b f dg_n - \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g_n(x_i) - g_n(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] \right| \\ &+ \left| \sum_{i=1}^k f(\xi_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})] - \int_a^b f dg \right| \end{aligned}$$

$$\left| \int_0^1 f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

于是定理获证。

**例3** 设  $f_n = 1 - \frac{1}{n} \sin nx$ ,  $g_n = 1 + x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

证明

$$\int_0^1 f_n dg_n \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**解** 注意到  $f_n$  在  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  上一致收敛于1, 而函数列  $g_n$  收敛于  $g$ , 这里

$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2 & x = 1. \end{cases}$$

因此定理12.16的条件都被满足, 所以

$$\int_0^1 f_n dg_n \rightarrow \int_0^1 1 dg = 1.$$

### 习 题

1. (a) 设  $a < c_1 < c_2 < \dots < c_n < b$  是  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  的点。

若

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq c_i \\ d_i & x = c_i, \end{cases}$$

$f$  在  $I$  上连续, 求  $\int_a^b f dg$  的表达式.

(b) 若  $a_1 = c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$ , 求  $\int_a^b f dg$  的表达式.

[提示: 先对  $a = c_1 < c_2 = b$  作出 (a).]

2. 设  $g(x) = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , 求  $\int_0^x x dg$  的值.

3. 设  $g(x) = e^{|x|}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , 求  $\int_{-1}^1 x dg$  的值.

4. 设  $g(x) = K$ ,  $K-1 < x \leq K$ ,  $K = 1, 2, 3, \dots$ , 求

$$\int_1^4 x dg.$$

5.  $g$  同习题 4, 证明  $\int_1^5 g dg$  不存在.

6. 证明定理 12.9.

7. 用定理 12.11 计算  $\int_0^{\sqrt{\pi}} \cos u^2 d(\cos u^2)$ .

8. 证明若  $f, g$  在区间  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上有共同间断

点, 那么  $\int_a^b f dg$  不存在。

9. 设  $f \equiv c$ ,  $x \in I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $c$  是一常数, 若  $g$  是  $I$  上有界变差函数, 用部分积分法 (定理12.12) 证明

$$\int_a^b f dg = c[g(b) - g(a)].$$

10. 证明引理12.2.

11. 证明定理12.13.

12. 设  $f$  在  $I = \{x : a \leq x < \infty\}$  上连续,  $g$  在  $I$  上为有界变

差的, 定义  $\int_a^\infty f dg = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f dg$  (当然以极限存在为前提

条件)。证明若  $f$  在  $I$  上连续有界,

$$g(x) = \frac{1}{k^2}, \quad k-1 \leq x < k, \quad k = 1, 2, \dots$$

那么

$$\int_1^\infty f dg = - \sum_{k=1}^\infty f(k+1) \left[ \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} \right].$$

- \*13. 按12中关于半无限区间上积分的定义, 若  $b_k$  是常数,  $g(x) = b_k, k-1 < x \leq k, k = 1, 2, \dots$ . 证明

任何--无穷级数  $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$  可表示为 (R—S) 积分.

14. 证明定理12·15.

15. 设  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}$  且  $g_n(x) = x^n$ ,

$$x \in I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}.$$

证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dg_n(x)$  存在, 并求它的值.

16. 设  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x \text{ 是有理数} \\ 0 & \text{当 } x \text{ 是无理数.} \end{cases}$

$g$  是一非常数的在  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  上不减的函数.

证明  $\int_0^1 f dg$  不存在.

\*17. 设在  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上  $f$  连续,  $g$  不减, 证明中值定理:  $\exists \xi \in I$  使

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi) \int_a^b dg(x).$$

[提示: 应用定理12·13的 (a), 及关于  $f$  的介值性.]

18. 设  $f$  与  $g$  于  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  上连续, 定义

$$h(x) = \int_a^x g(t) dt, \text{ 那么 } \int_a^b f dh = \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

## 第十三章 距离空间上的函数

### § 13.1 完备的距离空间

本章详细地研究定义在距离空间上的函数，并证明在现代分析中很有用的连续函数延拓定理、逼近定理。如同完备性对不动点定理那样，这些定理都与空间的完备性有关，此外还与稠密性概念有关。

完备的距离空间 $S$ 是具有如下性质的距离空间：每一哥西序列都收敛于 $S$ 内的一个点。 $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ 是完备距离空间。另外的重要完备距离空间是 $C(S)$ ，它是定义在距离空间 $S$ 上的一切有界连续函数 $f$ 所组成的空间，它的距离函数 $d$ 定义为

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C(S),$$

(13.1)

$C(S)$ 中的收敛性是一致收敛（参看定理11.11与定理11.12）。完备距离空间中的闭集作为距离空间是完备的。例如 $\mathbf{R}_1$ 中的闭区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 是完备的，而开区间 $J = \{x : a < x < b\}$ 不是完备空间，因为 $J$ 内收敛于 $a, b$ 的序列是哥西序列，但 $a, b$ 却不属于 $J$ 。 $\mathbf{R}_1$ 的全体有理数组成的距离空间是不完备的。同样， $C(S)$ 中的以 $O$ 为中心，以 $r$ 为半径的闭球 $\overline{B}(O, r) = \{f : f \in C(S), d(f, O) \leq r\}$

$\leq r\}$  是完备的, 而开球  $B(O, r) = \{f : f \in C(S), d(f, O) < r\}$  是不完备的.

**定义** 设  $S$  是一距离空间, 称  $S$  内的集  $A$  是  $S$  内的稠密集  $\iff \bar{A} = S$ . 设  $A, B$  都是  $S$  内的集, 称  $A$  在  $B$  内稠密  $\iff \bar{A} \supset B$ .

例如,  $S = \mathbf{R}_1$ ,  $A$  为全体有理数集,  $A$  是  $\mathbf{R}_1$  中稠密集. 若  $B$  为全体无理数集,  $A$  与  $B$  不相交,  $\bar{A} = \mathbf{R}_1 \supset B$ ,  $A$  在  $B$  内稠密.

**定义** 设  $S$  是一距离空间,  $A \subset S$ , 称  $A$  在  $S$  内无处稠密  $\iff$  集  $\bar{A}$  不含有  $S$  内的球.

例如,  $S$  为  $\mathbf{R}_1$ , 有限点集是无处稠密的. 一个收敛的点序列、整数点集都是  $\mathbf{R}_1$  中无处稠密的集. 重要的是要注意稠密与无处稠密并不是互补的性质, 一个集可能不是稠密的又不是无处稠密的. 例如  $\mathbf{R}_1$  中有界的区间在  $\mathbf{R}_1$  中不是稠密的又不是无处稠密的.

下面定理给出无处稠密概念的另一常用的等价形式.

**定理13.1** 距离空间  $S$  内的集  $A$  在  $S$  内无处稠密  $\iff S$  的每个开球  $B$  含有一个与  $A$  不相交的开球  $B_1$ .

**证明**

(a) 设  $A$  在  $S$  内无处稠密 (即  $\bar{A}$  不含有  $S$  的球), 证明  $S$  的每个开球  $B$  含有与  $A$  不相交的球. 若不然, 那么  $\exists S$  的一个球  $B_0$ ,  $B_0$  内的每个球  $B_1$  包含  $A$  的点. 对  $\forall P \in B_0$ , 那么以  $P$  为中心、半径充分小完全含于  $B_0$  的球, 总包含  $A$  的点, 因此  $P$  点是  $A$  的极限点. 因为  $P$  是  $B_0$  的任意点, 所以  $B_0 \subset \bar{A}$ . 这与  $\bar{A}$  不含有  $S$  的球相矛盾.

(b) 设 $S$ 的每个开球含有与 $A$ 不相交的球, 证明 $\overline{A}$ 不含有 $S$ 的球. 事实上, 若 $\overline{A}$ 含有 $S$ 的球 $B$ ,  $B$ 中点 $P$ 是 $\overline{A}$ 的内点必为集 $A$ 极限点, 按极限点的定义, 以 $P$ 点为中心的任何球含有 $A$ 中的点. 由 $P$ 的任意性, 这与 $S$ 的每个球都含有与 $A$ 不相交的球相矛盾.

注 集 $A$ 无处稠密性等价定义中,  $S$ 的每个开球 $B$ 含有一个与 $A$ 不相交的“开球”可改述成“闭球”. 事实上, 设 $B$ 含有的与 $A$ 不相交的开球为 $B_1$ , 那么 $B_1$ 内的闭球 $B$ 自然也与 $A$ 不相交.

**定义** 距离空间 $S$ 内的集 $A$ 称为第一纲的 $\iff A$ 是可数个无处稠密集集的并集. 不是第一纲的集称为第二纲的集.

**例** 因为 $R_N$ 内仅含一个点的集是无处稠密的, 所以 $R_N$ 内可数点集是第一纲的.  $R_N$ 内的有理点集是可列的, 它是第一纲的且在 $R_N$ 中稠密, 由此可见第一纲集可能是稠密的. 如果整个空间是有理点所组成, 那么它的任何集都是第一纲的集, 这种空间里不存在第二纲的集. 另一方面, 若距离空间含有孤立点, 那么孤立点的集是开集它是第二纲的集.

完备距离空间总是第二纲的, 这一定理常在分析中应用, 通常称作纲推理.

**定理13.2** 设 $S$ 是一完备的距离空间,  $A$ 是 $S$ 内第一纲集. 若 $C = S - A$  ( $C$ 称为 $A$ 的余集), 那么 $C$ 在 $S$ 内是稠密的.

**证明** 我们证明 $S$ 的每个球 $B$ 必定含有 $C$ 的点, 由此 $C$ 在

$S$ 内稠密. 因为 $A$ 是第一纲的,  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ , 这里 $T_n$  ( $\forall n$ )



是无处稠密的。设  $B_0 = B_0(P_0, r_0)$  是  $S$  内以  $P_0$  为心、 $r_0$  为半径的一个球。因为  $T_1$  无处稠密， $\exists$  球  $B(P_1, r_1) \subset B_0$ ,

$B(P_1, r_1)$  与  $T_1$  不相交。可以取  $r_1 < \frac{r_0}{2}$ ，且  $\overline{B(P_1, r_1)} \subset B_0$ 。

因为  $T_2$  是无处稠密的，球  $B(P_1, r_1)$  含有  $\overline{B(P_2, r_2)}$  与  $T_2$  不相交，且  $r_2 < \frac{r_1}{2}$ 。继续这一过程，得到递缩球序列： $B(P_n,$

$r_n) \equiv B_n, r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$  及  $\overline{B_n} \subset B_{n-1}$ ， $B_n$  与  $T_n$  不相交， $n = 1,$

$2, \dots$ 。当  $n > m$ ，有

$$d(P_m, P_n) \leq r_n < \frac{r_0}{2^n},$$

因此  $\{P_n\}$  是一哥西序列。由  $S$  是完备的， $\exists$  一点  $q \in S$ ，使  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = q$ 。对  $\forall m$ ，当  $n > m$ ， $P_n \in B_m$ 。所以  $q \in \overline{B_m}$ ， $q \in \overline{T_m}$ 。

既然对  $\forall m$ ， $q \in \overline{T_m}$ ，于是  $q \in C$ 。而  $q \in \overline{B_m} \subset B_0$ ， $B_0$  是  $S$  中任取的一个球，它总含有  $C$  的点。所以  $C$  在  $S$  内稠密。

**推论** 完备距离空间是第二纲的。

**证明** 设  $S$  是第一纲的。由于  $S - S$  是空集，便与定理 13.2 相矛盾。

**定理 13.3** (贝尔纲定理) 完备距离空间内的非空开集是第二纲的。

定理 13.3 可用类似于定理 13.2 的方法来证明，细节留给读者。

借助于下面引理，可把由距离空间 $S_1$ 的集 $A$ 到距离空间 $S_2$ 的一致连续映象 $f$ ，保持一致连续性延拓到 $\overline{A}$ 上，而且延拓是唯一的。

**引理13.1** 设 $A$ 是距离空间 $S_1$ 的子集。

(a)  $\forall p \in (\overline{A} - A)$ ， $p$ 是 $A$ 的极限点。

(b) 如果 $p \in \overline{A}$ ， $\exists \{p_n\} \subset A$ ，当 $n \rightarrow +\infty$ ， $p_n \rightarrow p$ 。

(c)  $S_1, S_2$ 分别以 $d_1, d_2$ 为距离的距离空间， $A \subset S_1$ ，映象 $f: A \rightarrow S_2$ 在 $A$ 上一致连续。如果 $\{p_n\}$ 是 $A$ 中的哥西序列，那么 $\{f(p_n)\}$ 是 $S_2$ 中的哥西序列。

**证明** (a) 设 $A'$ 是 $A$ 的极限点集，那么由定义

$\overline{A} = A \cup A'$ ， $\overline{A} - A = \{p: p \in (A \cup A') - A\}$ ，因此(a)成立。

(b) 若 $p \in (\overline{A} - A)$ ， $p$ 是 $A$ 的极限点，那么由定理6.4，(b)成立；若 $p \in A$ ，对 $\forall n$ 取 $p_n = p$ ，当然有 $p_n \rightarrow p$ ，(b)也成立。

(c) 对 $\forall \varepsilon > 0$ ，由一致连续性定义， $\exists \delta > 0$ ，使当 $p', p'' \in A$ 且 $d_1(p', p'') < \delta$ 时，有 $d_2(f(p'), f(p'')) < \varepsilon$ 。因为 $\{p_n\}$ 是 $A$ 中的哥西序列， $\exists N$ ，使当 $m, n > N$ ，有 $d_1(p_n, p_m) < \delta$ 。由此当 $m, n > N$ 时，有 $d_2(f(p_n), f(p_m)) < \varepsilon$ ，即 $\{f(p_n)\}$ 是 $S_2$ 内的哥西序列。

**定理13.4** 设 $S_1, S_2$ 是距离空间， $S_2$ 是完备的， $A \subset S_1$ ， $f: A \rightarrow S_2$ 在 $A$ 上一致连续。那么存在唯一的映象 $f^*: \overline{A} \rightarrow S_2$ ，

$f^*$ 在 $\overline{A}$ 上一致连续，对 $\forall p \in A$ ，有 $f^*(p) = f(p)$ 。

**证明** 对于 $\forall p \in A$ ，定义 $f^*(p) = f(p)$ 。当 $p \in$

$(\overline{A} - A)$ ，由引理 13·1， $\exists \{p_n\} \subset A$ ，当  $n \rightarrow \infty$  时  $p_n \rightarrow p$ 。由  $\{p_n\}$  是哥西序列， $f$  在  $A$  上一致连续仍由引理 13·1 可知  $\{f(p_n)\}$  是  $S_2$  中哥西序列。而  $S_2$  是完备的， $\{f(p_n)\}$  有极限，定义这一极限为  $f^*(p)$ ，下面证明  $f^* : \overline{A} \rightarrow S_2$  在  $\overline{A}$  上是一致连续的。

对  $\forall \varepsilon > 0$ ，因为  $f$  在  $A$  上一致连续， $\exists \delta > 0$ ，使  $p', p'' \in A$  且  $d_1(p', p'') < 2\delta$ ，便有

$$d_2(f^*(p'), f^*(p'')) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

现令  $q', q'' \in \overline{A}$ ，且  $d_1(q', q'') < \delta$ 。设  $\{p'_n\}$ ， $\{p''_n\}$  是  $A$  中分别以  $q'$ ， $q''$  为极限的序列，当  $n \rightarrow \infty$  时  $p'_n \rightarrow q'$ ， $p''_n \rightarrow q''$ ，且有  $\{f^*(p'_n)\}$ ， $\{f^*(p''_n)\}$  分别以如上定义的  $f^*(q')$ ， $f^*(q'')$  为极限。那么  $\exists$  自然数  $N$ ，使当  $n > N$ ，有

$$\begin{aligned} d_1(p'_n, p''_n) &\leq d_1(p'_n, q') + d_1(q', q'') \\ &\quad + d_1(q'', p''_n) < 2\delta. \end{aligned}$$

因而

$$d_2(f^*(p'_n), f^*(p''_n)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对充分大的  $n$ ，

$$\begin{aligned} d_2(f^*(q'), f^*(q'')) &< d_2(f^*(q'), f^*(p'_n)) \\ &\quad + d_2(f^*(p'_n), f^*(p''_n)) + d_2(f^*(p''_n), f^*(q'')) \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

由  $q', q''$  是  $\overline{A}$  中任意满足  $d_1(q', q'') < \delta$  的元素对, 所以  $f^*$  在  $\overline{A}$  上一致连续.

现证  $f^*$  的唯一性. 设  $f^{**}$  是在  $\overline{A}$  上一致连续, 且对  $P \in A$  有  $f^{**}(p) = f(p)$ . 对  $p \in \overline{A} - A$ ,  $\exists \{p_n\} \subset A$ , 使当  $n \rightarrow \infty$ ,  $p_n \rightarrow p$ . 那么

$$\begin{aligned} f^{**}(p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{**}(p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^*(p_n) = f^*(p), \end{aligned}$$

即  $f^{**} \equiv f^*$ , 定理获证.

从一距离空间到另一距离空间中能够保持距离不变的映射有特殊的重要性.

**定义** 称  $f: S_1 \rightarrow S_2$  为等距映射  $\iff f$  是 1-1 的, 且对  $\forall p, q \in S_1$ , 都有

$$d_1(p, q) = d_2(f(p), f(q)).$$

欧几里得空间  $R_N$  中的平移、旋转是等距映射的简单例子. 更特殊地, 当  $S_1 = S_2 = R_1$ ,  $C$  为常数,  $f(x) = x + C$  显然是等距映射. 又当  $S_1 = S_2 = R_2$  时, 由

$$y_1 = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta$$

$$y_2 = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta$$

给出的映射  $(x_1, x_2) \rightarrow (y_1, y_2)$  ( $\theta$  是常数) 是等距的.

从几何上来看，任一“刚体运动”的映象是等距的。

**定理13·5** 设 $S_1, S_2$ 是距离空间且 $S_1$ 是完备的， $f: S_1 \rightarrow S_2$ 是等距映象，那么 $f(S_1)$ 作为距离空间，它是完备的。

**证明** 假设 $\{f(p_n)\}$ 是 $f(S_1)$ 中的哥西序列，因为 $f$ 是等距的， $\{p_n\}$ 是 $S_1$ 中的哥西序列，而 $S_1$ 又是完备的， $\{p_n\}$ 有极限 $p \in S_1$ 。 $f$ 于 $S_1$ 上有定义， $f(p) \in f(S_1)$ ，且由 $d_1(p_n, p) = d_2(f(p_n), f(p))$ 可知 $n \rightarrow \infty$ 时， $f(p_n) \rightarrow f(p)$ 。因此 $f(S_1)$ 内任一哥西序列在 $f(S_1)$ 中有极限， $f(S_1)$ 是完备的。

注 当所讨论的问题只涉及到空间的距离时，定理中的 $f(S_1)$ 可抽象地看作就是 $S_1$ 。

为了多方面的目的，要求距离空间具有完备性。下面证明任意一个距离空间 $S$ 都可以嵌入一完备的距离空间 $\overline{S}$ （定理13·7）。即可以填加一些点到空间 $S$ ，使在新空间 $\overline{S}$ 内每个哥西序列都有极限点，并且 $\overline{S}$ 的距离是 $S$ 的距离的延拓。

**定义** 设 $S$ 是以 $d$ 为距离函数的距离空间，称 $S$ 的两个哥西序列 $\{p_n\}$ 与 $\{q_n\}$ 是等价的 $\Leftrightarrow$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $d(p_n, q_n) \rightarrow 0$ 。等价的两个哥西序列，表示为 $\{p_n\} \approx \{q_n\}$ 。

等价的哥西序列的基本性质叙述为下面的定理。

**定理13·6** 设 $\{p_n\}, \{q_n\}$ 都是距离空间 $S$ 内的哥西序列。

(a) 数列 $d(p_n, q_n)$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时趋向于极限。

(b) 如果 $\{p_n\} \approx \{q_n\}$ ，且 $n \rightarrow \infty$ 时 $p_n \rightarrow p$ ，那么

$$q_n \rightarrow p.$$

(c) 若  $\{p'_n\}, \{q'_n\}$  是哥西序列, 且  $\{p'_n\} \approx \{p_n\}, \{p'_n\} \approx \{q'_n\}$ , 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(p'_n, q'_n)$ .

**证明** (a) 由三角形不等式

$$\begin{aligned} d(p_n, q_n) &\leq d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) \\ &\quad + d(q_m, q_n). \end{aligned}$$

得

$$d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m) \leq d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n).$$

交换  $m, n$ , 便得

$$\begin{aligned} &|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)| \\ &\leq d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n). \end{aligned}$$

这说明数的序列  $\{d(p_n, q_n)\}$  是一哥西序列, 由  $\mathbf{R}_1$  完备当  $n \rightarrow \infty$  时,  $d(p_n, q_n)$  趋向于极限.

(b) 及 (c) 的证明留给读者.

**定义** 设  $\{p_n\}$  是距离空间  $S$  的哥西序列,  $\{p_n\}$  在  $S$  内没有极限点.  $S$  内所有与  $\{p_n\}$  等价的哥西序列所组成的类称为  $S$  的理想元素.

例如, 若  $Q$  是全体有理数按通常距离的空间, 那么所有趋向于某个无理数的  $Q$  的哥西序列构成  $Q$  的一个理想元素. 把这一理想元素和这一无理数相一致, 即以这一理想元素作为这一无理数的定义. 令  $S'$  表示距离空间  $S$  的一切理想元素的集, 以  $S \cup S'$  定义一个包含  $S$  的距离空间  $\bar{S}$ ,  $\bar{S}$  中的距离  $\bar{d}$  如下定义: 对于  $p, q \in \bar{S}$ ,  $\exists \{p_n\}, \{q_n\} \subset S$  分别是确定

$p, q$ 的等价类中的哥西序列

$$\bar{d}(p, q) = \begin{cases} d(p, q), & \text{当 } p, q \in S, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(p, q_n), & \text{当 } p \in S, q \in S', \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q), & \text{当 } p \in S', q \in S, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d(p_n, q_n), & \text{当 } p, q \in S'. \end{cases}$$

容易验证 $\bar{S}$ 在 $\bar{d}$ 之下是距离空间。而使 $S$ 中点映象为 $\bar{S}$ 的同一点的映象 $S \rightarrow \bar{S}$ ，显然是等距的。可见 $S$ 的点 $p$ 也可看作含有 $\{p = p_n\}$ 这一特殊哥西序列的等价类。 $S$ 在 $\bar{S}$ 中是稠密的，而 $\bar{S}$ 是完备的。这一结果一般化为下面的定理。

**定理13.7** 以 $\bar{d}$ 为距离的空间 $\bar{S}$ 是完备的距离空间，且 $\exists S \rightarrow \bar{S}$ 内的等距映象 $f$ ，使 $f(S)$ 在 $\bar{S}$ 中稠密。

**证明** 设 $\{p_n\}$ 是 $\bar{S}$ 内的哥西序列。要证明 $\exists \bar{p} \in \bar{S}$ ，当 $n \rightarrow \infty$ ，有 $\bar{d}(\bar{p}, p_n) \rightarrow 0$ 。按定义对每个元素 $p_n \in \bar{S}$ ， $\exists S$ 内的哥西序列 $\{q_{n,k}\}$ ，满足 $\bar{d}(p_n, q_{n,k}) \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$ 。令 $\varepsilon_n > 0$ ，且当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\varepsilon_n \rightarrow 0$ 。从二重序列 $\{q_{n,k}\}$ 中可以取出一子序列， $q'_n = q_{n,k_n}$ ，使 $\bar{d}(p_n, q'_n) < \varepsilon_n$ 对 $\forall n$ 成立。由三角形不等式导出

$$\bar{d}(q'_n, q'_m) \leq \bar{d}(q'_n, p_n) + \bar{d}(p_n, p_m) + \bar{d}(p_m, q'_m). \quad (13.2)$$

(13·2) 式右端的第一、第三项由  $\bar{d}(p_n, q'_n) < \varepsilon_n$ , 而当  $n \rightarrow \infty$  时  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . 所以对于  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N$ , 使  $m, n > N$  便有  $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{3}$ , 且  $\bar{d}(q'_n, p_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\bar{d}(p_m, q'_m) < \frac{\varepsilon}{3}$ . 而由  $\{p_n\}$  是  $\bar{S}$  中的哥西序列, 对充分大的  $N$ , 也有  $\bar{d}(p_m, p_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ . 于是当  $n, m > N$  便有

$$\bar{d}(q'_n, q'_m) < \varepsilon,$$

即  $\{q'_n\} \subset S$ , 且是  $S$  内的哥西序列. 设  $\bar{p}$  是相应于  $\{q'_n\}$  的  $\bar{S}$  内的理想元素, 那么当  $n > N$ ,

$$\bar{d}(\bar{p}, p_n) \leq \bar{d}(\bar{p}, q'_n) + \bar{d}(q'_n, p_n) < 2\varepsilon,$$

所以当  $n \rightarrow \infty$  时,  $p_n \rightarrow \bar{p}$ , 即  $\bar{S}$  是完备的.

设  $p \in S$ , 令  $f(p) = \bar{p}$ , 这个  $S \rightarrow \bar{S}$  的映象由  $\bar{d}$  的定义它是等距映象. 对  $\forall p \in \bar{S}$ , 由  $\bar{S}$  的定义  $\exists S$  的哥西序列  $\{p_k\}$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\bar{d}(p_k, p) \rightarrow 0$ , 即  $S$  在  $\bar{S}$  中稠密.

注 (i)  $\bar{S}$  称作  $S$  的完备化空间. 由  $S$  在  $\bar{S}$  中稠密可知  $S$  的完备化  $\bar{S}$  是唯一的.

(ii) 距离空间的完备化是数学分析的一个基本的重要思想和方法. 由有理数出发构造性地定义无理数得到实数系是这一思想的最初的起源. 例如在连续函数空间  $C[0, 1]$  中定义距离

$$d_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt, \quad x(t), y(t) \in C[0, 1].$$

在  $d_1$  之下  $C[0, 1]$  这个距离空间不完备, 把它完备化, 所得到的空间是包含  $C[0, 1]$  的函数类. 这一函数类就是在现代数学中非常重要的勒贝格可积函数空间  $L[0, 1]$ .  $L[0, 1]$  比黎曼可积函数类还要广泛.



## 习 题

1. 设 $S$ 是距离空间,  $C(S)$ 是 $S$ 上有界连续函数的集. 证明伴之如下的距离

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|,$$

$C(S)$  是距离空间, 而且是完备的距离空间.

设 $M(S)$  是 $S$ 上全体有界函数的集, 仍取上面的距离,  $M(S)$  是否是一距离空间?

2. 设 $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  及  $y = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$  都是有界实数序列. 定义

$$d(x, y) = \sup_n |a_n - b_n|.$$

证明全体有界实数序列的集合, 在上述距离之下是一距离空间. 这一空间是完备的吗?

- \* 3. 设  $A = \{x : 0 < x < 1, x \text{ 为无理数} \}$ . 证明  $A$  是  $\mathbb{R}_1$  中第二纲的集.

4. 设  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 是整系数多项式.  $A$  表示所有整系数多项式的根的集. 证明集  $A$  是复平面内的第一纲的集

(复平面  $\mathbb{C}$  的距离  $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$ . 其中

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2.)$$

- \* 5. 设  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$  是  $\mathbb{R}_1$  内单位区间,  $\forall x \in I$  表示为三进制小数:

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots,$$

其中  $a_i$  取 0, 1, 或 2. 设  $A$  是  $I$  的这样的子集, 它

的点的三进小数表示的 $a_i$ 不取1。

(a) 证明 $A$ 是一不可数集。

(b) 证明 $A$ 在 $I$ 内无处稠密。

6. 详细地写出贝尔纲定理 (定理13·3) 的证明。

7. 设 $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ 按 $R_1$ 中的距离 $I$ 是距离空间。举出 $I$ 的子集 $A$ 及 $f : A \rightarrow R_1$ 的连续映象, 而 $f$ 不能被延拓为 $\bar{A} \rightarrow R_1$ 的连续函数。即证明定理13·4中要求 $f$ 一致连续性假设不能被减弱为连续性。

8. 设 $S_1, S_2$ 是距离空间且 $f : S_1 \rightarrow S_2$ 是等距的,  $S_2$ 是完备的。那么 $f(S_1)$ 是完备的吗? 证明你的回答。

9. 证明定理13·6的 (b) 及 (c)。

10. 验证定理13·7之前所定义的 $\bar{d}$ 是一距离, 因而 $S$ 是一距离空间。

\*11.  $C_{[0, 1]}$ 表示 $I = \{t : 0 \leq t \leq 1\}$ 上的连续函数的空间, 证明: 取 $d(x, y) = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$ ,

那么 $C_{[0, 1]}$ 是完备的距离空间。若取 $d_1(x, y)$

$= \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ 。证明在 $d_1$ 之下 $C_{[0, 1]}$ 也成为距离空间。举出这距离空间的一个哥西序列 $\{x_n\}$ ,

$x_n$ 不存在极限点。

### § 13·2 阿采拉定理, 连续函数的延拓

在许多应用中要求从距离空间 $S$ 上定义的连续函数族 $\mathcal{F}$ 当中找出收敛的函数列。这就是要求找出 $C(S)$ 中具有何种

条件的子集 $\mathcal{K}$ 是 $C(S)$ 中的紧集, 本节的阿采拉定理就是叙述 $C(S)$ 中紧集条件的, 这些条件当中首先是要求距离空间 $S$ 具有可分性.

**定义** 距离空间 $S$ 是可分的 $\iff S$ 含有在 $S$ 内稠密的 可列子集.

$R_1$ 中的有理点集是可列的稠密子集, 因此 $R_1$ 是可分的距离空间. 同样,  $R_N$ 是可分的. 事实上  $R_N$  中的有理点  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $x_i$ 是有理数), 组成 $R_N$ 之可列的稠密子集.

**定理13.8** 凡紧的距离空间是可分的.

**证明** 定理6.25指出, 对 $\forall \delta > 0$ ,  $\exists$ 有限个点 $p_1, p_2,$

$\dots, p_k$  ( $k$ 依赖于 $\delta$ ), 使 $S \subset \bigcup_{i=1}^k B(p_i, \delta)$ , 即有限个球 $B(p_i, \delta)$

覆盖了 $S$ . 取 $\delta = \frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 相应于 $\frac{1}{n}$ , 取这样以

$\frac{1}{n}$ 为半径能覆盖 $S$ 的有限个球的球心集的并, 既然它是可列个有限点集的并集, 所以是 $S$ 的可列子集, 并且它在 $S$ 中稠密.

**注** 这里给出一个不可分距离空间的例子.

设给定实数列 $\{x_n\}$ , 如果存在 $M$ , 使对 $\forall n$ , 有 $|x_n| \leq M$ , 序列 $\{x_n\}$ 称为有界数列. 用 $x$ 表示有界数列, 研究所有有界数列 $x$ 的空间 $S$ . 定义 $S$ 的距离

$$d(x, y) = \sup_i |x_i - y_i|, (x = \{x_i\}, y = \{y_i\} \in S) \quad (13.3)$$

$S$ 是一距离空间. 我们证明 $S$ 是不可分的.

**证明** 反证法. 假若 $S$ 是可分的, 那么有可列集 $\{x^m\}$ ,  $m = 1, 2, \dots, \{x^m\}$ 在 $S$ 内稠密. 记 $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_n^m, \dots)$ , 并如下构造元素 $y =$

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots),$$

(13.3)

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{当 } x_i^i \leq 0, \\ -1, & \text{当 } x_i^i > 0, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots,$$

据 (13.3) 式, 显然  $d(x^m, y) \geq 1$  对每一  $m$  成立. 这表明  $\{x^m\}$  在  $S$  内不稠密, 因此  $S$  是不可分的.

**定义** 设  $\mathcal{F}$  是给定距离空间  $S$  内集  $A$  上定义的函数  $f$  所组成的族,  $p_0 \in A$ , 称  $\mathcal{F}$  在  $p_0$  点是等度连续的  $\iff$  对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$ , 使所有  $p \in A \cap \overline{B(p_0, \delta)}$  及  $f \in \mathcal{F}$ , 都有

$$|f(p) - f(p_0)| < \varepsilon. \quad (13.4)$$

如果  $\mathcal{F}$  在  $A$  的每个点等度连续, 称  $\mathcal{F}$  在  $A$  上等度连续.

由定义, 显见等度连续函数族中的每个函数是连续的. 但其逆不真, 因为等度连续性要求 (13.4) 式对  $\mathcal{F}$  中所有函数都成立.

**例** 设  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ .  $f_n = x^n$ ,  $x \in I$ ,  $\mathcal{F} = \{f_n\}$ . 对于  $I$  中的点  $x_0 \neq 1$ , 由  $|x^n - x_0^n| < \frac{|x - x_0|}{1 - x_0}$ , 对于给定  $\varepsilon < 0$ , 取  $\delta = (1 - x_0)\varepsilon$ , 可使在  $|x - x_0| < \delta$  时, 对一切  $n$

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| = |x^n - x_0^n| < \varepsilon.$$

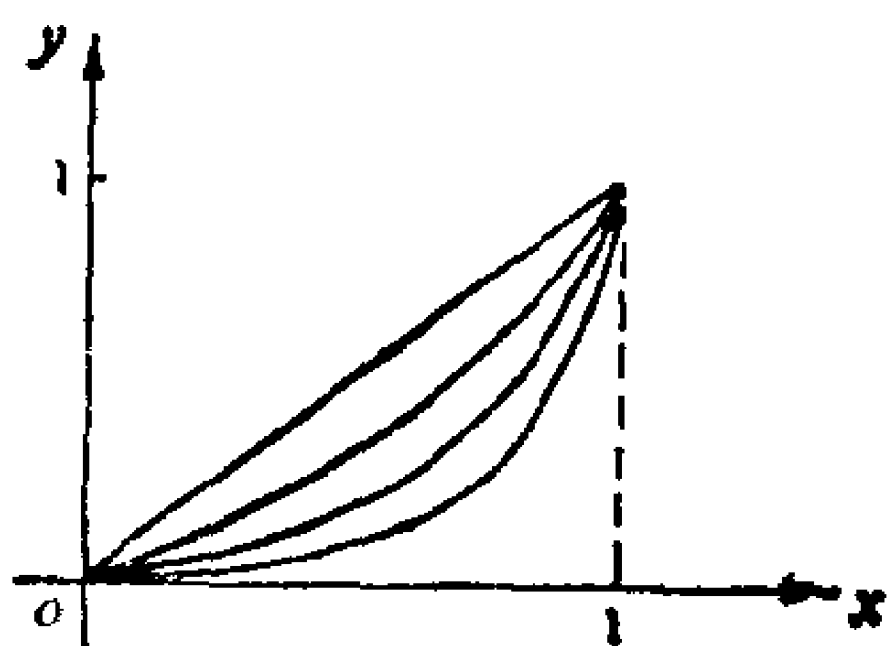


图 13.1

即  $\mathcal{F}$  在  $x_0 \neq 1$  的每个  $x_0$  点是等度连续的. 而在  $x = 1$  点的邻域内, 对给定的  $\varepsilon$ , 相应的  $\delta$  随  $n$  增大而缩小, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\delta \rightarrow 0$  (图13.1). 因此不存在对一切  $n$  都适用的  $\delta$ ,  $\mathcal{F}$  在  $x = 1$  点非

等度连续.

另一方面, 族  $\mathcal{F} = \{f_n\}$ ,  $f_n = n \sin \frac{x}{n}$ ,  $x \in J = \{x :$

$0 \leq x < \infty\}$ ,  $\mathcal{F}$  在  $J$  上是等度连续的. 事实上, 对  $\forall n$ , 应用微分中值定理, 在  $x_1$  与  $x_2$  之间  $\exists \bar{x}_n$ , 满足

$$|n \sin \frac{x_1}{n} - n \sin \frac{x_2}{n}| \leq \left| \cos \frac{\bar{x}_n}{n} \right| \cdot |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

这样对给定  $\varepsilon > 0$ , 可以取  $\delta = \varepsilon$  使得 (13.4) .

找一个简单的准则以判定函数族的等度连续性是很重要的. 若区间  $I$  上的函数族  $\mathcal{F}$  中的函数的一阶导数有共同的界, 即  $\exists M$ , 对  $\forall f \in \mathcal{F}$  及  $\forall x \in I$ , 有  $|f'(x)| \leq M$ , 那么  $\mathcal{F}$  在区间  $I$  上是等度连续的. 事实上, 由微分中值定理导出

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leq M |x_1 - x_2|,$$

取  $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ , 便有 (13.4) 式成立. 更一般的判别准则可参考

本节的习题 3 .

**定义** 设  $\mathcal{F}$  是距离空间  $S$  上定义的实值函数族, 称  $\mathcal{F}$  是一致有界的  $\iff \exists M > 0$ , 使  $|f(x)| \leq M$ , 对所有  $f \in \mathcal{F}$  及  $x \in S$  成立.

注意到一个等度连续的函数族可以不是一致有界的, 甚至还可能是无界的. 例如,  $f_n(p) = n, p \in S, \{f_n\} (n = 1,$

2, ...就是等度连续而不一致有界的函数族.  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ,

$x \in \mathbf{R}_1$ , 与  $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$  都是等度连续而无界的函数族.

**引理13.2** 设  $A$  是距离空间  $S$  内的紧集,  $\mathcal{F}$  是  $A \rightarrow \mathbf{R}_1$  的函数族,  $\mathcal{F}$  是等度连续且一致有界的. 我们令  $D = \sup_{p, q \in A} d(p, q)$  称为  $A$  的直径. 定义

$$K = \sup_{\substack{p, q \in A \\ f \in \mathcal{F}}} |f(p) - f(q)|$$

那么  $\exists I = \{x : 0 < x < \infty\}$  上的函数  $\psi$ , 具有下列的性质:

(i)  $\psi$  是不减的;

(ii) 当  $x \geq D$ ,  $\psi(x) = K$ ,

(iii) 当  $d(p, q) \leq x$  时, 对一切  $f \in \mathcal{F}$  有

$$|f(p) - f(q)| \leq \psi(x);$$

(iv)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = 0$  (图13.2)

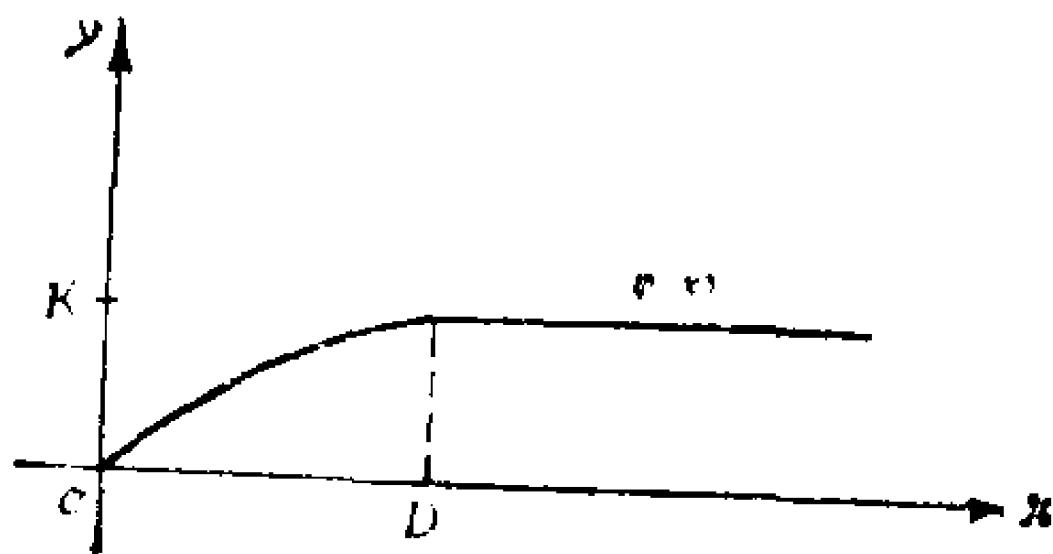


图 13.2

**证明** 用(iii)来定义  $\psi$ :

$$\psi(x) = \sup_{\substack{d(p, q) \leq x \\ f \in \mathcal{F}}} |f(p) - f(q)|,$$

上确界对  $A$  中满足  $d(p, q) \leq x$  的一切  $p, q$ , 及  $\mathcal{F}$  中的一切  $f$  所取. 由  $\mathcal{F}$  是一致有界的, 因此  $\psi(x)$  有定义. 由  $\psi(x)$  的定义, 显然  $\psi(x)$  是  $x$  的不减函数, 即 (i) 成立. 既然当  $p, q \in A$ , 便有  $d(p, q) \leq D$ , 因此当  $x \geq D$ ,  $\psi(x) = K$ , 即 (ii) 成立. 性质 (iii) 由  $\psi$  的定义立即得出. 为了证明 (iv), 令  $\varepsilon > 0$ , 由  $\mathcal{F}$  是等度连续的, 对  $\forall p \in A$ ,  $\exists$  以  $p$  为中心以某正数  $r$  为半径的球  $B(p, r)$ , 使当  $q \in B(p, r) \cap A$ , 及一切  $\mathcal{F}$  中的  $f$ , 都有

$$|f(p) - f(q)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

因为  $A$  是紧集由勒贝格引理 (定理 6.27), 存在  $\delta > 0$ , 使当  $q \in A$ , 每个球  $B(q, \delta)$  位于上述某个球  $B(p, r)$  内. 现设  $p_0, q_0$  是  $A$  中满足  $d(p_0, q_0) < \delta$  的任意的两个点, 那么  $p_0, q_0$  都属于  $B(p_0, \delta)$ , 而  $B(p_0, \delta)$  含于上述某球  $B(\bar{p}, \bar{r})$  之内, 当然有  $p_0, q_0 \in B(\bar{p}, \bar{r})$ , 因而对所有  $f \in \mathcal{F}$ , 都有

$$\begin{aligned} |f(p_0) - f(q_0)| &\leq |f(p_0) - f(\bar{p})| + |f(\bar{p}) - f(q_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即  $\psi(\delta) \leq \varepsilon$ , 由  $\varepsilon$  是任意的, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) = 0$ .

求微分方程或积分方程的解常循如下的途径: 首先求出

方程的一系列近似解，第二步证明近似解的族是等度连续且一致有界的，借助于下面的阿采拉定理从函数族中找出一收敛的子序列，最后证明函数序列的极限为所求的解。例如求  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ,  $y_0 = y(x_0)$  的解的欧拉折线法，就是采用这样的途径。

**定理13.9 (阿采拉定理)** 设  $S$  是可分的距离空间， $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ，组成  $S$  上等度连续且一致有界的族  $\mathcal{F}$ 。那么

(i) 存在  $\{f_n\}$  的子序列， $f_{k_1}, f_{k_2}, \dots, f_{k_n}, \dots$ ，在  $S$  的每一点收敛于连续函数  $f$ 。

(ii) 若空间  $S$  是紧的，那么子序列  $\{f_{k_n}\}$  一致收敛于  $f$ 。

**证明** 设  $S$  可列的稠密子集  $A \equiv \{p_n\}$ 。由  $\{f_n\}$  一致有界， $\{f_n(p_1)\}$  是一有界的实数列，因此  $\{f_n(p_1)\}$  有一收敛子序列，记为  $\{g_{1k}(p_1)\}$ 。考察  $\{g_{1k}(p_2)\}$ ，这还是有界实数列，因而它有收敛子列，记为  $\{g_{2k}(p_2)\}$ ，继续这一过程，按“康托对角线过程”得到对角线序列  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, \dots, g_{kk}, \dots$ ，在每一点  $p_n$  收敛。简记， $g_{kk} = g_k$ ， $g_k$  在  $A$  上的极限函数表示为  $f$ 。

现在把  $f$  由  $A$  延拓到  $S$ ，并证明  $f$  在  $S$  上连续。设  $p \in S$ ，对  $\forall \varepsilon > 0$ ，由  $\mathcal{F}$  的等度连续性， $\exists \delta > 0$ ，使当  $d(p, q) < \delta$ ，对一切  $k$ ，有

$$|g_k(p) - g_k(q)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (13.5)$$

因为  $A$  在  $S$  内稠密，所以  $\exists q_0 \in A$ ，满足  $d(p, q_0) < \delta$ 。由



$$|g_k(p) - g_l(p)| \leq |g_k(p) - g_k(q_0)| + |g_k(q_0) - g_l(q_0)| + |g_l(q_0) - g_l(p)|,$$

右端的一、三项据 (13.5) 都小于  $\frac{\varepsilon}{3}$ ，而中间项由  $g_k$  在  $A$  上收敛， $\exists N$ ，当  $k, l > N$  便有

$$|g_k(q_0) - g_l(q_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是  $\{g_k(p)\}$  是哥西数列，它的极限定义为  $f(p)$ 。这样定义的  $f$  在  $S$  上还是连续的。对  $\forall p_0 \in S$  及  $\forall \varepsilon > 0$ ，由  $\mathcal{F}$  等度连续性，对于满足  $d(p, p_0) < \delta$  的一切  $p$  及一切  $k$ ，都有

$$|g_k(p) - g_k(p_0)| < \varepsilon.$$

令  $k \rightarrow \infty$ ，又有  $g_k(p) \rightarrow f(p)$  与  $g_k(p_0) \rightarrow f(p_0)$ ，对上面不等式求极限，得

$$|f(p) - f(p_0)| \leq \varepsilon.$$

即  $f$  在  $\forall p_0 \in S$  连续。定理的 (i) 获证。

当  $S$  是紧空间时，证明收敛是一致的。对于  $\forall \varepsilon > 0$ ，由引理 13.2， $\exists x > 0$ 。使当  $d(p, q) \leq x$

$$|g_n(p) - g_n(q)| \leq \psi(x) = \frac{\varepsilon}{3}.$$

对一切  $n$  都成立。考察  $S$  内所有半径为  $x$  的球， $S$  是紧的，据定理 6.25， $\exists$  有限个这样的球，球心为  $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m$ ，使

$S \subset \bigcup_{i=1}^m B(\bar{p}_i, \alpha)$ . 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\bar{p}_i) = f(\bar{p}_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

既然  $m$  是个定数, 可取充分大的  $N$ , 使当  $n > N$ , 对  $i = 1, 2, \dots, m$  都有

$$|f(\bar{p}_i) - g_n(\bar{p}_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

对  $\forall p \in S$ ,  $p$  被上述  $m$  个球之一所包含, 例如  $p \in B(\bar{p}_i, \alpha)$ . 于是当  $n > N$ , 就有

$$\begin{aligned} |g_n(p) - f(p)| &\leq |g_n(p) - g_n(\bar{p}_i)| + |g_n(\bar{p}_i) \\ &\quad - f(\bar{p}_i)| + |f(\bar{p}_i) - f(p)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

而  $N$  与  $p$  点无关, 因此  $g_n$  一致收敛于  $f$ .

注 (i) 从定理 13.9 的证明可知, 要求  $\mathcal{F} = \{f_n\}$  具有一致有界性在于利用  $R_1$  的有界数列存在收敛子列. 既然  $R_N$  中的有界序列同样存在收敛子列, 因此若  $\mathcal{F}$  是定义在  $S$  到  $R_N$  内的矢值函数族, 一致有界性、等度连续性与  $R_1$  的情况同样定义, 只要把  $|f(p)|$  及  $|f(p) - f(q)|$  解释为  $R_N$  中的距离, 引理 13.2 及阿采拉定理仍成立, 其证明也仅需把  $R_1$  中的距离换成  $R_N$  中的距离.

(ii) 取  $S = [a, b]$ , 对于  $C[a, b]$  定理 12.9 可叙述为: 定义在  $[a, b]$  上的等度连续且一致有界的函数族存在一致收敛的子序列. 对于  $C_N[a, b]$  也有同样结论. 按照 § 6.4 的紧性概念, 可以把阿采拉定理叙述成:  $C_N[a, b]$  的闭子集  $\mathcal{F}$  为  $C_N[a, b]$  中紧集的充分条件是  $\mathcal{F}$  等度连续且一致有界的. 读者容易证明条件还是必要的.

现在研究连续函数延拓问题. 设  $f: I \rightarrow R_1$  是  $I = \{x:$

$a \leq x \leq b$  } 上连续函数。定义

$$g(x) = \begin{cases} f(a), & \text{当 } x < a, \\ f(x), & \text{当 } a \leq x \leq b, \\ f(b), & \text{当 } x > b. \end{cases}$$

$g$  是  $f$  在  $\mathbf{R}_1$  上的连续延拓, 且  $\max_{x \in \mathbf{R}_1} |g(x)| = \max_{x \in I} |f(x)|$ 。

例中的区间  $I$  为闭的条件对能否连续延拓是关键性的。例如

函数  $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$  在  $J = \{x : a < x < b\}$  内连续,

但它不能被连续延拓到  $\mathbf{R}_1$  上。对于距离空间中闭集上连续函数可以保持着上、下确界延拓的一般化定理是数学分析中著名的泰兹延拓定理。

为了证明泰兹延拓定理, 需要下面的定义和引理。

**定义** 设  $A$  是距离空间  $S$  内的集,  $p \in S$ , 定义点  $p$  到  $A$  的距离  $d(p, A)$  为

$$d(p, A) = \inf_{q \in A} d(p, q).$$

对给定的集  $A$ ,  $d(p, A)$  是空间  $S$  上定义的函数, 引理 13.3 说明这一函数的性质。

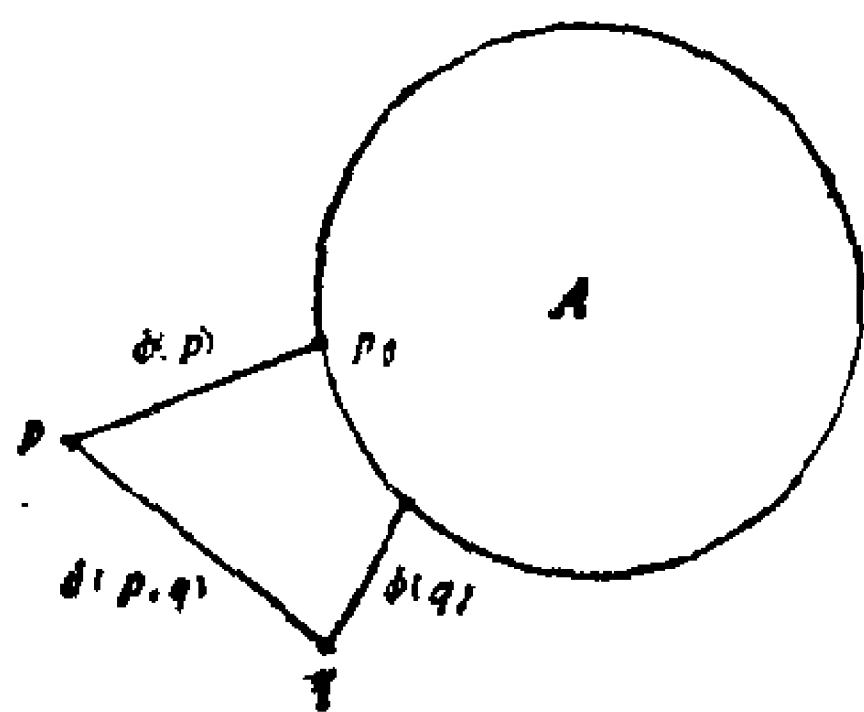


图 13.3

**引理 13.3** 设  $S$  是距离空间, 给定  $A \subset S$ ,  $\varphi(p) = d(p, A)$ , 那么  $\varphi(p)$  是  $S$  上的连续函数且对于  $\forall p, q \in S$ ,  $|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq d(p, q)$  (图 13.3)。

**证明** 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists p_0 \in A$  满足  $\varphi(p) > d(p, p_0) - \varepsilon$ 。由三

角形不等式有

$$d(q, p_0) \leq d(q, p) + d(p, p_0) \leq d(p, q) + \varphi(p) + \varepsilon$$

再由  $\varphi(q)$  的定义, 应有

$$\varphi(q) \leq d(q, p_0) < d(p, q) + \varphi(p) + \varepsilon,$$

所以

$$\varphi(q) - \varphi(p) < d(p, q) + \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 应有

$$\varphi(q) - \varphi(p) \leq d(p, q).$$

交换  $p$  与  $q$  便导出

$$|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq d(p, q).$$

**引理13.4** 设  $A, B$  都是距离空间  $S$  中的闭集, 且  $A$  与  $B$  不相交. 那么存在连续函数  $\psi: S \rightarrow \mathbf{R}_1$  满足:  $0 \leq \psi(p) \leq 1$ .  
( $\forall p \in S$ ); 当  $p \in A$ ,  $\psi(p) = 0$ ; 当  $p \in B$ ,  $\psi(p) = 1$ .

**证明** 定义

$$\psi(p) = \frac{d(p, A)}{d(p, A) + d(p, B)},$$

$\psi(p)$  具有所要求的性质.

注 对  $\forall a > 0$ , 定义  $\psi_1(p) = -a + 2a\psi(p)$  具有性质:  $-a \leq \psi_1(p) \leq a$ ,  
当  $p \in A$ ,  $\psi_1(p) = -a$ ; 当  $p \in B$ ,  $\psi_1(p) = a$ .

下一节将建立用光滑函数序列一致逼近连续函数的定理, 为此扩大连续函数的定义域是重要的. 下一结果是连续

函数延拓的基本定理。

**定理13·10** (泰兹延拓定理) 设 $A$ 是距离空间 $S$ 的一个闭集,  $f: A \rightarrow \mathbf{R}_1$  是连续、有界函数, 并记  $M = \sup_{p \in A} |f(p)|$  .

那么存在 $S$ 上的连续函数,  $g: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 满足  $p \in A, g(p) = f(p)$  . 且对于 $S$ 中的一切 $p$ ,  $|g(p)| \leq M$  .

**证明** 如下定义函数列  $\{f_n\}$ ,  $\{\psi_n\}$  并以  $\{f_n\}$  及  $\{\psi_n\}$  构成  $\{g_n\}$ , 而所求的 $g$ 将作为 $g_n$ 的一致极限.

令  $f_1(p) = f(p)$ ,  $p \in A$ , 并定义集

$$A_1 = \{ p : p \in A, f_1(p) \leq -\frac{1}{3}M \}$$

$$B_1 = \{ p : p \in A, f_1(p) \geq \frac{1}{3}M \},$$

集 $A_1, B_1$ 为不相交的闭集. 根据引理13·4的注,  $\exists S$ 上的连

续函数 $\psi_1(p)$ , 满足,  $\forall p, |\psi_1(p)| \leq \frac{1}{3}M$ , 及

$$\psi_1(p) = -\frac{1}{3}M, \text{ 当 } p \in A_1,$$

$$\psi_1(p) = \frac{1}{3}M, \text{ 当 } p \in B_1.$$

定义

$$f_2(p) = f_1(p) - \psi_1(p), \quad p \in A.$$

那么必有  $|f_2(p)| \leq \frac{2}{3}M$ ,  $p \in A$ , 事实上, 当  $p \in A_1$  ,

$f_2(p) = f_1(p) + \frac{1}{3}M$ , 而  $-M \leq f_1(p) \leq -\frac{1}{3}M$ , 有  $|f_2(p)|$   
 $\leq \frac{2}{3}M$ . 当  $p \in B_1$ ,  $f_2(p) = f_1(p) - \frac{1}{3}M$ , 而由  $B_1$  定义,  
 $\frac{1}{3}M \leq f_1(p) \leq M$ , 仍有  $|f_2(p)| \leq \frac{2}{3}M$ . 当  $p \in A - (A_1$   
 $\cup B_1)$ , 按定义有  $|f_1(p)| \leq \frac{1}{3}M$ ,  $|\psi_1(p)| \leq \frac{1}{3}M$ , 同样  
 有  $|f_2(p)| \leq \frac{2}{3}M$ .

现在定义

$$A_2 = \{ p : p \in A, \text{ 且 } f_2(p) \leq -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}M \},$$

$$B_2 = \{ p : p \in A, \text{ 且 } f_1(p) \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}M \},$$

$A_2, B_2$  是不相交的闭集. 用上述同样的方法, 按引理 13.4,  
 $\exists S$  上的连续函数  $\psi_2(p)$ ,  $\psi_2(p)$  满足: 对  $\forall p$ ,  $|\psi_2(p)|$   
 $\leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}M$ , 及

$$\psi_2(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}M, \text{ 当 } p \in A_2,$$

$$\psi_2(p) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}M, \text{ 当 } p \in B_2.$$

定义  $f_3(p) = f_2(p) - \psi_2(p)$ , 且有  $|f_3(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 M$ . 继续

这样作下去, 可定义

$$A_n = \{ p : p \in A \text{ 且 } f_n(p) \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M \},$$

$$B_n = \{ p : p \in A \text{ 且 } f_n(p) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M \}.$$

接下来按同样方法定义

$$\psi_n, \text{ 对 } p \in S, \quad |\psi_n(p)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} M,$$

再定义

$$f_{n+1}(p) = f_n(p) - \psi_n(p), \text{ 还有 } |f_{n+1}(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M.$$

按归纳法原理得到连续函数序列  $\{f_n\}$  及  $\{\psi_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

使用  $\{\psi_n\}$ , 定义

$$g_n(p) = \psi_1(p) + \psi_2(p) + \dots + \psi_n(p), \quad p \in S.$$

对  $m > n$ , 有

$$\begin{aligned} |g_m(p) - g_n(p)| &= |\psi_{n+1}(p) + \psi_{n+2}(p) + \dots + \psi_m(p)| \\ &\leq |\psi_{n+1}(p)| + |\psi_{n+2}(p)| + \dots + |\psi_m(p)| \leq \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n \right. \end{aligned}$$

$$+ \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot M \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[ 1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right] \cdot M$$

$$\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot M.$$

由此可见,  $\{g_n(p)\}$  是一哥西序列且收敛是一致的,  $\{g_n(p)\}$  的一致极限函数为  $g(p)$ ,  $g(p)$  于  $S$  上连续. 现在证明  $g$  是  $f$  的延拓. 为此注意到对于  $p \in A$ ,

$$g_n = \psi_1 + \cdots + \psi_n = \sum_{i=1}^n (f_i - f_{i+1}) = f_1 - f_{n+1}.$$

而  $|f_{n+1}(p)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n M$ , 当  $n \rightarrow \infty$ ,  $f_{n+1}(p) \rightarrow 0$ . 于是当

$n \rightarrow \infty$ ,  $g_n(p) \rightarrow g(p) = f_1(p) = f(p)$ , 即当  $p \in A$  时, 有  $g(p) = f(p)$ ,  $g$  是  $f$  的延拓. 此外, 对于  $\forall p \in S$ ,

$$|g(p)| \leq \frac{1}{3} M \left[ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots \right] = M.$$

## 习 题

1. 设  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ , 且以  $\mathcal{B}$  表示  $I$  上全体有界函数的集, 对  $f, g \in \mathcal{B}$ , 定义

$$d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

证明  $\mathcal{B}$  是一不可分的距离空间.



2. 设  $x = (c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$   $\{c_n\}$  是实数序列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , 以  $\mathcal{C}_0$  表示所有这样序列  $x$  的集

$y = (d_1, d_2, \dots, d_m, \dots)$ ,  $x, y \in \mathcal{C}_0$  定义

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i < \infty} |c_i - d_i|.$$

证明  $\mathcal{C}_0$  是一可分的距离空间。

[提示: 研究  $\mathcal{C}_0$  的形如  $(r_1, 0, 0, \dots)$ ,  $(r_1, r_2, 0, 0, \dots)$ ,  $(r_1, r_2, \dots, r_k, 0, 0, \dots)$  等元素,  $r_i$  是有理数。]

3. 设  $S$  是一距离空间,  $f$  在  $S$  上满足罕尔德条件, 即  $\exists$  正数  $M$  及  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , 使

$$|f(p) - f(q)| \leq M[d(p, q)]^\alpha.$$

证明由这样的  $f$  组成的函数族  $\mathcal{F}$  是等度连续的。

4. 设  $\mathcal{F}$  是在  $I = \{x : a \leq x < \infty\}$  上定义的可微的实函数族。设  $M_0$  及  $M_1$  是这样的常数: 对所有  $f \in \mathcal{F}$ ,  $|f(x)| \leq M_0$ ,  $|f'(x)| \leq M_1$ ,  $\mathcal{F}$  中是否恒有在  $I$  上一致收敛的子序列?
5. 设  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $S = \{(x, y) : a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ ,  $K : S \rightarrow \mathbb{R}_1$  在  $S$  上连续。定义

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)g(y)dy$$

$g$  是  $I$  上的可积函数, 且设  $\mathcal{G}$  是由  $g$  织成的在  $I$  上一致有界的函数族, 相应的  $f$  的函数族为  $\mathcal{F}$ 。证明  $\mathcal{F}$  含有一

致收敛子序列。

6. 对定义在可分距离空间 $S$ 上于 $\mathbf{R}_N$ 中取值的函数族, 证明阿采拉定理。
7. 证明 $C_{[a; b]}$ 中闭集 $\mathcal{F}$ 是 $C_{[a; b]}$ 中的紧集 $\iff \mathcal{F}$ 在 $[a, b]$ 上等度连续及一致有界。
8. 举出一个定义在 $I = \{x: 0 < x < 1\}$ 上连续有界的函数它不能被连续地延拓到比 $I$ 更大的集上。即证明泰兹定理中闭集条件不能去掉。
9. 在引理13.4中, 若不假设 $A$ 与 $B$ 是闭集, 证明可能不存在具有所述性质的 $\psi$ 。
10. 设 $I = \{x: a \leq x < \infty\}$ ,  $f: I \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是连续但不必有界函数, 证明 $f$ 可以延拓为 $\mathbf{R}_1$ 上的连续函数。
11. 设 $F$ 是 $\mathbf{R}_1$ 中的闭集,  $f$ 是 $F$ 上的连续函数证明 $f$ 可以延拓为 $\mathbf{R}_1$ 上的连续函数。

### § 13.3 斯桃茵—外尔斯特拉斯逼近定理

设 $f$ 是定义在区间 $I = \{x: a < x < b\}$ 上, 且在点 $c \in I$ 有各阶导数的函数, 称 $f$ 在 $c$ 点为解析的, 如果 $f$ 可展开成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (13.6)$$

的幂级数, 这里幂级数的收敛半径大于零。当 $f$ 在集 $A$ 的每一点是解析的称 $f$ 在 $A$ 上解析。在第九章已研究了函数解析的条件, 当时举出函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

说明函数具有各阶导数（叫作无限可微函数，并记为  $f \in C^\infty$ ），它可能不解析。

本节研究用光滑函数一致逼近连续函数的问题。在这里函数  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  仍将起到重要的作用。对  $\forall n$ ,  $f^{(n)}(0) = 0$ , 展开式 (13.6) 在  $x = 0$  的邻域中除了  $x = 0$  点之外其他点都不成立，即  $f(x)$  在  $x = 0$  点不解析。可是在  $x \neq 0$  的任何点  $f(x)$  是解析的。

现在定义函数  $g_1$  与  $g$ ：

$$g_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases} \quad g(x) = g_1(x)g_1(1-x).$$

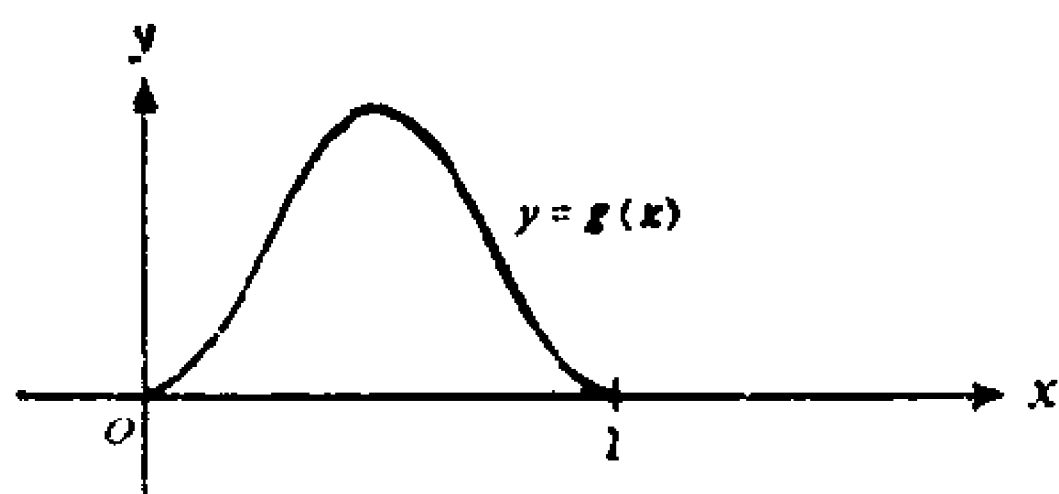


图 13.4

这样定义的  $g(x)$  在区间  $I = \{x : 0 < x < 1\}$  外边等于零，在  $I$  内取正值（图13.4）。令

$$M = \int_0^1 g(x) dx$$

并定义

$$h(x) = \frac{1}{M} \int_0^x g(t) dt.$$

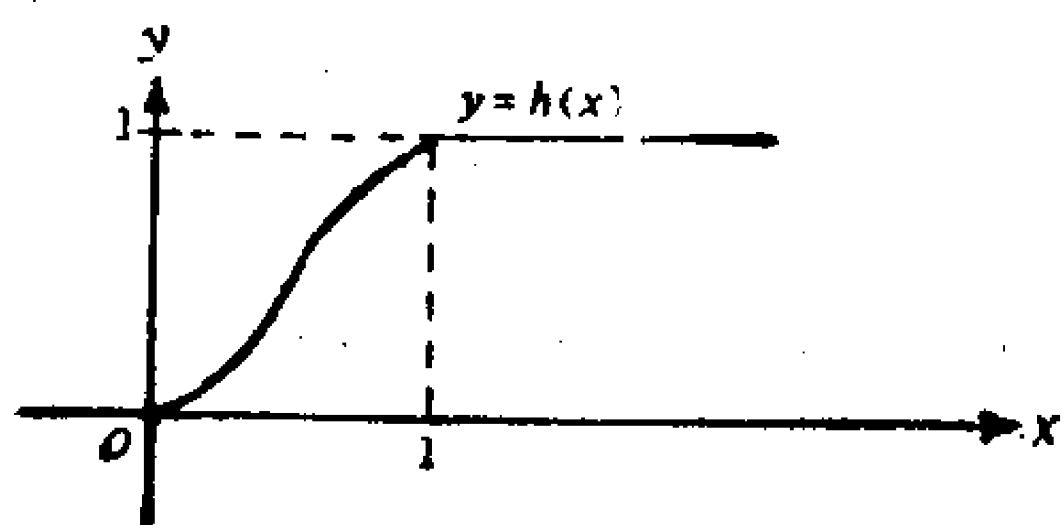


图 13.5

由 $g_1(x)$ 的性质导出 $h(x)$ 具有性质： $h(x) \in C^\infty$ ，当 $x \leq 0$ 时 $h(x) = 0$ ；当 $x \geq 1$ 时 $h(x) = 1$ ； $h(x)$ 是不减函数（图13.5）。

再用 $h(x)$ 定义

$$K(x) = \begin{cases} 1 - h(2x - 1) & \text{当 } x \geq 0, \\ K(-x) & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

当 $x \leq 0$ ， $K$ 是不减的，当 $x \leq 0$ ， $K$ 是不增的（图13.6）。

除了 $x = \pm \frac{1}{2}$ 及 $x = \pm 1$ 之外，

$K$ 在各点是解析的；而

在 $x = \pm \frac{1}{2}$ ， $x = \pm 1$ ，各

点 $K$ 是无限可微的。象 $K$ 这

样的光滑函数将成为构造光滑函数列来逼近连续函数的有用工具。

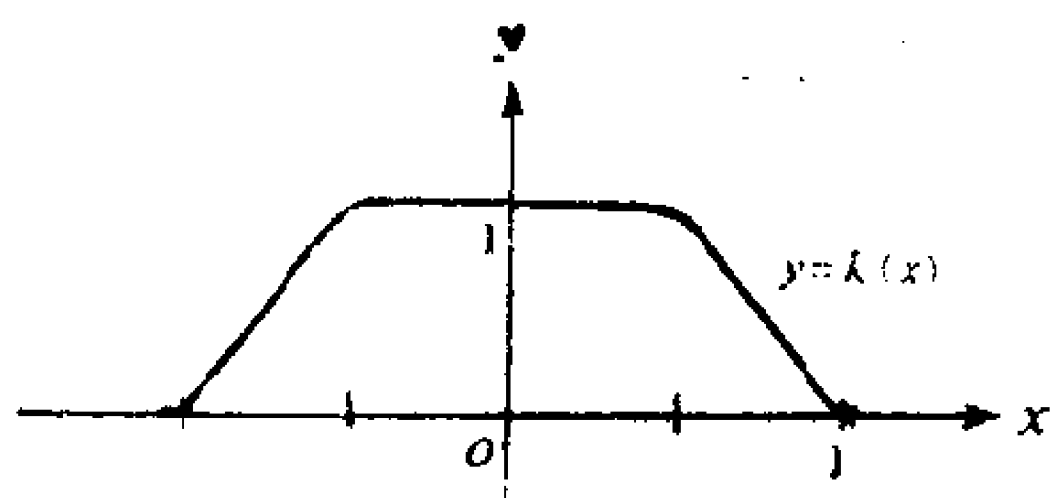


图 13.6

与上面函数有同样性质的多维函数。可以这样来定义：

$$K_2(x, y) = K(x) \cdot K(y).$$

$K_2$ 在方形 $S_0 = \{ (x, y) : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2} \}$ 上

等于 1；在 $S_1 = \{ (x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1 \}$

外边等于零；在 $\mathbf{R}_2$ 上 $0 \leq K_2(x, y) \leq 1$ ，且 $K_2$ 对 $x, y$ 具有各阶偏导数。同样地，定义

$K_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = K(x_1) \cdot K(x_2) \cdots K(x_N)$ ， $K_N$ 为 $C^\infty$ 中函数，它在以原点为中心边长为1的超立方内等于1，而在边长为2的超立方之外等于零， $0 \leq K_N \leq 1$ 。

把 $K_N$ 换成以 $r = \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 为变量的具有同样性质的函

数会更加方便。为此，对于 $r \geq 0$ ，定义 $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = K(r)$ 。那么当 $x = (x_1, \dots, x_N)$ ， $\varphi_1(x)$ 在 $\mathbf{R}_N$ 的单位球之外的值为零，在球 $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内其值为1。令

$$M_0 = \int_{B(0, 1)} \varphi_1(x) dx$$

且定义

$$\varphi(x) = \frac{1}{M_0} \varphi_1(x),$$

那么 $\varphi \in C^\infty$ ，在 $B(0, 1)$ 之外 $\varphi(x) = 0$ ，且

$$\int_{B(0, 1)} \varphi(x) dx = 1. \quad (13.7)$$

**定义** 设函数 $\varphi: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ ，如果 $\varphi \in C^\infty$ ： $\varphi \geq 0$ ，且在 $B(0, 1)$ 之外， $\varphi(x) = 0$ ，又满足(13.7)，称 $\varphi$ 为一个

平滑。对  $x \in R_N$ ,  $\rho$  是正数, 定义

$$\varphi_\rho^*(x) = \frac{1}{\rho^N} \varphi\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

$\varphi_\rho^*$  在  $B(0, \rho)$  之外等于零, 且

$$\int_{B(0, \rho)} \varphi_\rho^*(x) dx = 1,$$

$\varphi_\rho^*$  也称为平滑或变形的平滑。对于连续函数  $f: R_N \rightarrow R_1$ , 定义  $f$  的平滑函数  $f_{\varphi_\rho}$  或简记为  $f_\rho$ :

$$f_\rho^*(x) \equiv f_{\varphi_\rho}(x) = \int_{R_N} \varphi^*(x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (13.8)$$

下面定理给出  $f_\rho$  的性质。

**定理 13.11** 设  $f: R_N \rightarrow R_1$  是连续函数,  $\varphi$  是  $R_N$  上的一个平滑, 那么对  $\forall \rho < \infty$ , 函数  $f_{\varphi_\rho}$  是  $C^\infty(R_N)$  中的函数, 且当  $\rho \rightarrow 0^+$  时,  $f_{\varphi_\rho}$  在  $R_N$  的紧子集上一致收敛于  $f$ 。

**证明** 因为  $\varphi_\rho^*(x - \xi)$  在以  $x$  为中心, 以  $\rho$  为半径的球之外的值是零, 因此 (13.8) 式在  $R_N$  上积分相当于在球  $\bar{B}(0, \rho)$  上积分。于是可运用积分号下求导的法则 (参看 § 11.1), 得知  $f_\rho$  各阶偏导数都存在, 即  $f_\rho \in C^\infty(R_N)$ 。

设  $R > 0$ , 由  $f$  在闭球  $\bar{B}(0, R+1)$  上一致连续, 那么根据引理 13.2,  $\exists$  不减函数  $\psi(\rho)$  定义在  $I = \{\rho: 0 < \rho \leq 1\}$  上, 且满足当  $\rho \rightarrow 0^+$ ,  $\psi(\rho) \rightarrow 0$ , 及  $|f(x) - f(y)| \leq \psi(|x - y|)$  对所有  $x, y \in \bar{B}(0, R+1)$  且  $|x - y| \leq \rho < 1$  的  $x, y$  都

成立。相应地，当  $\rho < 1$  及  $x \in \bar{B}(0, R)$ ，便有

$$\begin{aligned} |f_\rho(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x, \rho)} \varphi_\rho^*(x - \xi) [f(\xi) - f(x)] d\xi \right| \\ &\leq \int_{B(x, \rho)} \varphi_\rho^*(x - \xi) |f(\xi) - f(x)| d\xi \\ &\leq \psi(\rho) \int_{B(x, \rho)} \psi_\rho^*(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

上式最后不等号是由  $|\xi - x| \leq \rho$  保证的。由  $\rho_\rho^*$  的定义

$$\int_{B(x, \rho)} \varphi_\rho^*(x - \xi) d\xi = 1, \text{ 因而上面不等式最右端等于 } \psi(\rho),$$

即对  $x \in \bar{B}(0, R)$ ，有

$$|f_\rho(x) - f(x)| \leq \psi(\rho).$$

既然当  $\rho \rightarrow 0^+$ ， $\psi(\rho) \rightarrow 0$ ，这表明在  $\bar{B}(0, R)$  上  $f_\rho(x)$  一致收敛于  $f(x)$ ，因为  $R$  是任意的，可知  $f_\rho(x)$  在  $R_N$  的紧子集上一致收敛于  $f$ 。

根据定理13.11，立即得出紧集上的连续函数能用  $C^\infty$  中函数序列一致逼近的重要推论。

**推论1** 设  $f$  是  $R_N$  内紧集  $A$  上的连续函数， $G$  是包含  $A$  的开集。那么  $\exists C^\infty(G)$  内的序列  $\{f_n\}$ ， $f_n$  在  $A$  上一致收敛于  $f$ 。

**证明** 根据泰兹延拓定理， $\exists$  连续函数  $F: R_N \rightarrow R_1$ ，

在 $A$ 上有 $F=f$ . 设 $\rho_n = \frac{1}{n}$ ,  $F_{\varphi \rho_n}$ 是 $F$ 的平滑函数, 那么当 $x \in G$ , 令 $f_n(x) = F_{\varphi \rho_n}(x)$ , 由定理13.11,  $f_n$ 在 $A$ 上一致收敛于 $f$ .

**推论2** 设推论1中 $A$ 的内点的集 $A^{(0)}$ 不空,  $f \in C^k(A^{(0)})$ . 以 $D^\alpha f$ 表示 $f$ 不超过 $k$ 阶的偏导数, 那么推论1中的 $f_n$ 在 $A^{(0)}$ 的每一紧子集上有 $D^\alpha f_n$ 一致收敛于 $D^\alpha f$ .

**证明** 推论1中的函数 $F$ 在 $A^{(0)}$ 内有不超过 $k$ 阶的偏导数, 记 $G_0 = D^\alpha F$ , 作出 $G_0$ 的平滑函数 $G_{0 \varphi \rho_n}$ . 显然当 $x \in A^{(0)}$ , 有 $D^\alpha F_{\varphi \rho_n} = G_{0 \varphi \rho_n}$ , 由 $D^\alpha F_{\varphi \rho_n}$ 在 $A^{(0)}$ 内的每一紧子集上一致收敛于 $G_0$ , 而在 $A^{(0)}$ 内 $G_0 = D^\alpha f$ . 所以推论2成立.

根据以上两个推论, 在 $\mathbf{R}_N$ 内有界闭集上的连续函数可用 $C^\infty$ 中的函数来一致逼近, 并且可达到预先提出的精度要求. 对于更一般的情况, 当 $S$ 是一紧距离空间,  $C(S)$ 表示 $S$ 上连续实值函数按通常的距离的距离空间. 我们希望找出可以用来逼近 $C(S)$ 的所有元素的 $C(S)$ 的子集, 即找出在 $C(S)$ 中稠密的子集. 自然这样的子集含有的元素越“少”越好的.

**定义** 设 $\mathcal{L}$ 是 $C(S)$ 的子集, 如果对 $S$ 中的不同点 $p, q$ , 都有 $f \in \mathcal{L}$ 使 $f(p) \neq f(q)$ , 就称 $\mathcal{L}$ 为在 $S$ 内是可分点的. 如果对 $S$ 中的不同点 $p, q$ 及实数 $a, b$ , 都有 $f \in \mathcal{L}$ , 使 $f(p) = a, f(q) = b$ , 就称 $\mathcal{L}$ 在 $S$ 及 $\mathbf{R}_1$ 内是可分点的.

**引理13.5** 设 $S$ 是距离空间,  $f, g \in C(S)$ . 对 $p \in S$ , 定义

$$h(p) = \max(f(p), g(p)), K(p) = \min(f(p), g(p)).$$



那么 $h, K \in C(S)$ .

引理13.5的证明 基于下面简单等式: 对实数 $a, b$

$$\max \{ a, b \} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|),$$

$$\min \{ a, b \} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|).$$

把证明细节留给读者.

**定理13.12 (斯忒茵逼近定理)** 设 $S$ 是紧距离空间.  $\mathcal{L}$ 是 $C(S)$ 的子集,  $\mathcal{L}$ 在 $S$ 及 $\mathbb{R}_1$ 内是可分点的, 且具有性质: 当 $f, g \in \mathcal{L}$ 便有 $\max(f, g)$ 及 $\min(f, g) \in \mathcal{L}$ . 那么对 $\forall F \in C(S)$ ,  $F$ 可用 $\mathcal{L}$ 内的函数在 $S$ 上一致逼近.

**证明** 对给定的 $C(S)$ 中的 $F$ , 设 $p, q \in S$ ,  $a = F(p)$ ,  $b = F(q)$ . 那么 $\exists g = g_{p,q} \in \mathcal{L}$ , 满足

$$g_{p,q}(p) = a, \quad g_{p,q}(q) = b.$$

因为 $g$ 及 $F$ 在 $q$ 点连续, 对 $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists q$ 的邻域 $N(q)$ , 使当

$r \in N(q)$ 有 $g(r) > b - \frac{1}{2}\varepsilon$ 与 $F(r) < b + \frac{1}{2}\varepsilon$ . 因此, 对 $r \in N(q)$

有

$$g(r) > F(r) - \varepsilon. \quad (13.9)$$

将 $p$ 固定, 对 $\forall q \in S$ 都有如上所述的 $g_{p,q}$ 及 $N(q)$ . 一切 $N(q)$ 覆盖了 $S$ , 而 $S$ 是紧的,  $\exists$ 有限个这样的邻域

$$N(q_1), N(q_2), \dots, N(q_m)$$

覆盖 $S$ ，且与这些邻域相应的函数 $g_{pq_1}, g_{pq_2}, \dots, g_{pq_m}$ 都满足不等式 (13.9)。现在定义

$$h_p = \max(g_{pq_1}, g_{pq_2}, \dots, g_{pq_m}),$$

$h_p \in \mathcal{L}$ 。按 (13.9) 式，对 $\forall r \in S$ ，有

$$h_p(r) > F(r) - \varepsilon. \quad (13.10)$$

因为 $g_{pq_1}(p) = g_{pq_2}(p) = \dots = g_{pq_m}(p) = a$ ，所以 $h_p(p) = a$ 。再由 $h_p$ 及 $F$ 是连续函数， $\exists$ 一邻域 $N(p)$ ，使当 $r \in N(p)$ 时，有

$$h_p(r) < F(r) + \varepsilon. \quad (13.11)$$

对于 $\forall p \in S$ ，都 $\exists$ 相应的 $h_p$ 及邻域 $N(p)$ ，一切 $N(p)$ 覆盖了 $S$ ，由 $S$ 是紧的， $\exists$ 有限个邻域

$$N(p_1), N(p_2), \dots, N(p_n)$$

组成 $S$ 的覆盖。定义

$$h = \min(h_{p_1}, h_{p_2}, \dots, h_{p_n}).$$

$h \in \mathcal{L}$ ，且由 (13.10) 及 (13.11)，对 $\forall r \in S$ 有

$$h(r) > F(r) - \varepsilon, \quad (13.12)$$

$$h(r) < F(r) + \varepsilon,$$

即对 $\forall r \in S$ ， $|F(r) - h(r)| < \varepsilon$ 。既然 $\varepsilon$ 是任意给定的，而 $h \in \mathcal{L}$ ，于是定理获证。

定理13·12所指出的 $\mathcal{L}$ 成为 $C(S)$ 中稠密集的充分条件是: (i)  $\mathcal{L}$ 在 $S$ 与 $\mathbb{R}_1$ 内是可分点的; (ii) 当 $f, g \in \mathcal{L}$ ,  $\max(f, g)$ 及 $\min(f, g) \in \mathcal{L}$ . 由引理13·5可知, 如果 $\mathcal{L}$ 对加、减及取绝对值是封闭的 (即当 $f, g \in \mathcal{L}$ , 有 $f+g, f-g, |f|$ 都属于 $\mathcal{L}$ ) 就能保证条件(ii)成立. 下面讨论 $C(S)$ 子集对乘法运算也封闭的情况.

**定义** 设 $\mathcal{A}$ 是 $C(S)$ 的子集, 如果 $\mathcal{A}$ 满足:

(i) 当 $f, g \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha, \beta$ 为实数, 有 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{A}$ ;

(ii) 当 $f, g \in \mathcal{A}$ ,  $f \cdot g \in \mathcal{A}$ .

称 $\mathcal{A}$ 为 $C(S)$ 内的一个代数.

当 $S$ 是紧的距离空间, 如果 $\mathcal{A}$ 是 $C(S)$ 内的含有常数函数的代数,  $\mathcal{A}$ 在 $S$ 内是可分点的, 就能证明 $\mathcal{A}$ 在 $C(S)$ 内稠密. 更确切地说,  $\mathcal{A}$ 由多项式所组成,  $C(S)$ 中的每一 $f$ 可用多项式 $f_n$ 一致逼近, 这里 $f_n$ 是 $\mathcal{A}$ 中函数的多项式. 这一著名的斯桃茵—外尔斯特拉斯定理的最重要的特殊情况是首先由外尔斯特拉斯所建立的. 这一定理指出: 定义在闭区间 $I$ 上的连续函数能用多项式一致逼近. 或等价地, 多项式的集在 $C(I)$ 内是稠密的.

为了建立斯桃茵—外尔斯特拉斯定理, 需要关于 $|x|$ 及 $\sqrt{1+x}$ 的幂级数展开的下述引理.

**引理13·6** 设 $I = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$  且  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}_1$  为  $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$ . 那么展开式

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)(2n)!}{2^{2n} [(n+1)!]^2} x^{n+1}$$

(13·13)

在 $I$ 上一致收敛。因而  $\varphi$  在 $I$ 上可由 (13·13) 的部分和 的多项式一致逼近。

**证明** 由二项式展开定理(定理9·30), 展开式(13·13) 对  $|x| < 1$  成立。为了证明级数在 $I$ 上一致收敛引用斯特林公式<sup>①</sup>:

$$n! \sim e^{-(n+1)} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

据斯特林公式,  $\exists$  常数  $K > 0$ , 使

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)(2n)!}{2^{2n}[(n+1)!]^2} &\leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \frac{(n+1)e^{-(2n+1)}(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n}e^{-2n-4}(n+2)^{2n+3}} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^3}{(n+2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

因此  $\varphi$  的级数以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$  为控制级数 ( $x \in I$ ), 于是 (13·13)

的级数在 $I$ 上一致收敛, 进而  $\varphi$  在  $|x| = 1$  处也有展开式 (13·13) 成立, 且在闭区间 $I$ 上收敛是一致的。

**注** 不用斯特林公式, (13·13) 在 $I$ 上一致收敛性的证明, 可参看本节的习题12.

**引理13·7** 设  $I_M = \{x : -M \leq x \leq M\}$ ,  $\psi: I_M \rightarrow \mathbb{R}_1$ ,

<sup>①</sup> 请参看吉林大学数学系编《数学分析》下册第380页。

$\psi(x) = |x|$ , 那么  $\psi(x)$  在  $I_M$  上能用  $x$  的多项式一致逼近.

**证明** 设  $M=1$ , 定义  $\psi_1(x) = (1+u)^{\frac{1}{2}}$ , 其中  $u = x^2 - 1$ . 据引理13·6, 函数  $(1+u)^{\frac{1}{2}}$  在  $I$  上能用  $u$  的多项式一致逼近. 因为当  $x \in I$  时,  $u \in I$ , 以  $x^2 - 1$  代  $u$ , 可以用  $x^2 - 1$  的多项式一致逼近  $\psi_1(x)$ . 而  $x^2 - 1$  的多项式是  $x$  的多项式, 所以引理成立. 对于  $M \neq 1$  的一般情况, 把  $\psi(x)$  写成

$\psi(x) = M\psi_1\left(\frac{x}{M}\right)$ , 便化成已证明了的特殊情况.

**定理13·13** (斯桃茵—外尔斯特拉斯定理) 设  $S$  是一紧距离空间,  $\mathcal{A}$  是  $C(S)$  中的在  $S$  内可分点的一个代数, 并且  $f_0 \equiv 1 (\forall p \in S)$  的  $f_0 \in \mathcal{A}$ . 那么对  $\forall f \in C(S)$  都可用  $\mathcal{A}$  中的函数一致逼近, 即对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \bar{f} \in \mathcal{A}$ . 对  $S$  的一切点  $p$ , 满足

$|f(p) - \bar{f}(p)| < \varepsilon$ . (或  $d(f, \bar{f}) < \varepsilon$ ,  $d$  表  $C(S)$  的距离).

**证明** 设  $\mathcal{L}$  是  $C(S)$  中能够由  $\mathcal{A}$  的函数一致逼近的那些函数所组成的子集, 也就是  $\mathcal{L} = \overline{\mathcal{A}}$ ,  $\overline{\mathcal{A}}$  表示  $\mathcal{A}$  的闭包. 欲证  $\mathcal{L} = C(S)$ , 只要证明  $\mathcal{L}$  满足定理13·12的条件. 为此首先证明  $\mathcal{A}$  在  $S$  及  $R_1$  内是可分点的.

设  $a, b \in R_1$ ,  $p, q \in S, p \neq q, \exists f \in \mathcal{A}$  使  $f(p) \neq f(q)$ . 由  $f_0(p) = f_0(q) = 1$ ,  $\exists$  实数  $\alpha, \beta$  使

$$\alpha f(p) + \beta f_0(p) = a, \quad \alpha f(q) + \beta f_0(q) = b,$$

由 $\mathcal{A}$ 是代数, 所以函数,  $h = \alpha f + \beta f_0 \in \mathcal{A}$ , 且满足  $h(p) = \alpha$ ,  $h(q) = \beta$ . 即 $\mathcal{A}$ 在 $S$ 及 $R_1$ 内是可分点的.

现在再证当 $f, g \in \mathcal{A}$ ,  $\max(f, g)$ 及 $\min(f, g)$ 属于 $\mathcal{L}$ . 设给定 $f \in \mathcal{A}$ , 那么 $\exists M > 0$ , 使 $|f(p)| < M$ 在 $S$ 上成立. 根据引理13.7, 函数 $\psi[f(p)] = |f(p)|$ 可用 $f$ 的多项式一致逼近. 而 $\mathcal{A}$ 是一代数, 属于 $\mathcal{A}$ 的 $f$ 的多项式也属于 $\mathcal{A}$ , 于是 $\psi = |f|$ 可用 $\mathcal{A}$ 的函数一致逼近, 即 $|f| \in \mathcal{L}$ , 这样一来, 当 $f, g$ 都属于 $\mathcal{A}$ , 那么 $f + g, f - g \in \mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ ,

且 $|f - g|$ 及 $|f + g|$ 都属于 $\mathcal{L}$ . 我们知道 $\max(f, g) = \frac{1}{2}(f +$

$g + |f - g|)$  及 $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ , 所以 $\max(f,$

$g)$  及 $\min(f, g)$ 属于 $\mathcal{L}$ . 再进一步, 设 $f, g \in \mathcal{L}$ , 证明 $\max(f, g)$ 及 $\min(f, g)$ 属于 $\mathcal{L}$ . 为此, 从 $\mathcal{A}$ 中选取 $\{f_n\}$ 及 $\{g_n\}$ 分别一致收敛于 $f, g$ . 那么 $F_n = \max(f_n, g_n)$ 及 $G_n = \min(f_n, g_n)$ 都属于 $\mathcal{L}$ , 由等式

$$F_n = \max(f_n, g_n) = \frac{1}{2}(f_n + g_n + |f_n - g_n|),$$

$$G_n = \min(f_n, g_n) = \frac{1}{2}(f_n + g_n - |f_n - g_n|),$$

显然当 $n \rightarrow \infty$ , 有

$$F_n \rightarrow \max(f, g),$$

$$G_n \rightarrow \min(f, g).$$

既然  $F_n, G_n$  可用  $\mathcal{A}$  中函数一致逼近, 对于  $\forall n, \exists \bar{f}_n, \bar{g}_n \in \mathcal{A}$ , 使对  $S$  中一切  $p$ , 都有

$$|\bar{f}_n - F_n| < \frac{1}{n}, \quad |\bar{g}_n - G_n| < \frac{1}{n}.$$

由三角不等式,

$$d(\bar{f}_n, \max(f, g)) \leq d(\bar{f}_n, F_n) + d[F_n, \max(f, g)],$$

$$d(\bar{g}_n, \min(f, g)) \leq d(\bar{g}_n, G_n) + d[G_n, \min(f, g)].$$

于是  $\max(f, g)$  及  $\min(f, g)$ , 可用  $\mathcal{A}$  的元素一致逼近, 它们都属于  $\mathcal{L}$ , 到此, 证明了  $\mathcal{L}$  满足定理 13.12 的条件.

最后, 设  $\forall f \in C(S)$ , 据  $\mathcal{L}$  满足定理 13.12 的条件, 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in \mathcal{L}$ , 使

$$d(f, f_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由  $\mathcal{L}$  的定义,  $\exists \bar{f} \in \mathcal{A}$ , 使

$$d(f_1, \bar{f}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由三角不等式得到

$$d(f, \bar{f}) \leq d(f, f_1) + d(f_1, \bar{f}) < \varepsilon,$$

也即证明了  $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{L} = C(S)$ .

**推论** (外尔斯特拉斯定理) 设 $S$ 是 $R_N$ 内的有界闭集, 那么定义在 $S$ 上的任一连续函数可用坐标 $x_1, x_2, \dots, x_N$ 的多项式一致逼近.

为证明推论, 仅须证明多项式的集是可分点的. 把证明细节留给读者.

## 习 题

$$1. \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} \exp \left[ \frac{1}{x^2(1-x^2)} \right], & \text{当 } x \neq 0, 1; \\ 0 & \text{当 } x = 0, 1. \end{cases}$$

证明  $f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0, n = 1, 2, \dots$ .

\*2. 设 $G$ 是 $R_N$ 内具有光滑边界 $\partial G$ 的有界区域. 对于 $x_0 \in G$ , 可以给出一个无限可微的平滑  $\varphi(x)$ ,  $\varphi$ 在含于 $G$ 内的 $x_0$ 的某邻域之外等于零. 证明  $\exists K$ 个这样的平滑  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ , 对  $\forall x \in G$ , 有

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_k(x) \equiv 1.$$

[提示: 对 $\bar{G}$ 用汉茵一波赖尔定理, 可得相应邻域上的平滑为,  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$ , 令  $\varphi_i(x) = \psi_i(x)$

$$/ \sum_{i=1}^k \psi_i(x).]$$

3. 证明引理13.5.

4. 证明定义在 $I = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$ 上的全体多项式的



集 $P$ 在 $I$ 及 $\mathbf{R}_1$ 内是可分点的 $C(I)$ 内的代数。但是 $P$ 并非定理13·12中 $\mathcal{L}$ 那样性质的 $C(I)$ 的子集。

5. 设 $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $\mathcal{L}$ 是 $C(I)$ 内由所有分段线性、连续的函数组成的子集。证明 $\mathcal{L}$ 满足定理13·12的条件。
6. 证明定理13·13中, 若 $S$ 不是紧集, 那么定理结论不成立。〔提示: 设 $I = \{x : 0 \leq x < \infty\}$   $\mathcal{L}$ 是多项式的集, 考察 $f(x) = e^x$ . 〕
7. 证明定理13·13的推论。
8. 设 $I = \{x : 0 < x \leq 1\}$ , 证明定理13·13的结论对于 $I$ 上多项式组成的 $\mathcal{L}$ 并不成立。
9. 设 $A$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的超闭立方, 证明空间 $C(A)$ 是可分的距离空间。〔提示: 研究以有理数为系数的 $n$ 元多项式的集。〕
10. 设 $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ,  $\mathcal{L}$ 表示 $C(I)$ 中一切满足 $f(0) = 0$ 的函数的集。 $\mathcal{L}$ 在 $C(I)$ 中是否稠密。
11. 证明 $\mathbf{R}_N$ 内不存在处处解析的平滑。
12. 不用斯特林公式证明 (13·13) 式一致收敛。

〔提示: 定义

$$b_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2n-2}), \quad n = 2, 3, \cdots,$$

令  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{b_n}{2n}$ , 那么  $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$  的幂级

数展开式即 (13·13) 式的右端为

$$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n.$$

运用不等式:

$$\log(1-x) \leq -x, \quad 0 < x < 1.$$

可得

$$\log b_n \leq -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right).$$

而由

$$\begin{aligned} \log n &= \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}, \end{aligned}$$

于是  $\log b_n \leq -\frac{1}{2} \log n$ , 由此  $b_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$  进而导出

$$|a_n| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

## 第十四章 凸集与凸函数

### § 14.1 凸 集

凸集、凸函数的理论近年来已发展成为数学中有广泛应用的基础学科——凸分析。这里只能介绍它的最初等、最初步的结果。

凸集概念是平面上三角形、圆等图形的几何特性的抽象：图形中任何两点所连接的直线段位于图形内。推广到  $R_N$  导出如下的定义，对于  $R_N$  凸集的结论还能推广到线性空间。

**定义**  $R_N$  内集  $S$  是凸的  $\iff$  联结  $S$  的任意两点  $P_1, P_2$  的线段  $\overline{P_1 P_2}$  上的点都在  $S$  内（图14.1）

为了方便，规定空集也是凸集。

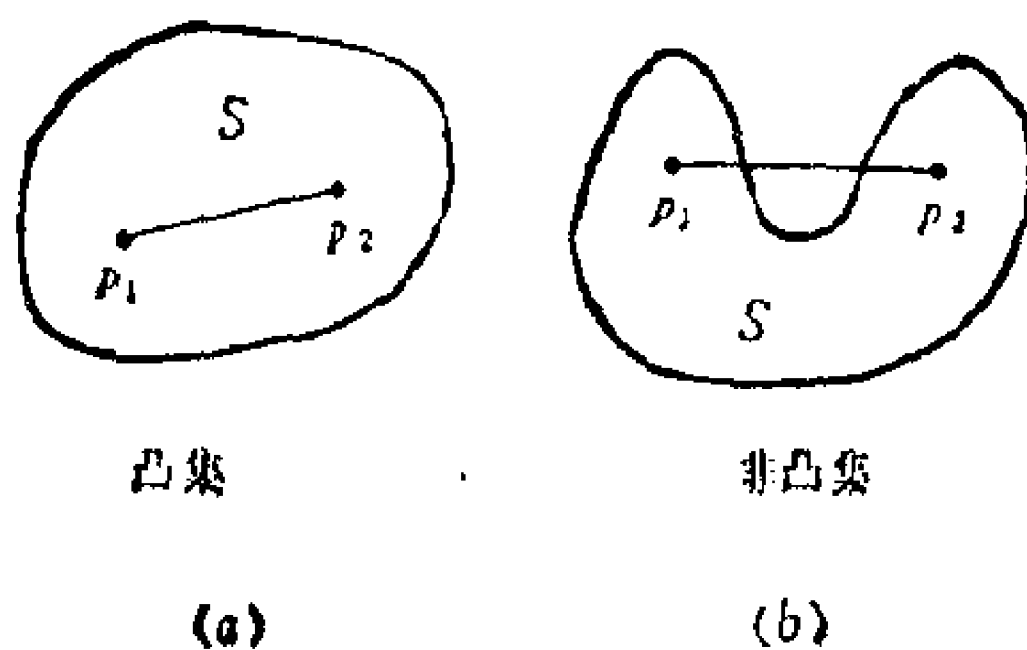


图 14.1

**定理14.1** 凸集族的交是一凸集。

这一简单事实的证明留给读者去作。

**定理14.2** 若  $S$  是凸集, 那么  $\overline{S}$  是一凸集。

**证明** 设  $p, q \in \overline{S}$ ,  $\exists \{p_n\}$  及  $\{q_n\} \subset S$  分别收敛于  $p$  与  $q$ 。因为  $S$  是凸集, 所有线段  $\overline{p_n q_n}$  上的点都属于  $S$ 。而  $\overline{p, q}$  上的点  $r_n$  可表示成

$$r_n = \lambda p_n + (1 - \lambda) q_n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

也即当  $p_n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_N^n)$ ,  $q_n = (y_1^n, y_2^n, \dots, y_N^n)$ , 那么  $r_n$  的坐标为  $\lambda x_i^n + (1 - \lambda) y_i^n$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ 。当  $n \rightarrow \infty$  时  $r_n \rightarrow \lambda p + (1 - \lambda) q \in \overline{S}$ , 这一事实对  $\forall \lambda \in [0, 1]$  成立。这就是说  $\overline{pq}$  线段上的点属于  $\overline{S}$ , 所以  $\overline{S}$  是凸集。

**定理14.3** 设  $S$  是一凸集,  $P_1, P_2, \dots, P_K$  都是  $S$  中的点,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$  是满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_K = 1$  的  $K$  个非负实数。那么点  $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_K P_K \in S$ 。

**证明**  $K = 2$  时, 由凸集定义即得。现设结果对  $K - 1$  个点成立, 证明对  $K$  个点结果成立。由归纳假设, 对  $\forall \mu_i \geq 0, \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_{K-1} = 1$  有  $\sum_{i=1}^{K-1} \mu_i P_i \in S$ 。因此

$$(1 - \lambda_K) (\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_{K-1} P_{K-1}) + \lambda_K P_K \in S.$$

选取  $\mu_i = \lambda_i / (1 - \lambda_K)$ ,  $i = 1, 2, \dots, K - 1$ , 便得  $\sum_{i=1}^K \lambda_i P_i \in S$ 。

**定义** 以  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  表示  $R_N$  中坐标为  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  的点, 称  $R_N$  内的集

$$\{x : \sum_{i=1}^N a_i x_i + b = 0\} \quad (14.1)$$

为超平面，这里 $a_i, b$ 都是实数， $a_i$ 不全为零。不失一般性，可以假定 $\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ ，不然仅须将上述方程除以

$\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 便可。

$N = 2$ 时，超平面是一条直线，当 $N = 3$ 时超平面就是通常的平面。

**定义：**称集

$$l = \{x : x_i = x_i^0 + \lambda_i t \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ -\infty < t < +\infty\} \quad (14.2)$$

为 $R_N$ 内直线。其中 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$ 是 $l$ 通过的固定点。 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 是 $l$ 的方向数， $t$ 是实参数。不失一般

性，可以认为 $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_N^2 = 1$ （否则可以 $\lambda_i / \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 代替

$\lambda_i$ ），这里诸方向数 $\lambda_i$ 称为 $l$ 的方向余弦。过点 $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1)$ 与(14.2)给出的直线 $l$ 相垂直的超平面的方程是

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i - x_i^1) = 0. \quad (14.3)$$

**定理14.4** 设 $S$ 是 $R_N$ 内的凸集， $S$ 不含有内点。那么 $\exists$ 一超平面 $H, S \subset H$ 。

**证明** 若定理不真,  $S$  不能被超平面所含有, 那么  $S$  中有  $N+1$  个点不在同一超平面上. 设这些点是坐标系之原点  $O$  及  $x^1, x^2, \dots, x^N$ . 那么从  $O$  到  $x^i$  的矢 ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 是线性无关的. 因为  $S$  是凸集, 对于  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  且  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N \leq 1$  都有  $\lambda_1 x^1 + \dots + \lambda_N x^N$  属于  $S$ . 必可选取

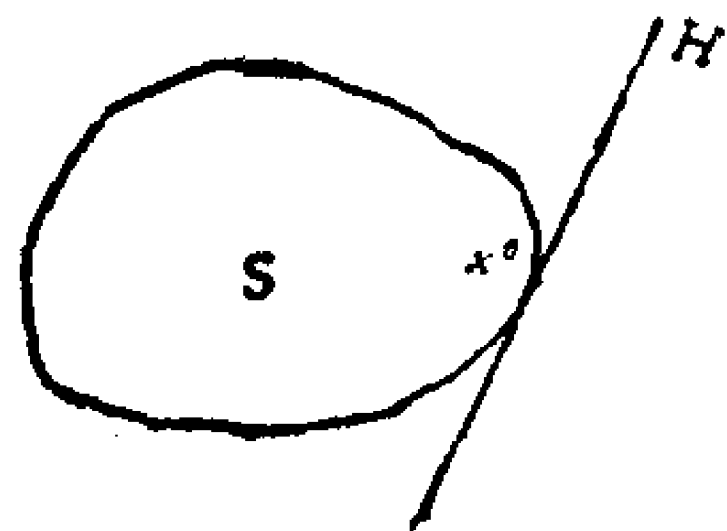
$$\bar{x} = \bar{\lambda}_1 x^1 + \bar{\lambda}_2 x^2 + \dots + \bar{\lambda}_N x^N \quad (14.4)$$

对每一  $i$ ,  $0 < \bar{\lambda}_i < 1$  且  $\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \dots + \bar{\lambda}_N < 1$ ,  $\bar{x} \in S$ . 于是以  $\bar{x}$  为中心半径足够小的球内的每一点  $x$ ,  $x$  的表示式为

$$x = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_N x^N$$

也有  $0 < \lambda_i < 1$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N < 1$ , 因而  $x \in S$ . 即  $\bar{x}$  是  $S$  的内点, 这与  $S$  不包含内点相矛盾. 所以定理成立.

**定理14.5** 设  $S$  是  $R_N$  内不同于  $R_N$  的一个凸集, 以  $S^{(0)}$  表示  $S$  的内点的集. 那么对  $\forall x^0 \in (\bar{S} - S^{(0)})$ ,  $\exists$  一超平面  $H$ ,  $H$  通过  $x^0$  使  $S$  位于  $H$  所界开的两个半空间之一内 (图14.2),  $H$  称为  $S$  的支撑超平面.



**证明** 考察  $x^0 \in (\bar{S} - S^{(0)})$ .

因为  $S$  不同于整个空间,  $\exists \{x^m\} \subset (R_N - \bar{S})$ ,  $x^m \rightarrow x^0$  ( $m \rightarrow \infty$ ). 因为  $\bar{S}$  是闭集, 对每个  $x^m$  点,  $\exists y^m \in \bar{S}$ ,  $y^m$  满足

$$d(y^m, x^m) = \inf_{y \in \bar{S}} d(y, x^m) > 0,$$

图 14.2

这里 $d$ 表示 $R_N$ 中距离 (图14·3)。

以 $H_m$ 表示过 $x^m$ 且与线段 $\overline{x^m y^m}$ 相垂直的超平面, 若 $\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots, \lambda_{mN}$ 是 $\overline{x^m y^m}$ 的方向余弦, 那么 $H_m$ 的方程为

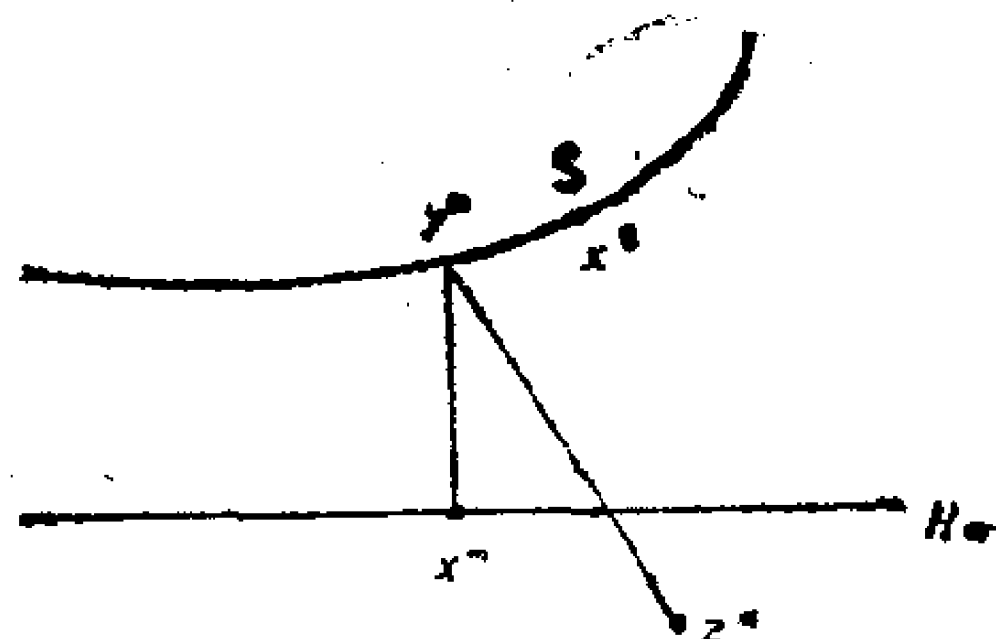


图 14·3

$$H_m = \{x : \sum_{i=1}^N \lambda_{m_i} (x_i - x_i^m) = 0\}, \quad (14.5)$$

其中 $x^m = (x_1^m, x_2^m, \dots, x_N^m)$ . 如果在 $H_m$ 与 $y^m$ 异侧  $\exists$  点 $z^m \in \overline{S}$ , 据 $\overline{S}$ 的凸性, 线段 $\overline{y^m z^m}$ 上的一切点在 $\overline{S}$ 内, 在这种情况下,  $y^m$ 不是 $\overline{S}$ 中最逼近 $x^m$ 的点. 这一矛盾表明 $\overline{S}$ 被包含在半空间

$$P_m = \{x : \sum_{i=1}^N \lambda_{m_i} (x_i - x_i^m) \geq 0\} \quad (14.6)$$

或半空间

$$P_m^* = \{x : \sum_{i=1}^N \lambda_{m_i} (x_i - x_i^m) \leq 0\}$$

两者之一当中. 为了确定起见设为 $P_m$ . 因为 $x^m \rightarrow x^0$ , 存在 $x_{m_i}$ , 使当 $m_k \rightarrow +\infty$ 时, 对 $i=1, 2, \dots, N$ 都有 $\lambda_{m_k i} \rightarrow \lambda_{0 i}$ ,

因为 $\sum_{i=1}^N \lambda_{m_k i}^2$ 对每一 $m_k$ 都等于1, 所以 $\sum_{i=1}^N \lambda_{0 i}^2 = 1$ . 构造通过

点 $x^0$ 的超平面:

$$H = \{x : \sum_{i=1}^n \lambda_{0,i} (x_i - x_i^0) = 0\} .$$

超平面 $H_{m,k}$ 趋向于 $H$ , 且由 $\overline{S} \subset P_{m,k}$ 取极限得

$$\overline{S} \subset P_0 = \{x : \sum_{i=1}^N \lambda_{0,i} (x_i - x_i^0) \geq 0\} .$$

## § 14.2 凸函数

现在研究 $\mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的凸函数, 我们将证明凸函数是连续函数 (定理14.10) .

**定义** 设 $S$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的凸集,  $S$ 上的函数 $f$ 称为凸的  $\iff$  对 $\forall x^1, x^2 \in S$ , 及 $\forall \lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ , 有

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2). \quad (14.7)$$

注意函数的定义域不是凸集, 它不能是凸函数, 即凸集上才可能定义凸函数.

凸函数图象的“上方”是 $\mathbf{R}_{N+1}$ 内的凸集, 如图14.4所示, 这一结果叙述为下面的定理.

**定理14.6** 设 $S$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内一凸集且 $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是凸函数, 那么集 $G = \{(x, y) : x \in S, y \in \mathbf{R}_1, y \geq f(x)\}$ 是 $\mathbf{R}_{N+1}$ 内的凸集. 反之,  $S$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内凸

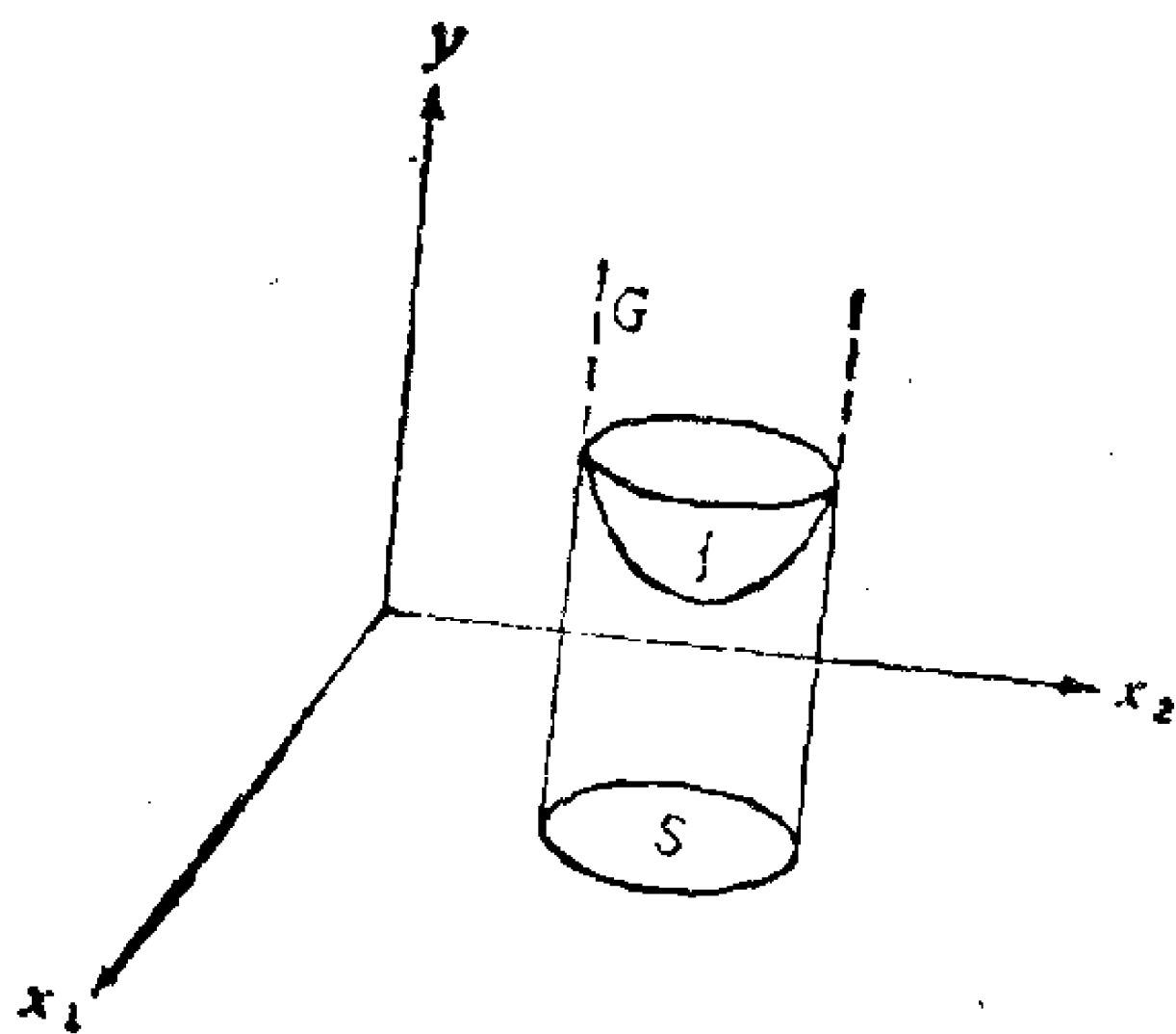


图 14.4



集,  $G$  是  $\mathbf{R}_{N+1}$  内的凸集, 那么  $f$  是  $S$  上的凸函数.

定理14.6的证明是凸集、凸函数定义的直接推论, 把它留给读者. 集  $G$  通常称为函数  $f$  的铭图(epigraph).

下面三个定理所述凸函数的简单性质, 不仅在证明凸函数的连续性时要用到, 下一章也有应用.

**定理14.7** 设  $\mathcal{F} = \{f\}$  是定义在  $\mathbf{R}_N$  内凸集  $S$  上的凸函数的族. 若  $\exists$  函数  $g: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ , 使对所有  $f \in \mathcal{F}$  及  $x \in S$  都有  $f(x) \leq g(x)$  成立. 那么定义

$$F(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f(x), \quad x \in S,$$

则  $F(x)$  是  $S$  上的凸函数.

**证明** 设  $x^1, x^2$  是  $S$  内任意两点, 对  $\forall \varepsilon > 0$  及  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 由上确界定义,  $\exists f \in \mathcal{F}$

$$F[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] < f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] + \varepsilon.$$

因为  $f$  是凸函数, 于是

$$\begin{aligned} F[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] &< f[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2] + \varepsilon \\ &\leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) + \varepsilon \\ &\leq \lambda F(x^1) + (1-\lambda)F(x^2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 所以  $F$  是凸函数.

**定理14.8** 设  $S$  是  $\mathbf{R}_N$  内的凸集,  $x^1, x^2, \dots, x^m$  是  $S$  中的点,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  是满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$  的  $m$  个非负数. 如果  $f$  是  $S$  上的凸函数, 那么

$$f(\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_m x^m) \leq \lambda_1 f(x^1) + \dots + \lambda_m f(x^m).$$

**证明**  $m = 2$  时, 即凸函数定义. 假定当  $k = m - 1$  时定

理成立，证明 $k=m$ 时定理仍成立。据归纳假设，有

$$\begin{aligned} & f(\mu_1 x^1 + \cdots + \mu_{m-1} x^{m-1}) \\ & \leq \mu_1 f(x^1) + \cdots + \mu_{m-1} f(x^{m-1}). \end{aligned}$$

其中 $\mu_i \geq 0$ ， $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_{m-1} = 1$ 。取 $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m}$ ，

$i = 1, 2, \cdots, m-1$ ，便有

$$\begin{aligned} & \bullet \quad f(\lambda_1 x^1 + \cdots + \lambda_m x^m) \\ & = f[(1 - \lambda_m)(\mu_1 x^1 + \cdots + \mu_{m-1} x^{m-1}) + \lambda_m x^m] \\ & \leq (1 - \lambda_m)f(\mu_1 x^1 + \cdots + \mu_{m-1} x^{m-1}) + \lambda_m f(x^m) \\ & \leq (1 - \lambda_m)[\mu_1 f(x^1) + \cdots + \mu_{m-1} f(x^{m-1})] \\ & \quad + \lambda_m f(x^m) \\ & = \lambda_1 f(x^1) + \lambda_2 f(x^2) + \cdots + \lambda_{m-1} f(x^{m-1}) + \lambda_m f(x^m), \end{aligned}$$

即对 $k=m$ 定理仍然成立。根据归纳法原理，定理对任意自然数 $m$ 都成立。

**定理14.9** 设 $S$ 是 $\mathbf{R}_N$ 的凸集， $\mathbf{A}$ 是 $N \times N$ 的矩阵， $b = (b_1, b_2, \cdots, b_N)$ 。定义 $T: \mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_N$ 的线性变换 $y = \mathbf{A}x + b$ 。那么

- (i)  $T(S)$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的凸集。
- (ii) 若 $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是凸函数， $\mathbf{A}$ 是非奇异矩阵，那么 $S' = T(S)$ 上定义 $g(y) = f[\mathbf{A}^{-1}(y - b)]$ 是 $S'$ 上的凸函数。
- (iii) 定义在凸集上的任何线性函数是凸函数。

**证明** (i) 设 $x^1, x^2 \in S$ 。那么 $0 \leq \lambda \leq 1, \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in S$ 。由 $T$ 是线性的，有

$$T(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = \lambda T(x^1) + (1-\lambda)T(x^2)$$

即  $y^1 = Tx^1, y^2 = Tx^2 \in T(S)$ , 对  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 便有

$$\lambda T(x^1) + (1-\lambda)T(x^2) = \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$$

$$= T(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \in T(S),$$

因此  $S' = T(S)$  是凸集.

(ii) 设  $y^1, y^2 \in S'$ , 那么按  $g$  的定义及  $f$  是凸的

$$g(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)$$

$$= f[\lambda A^{-1}(y^1 - b) + (1-\lambda)A^{-1}(y^2 - b)]$$

$$\leq \lambda f[A^{-1}(y^1 - b)] + (1-\lambda)f[A^{-1}(y^2 - b)]$$

$$= \lambda g(y^1) + (1-\lambda)g(y^2).$$

(iii) 设线性函数  $y = L(x)$ , 所谓线性函数是指  $L$  满足:  
 $L(\alpha x^1 + \beta x^2) = \alpha L(x^1) + \beta L(x^2)$ ,  $\alpha, \beta$  是实数. 对  $\forall x^1, x^2 \in S$ , 由  $S$  是凸集, 对  $\forall \lambda \in [0, 1]$ , 有  $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in S$ , 再由  $L(x)$  是线性函数, 那么

$$L(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda L(x^1) + (1-\lambda)L(x^2)$$

成立, 即  $L$  是凸函数.

**引理14.1** 设  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  是  $R_1$  内的区间, 而  $f$  是  $I$  上的凸函数. 对  $\forall x^0 \in (a, b)$ , 定义  $m = \frac{f(x^0) - f(a)}{x^0 - a}$ ,

$l(x) = f(a) + m(x - a)$ ,  $x \in I$ . 那么对于  $x^0 \leq x \leq b$ , 有  $f(x) \geq l(x)$ .

**证明** 定理具有明显的几何意义, 如图 14.5 所示, 在  $x^0 \leq x \leq b$  区间的  $l(x)$  线段位于  $f$  之下. 现在给出严格的证明, 首先注意  $f(x^0) = l(x^0)$ , 对于  $x \in [x^0, b]$ , 由  $f$  是凸函数, 有  $f(x^0) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(x)$ .

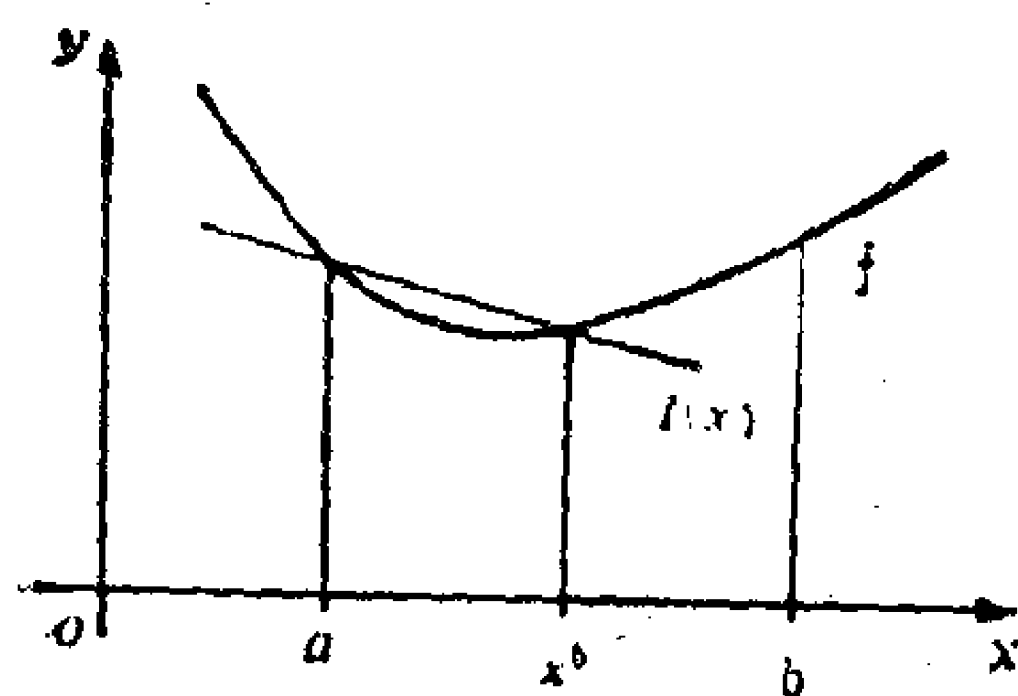


图 14.5

选取  $\lambda = \frac{x^0 - a}{x - a}$ , 这样  $1 - \lambda$

$$= \frac{x - x^0}{x - a}, \text{ 并且}$$

$$f(x) \geq \frac{1}{\lambda} [f(x^0) -$$

$$(1 - \lambda)f(a)] = f(a) + \frac{f(x^0) - f(a)}{x^0 - a} (x - a) = l(x).$$

下一技术性引理对于证明凸函数在其定义域的内点的连续性是必要的。

**引理14.2** 设  $I = \{x : x^1 \leq x \leq x^4\}$  是一区间,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_1$  是  $I$  上的凸函数.  $x^2, x^3$  满足  $x^1 < x^2 < x^3 < x^4$ , 定义

$$m_{ij} = \frac{f(x^i) - f(x^j)}{x^i - x^j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j.$$

若  $|f(x)| \leq M, x \in I$ , 且  $\delta > 0$ , 满足  $x^1 + \delta < x^2 < x^3 < x^4 - \delta$ , 那么

$$(i) \quad m_{12} \leq m_{23} \leq m_{34}. \quad (14.8)$$

$$(ii) \quad |f(x^3) - f(x^2)| \leq \frac{2M}{\delta} |x^3 - x^2| \quad (14.9)$$

**证明** (i)的几何解释如图 14.6 所示,  $m_{ij}$  是联结点  $(x^i, f(x^i)), (x^j, f(x^j))$  的直线之斜率. 因为函数  $f$  是凸的,  $x^2, x^3$  之间的上述直线段位于  $f$  图象的上方, 即当  $x \in [x^2, x^3]$ , 有

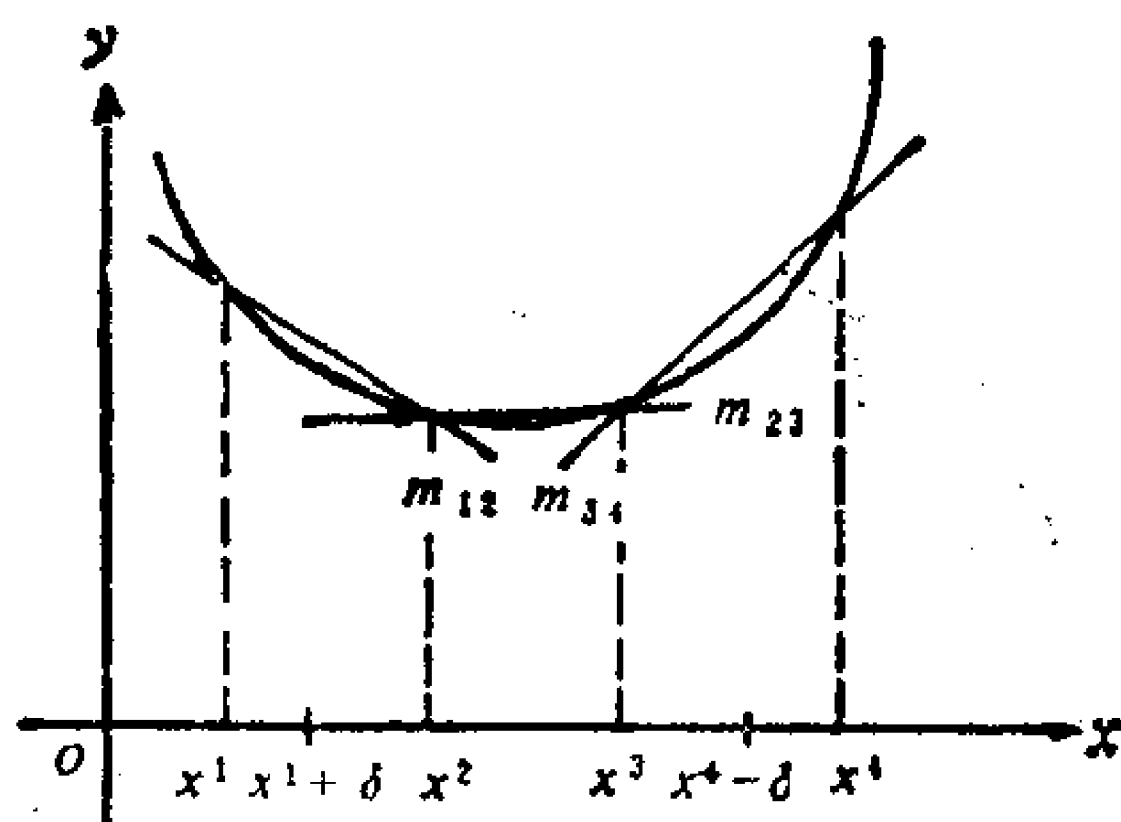


图 14.6

$$f(x^2) + m_{23}(x - x^2) \geq f(x). \quad (14.10)$$

再据引理14.1, 取引理14.1中 $a = x^1$ ,  $x^0 = x^2$ , 有

$$f(x) \geq f(x^1) + m_{12}(x - x^1), \quad x \geq x^2. \quad (14.11)$$

综合(14.10)及(14.11)得

$$f(x^2) + m_{23}(x - x^2) \geq f(x^1) + m_{12}(x - x^1), \\ x^2 \leq x \leq x^3,$$

或者

$$m_{23}(x - x^2) \geq m_{12}(x - x^1) - [f(x^2) - f(x^1)] \\ = m_{12}(x - x^1) - m_{12}(x^2 - x^1) \\ = m_{12}(x - x^2),$$

即 $m_{23} \geq m_{12}$ . 同样可证 $m_{34} \geq m_{23}$ .

为了证明(ii), 注意到

$$m_{34} \leq \frac{|f(x^4) - f(x^3)|}{|x^4 - x^3|} \leq \frac{|f(x^4)| + |f(x^3)|}{|x^4 - x^3|} \\ \leq \frac{2M}{\delta}.$$

类似地,  $m_{12} \geq -\frac{2M}{\delta}$ . 因此得出

$$-\frac{2M}{\delta} \leq m_{12} \leq m_{23} \leq m_{34} \leq \frac{2M}{\delta}$$

$$\text{及 } |m_{23}| \leq \frac{2M}{\delta},$$

或

$$|f(x^3) - f(x^2)| \leq \frac{2M}{\delta} |x^3 - x^2|.$$

注 引理14.2的(ii)说明凸函数 $f: I \rightarrow R_1$ 在 $I$ 的内部的每一闭区间上满足李布希兹条件,因而 $f$ 在 $I$ 的内部是连续的,下面定理14.10将证明这一结果对 $R_N$ 内凸集上定义的凸函数也成立.

以 $Q_N = \{x: -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, N\}$ 表示 $R_N$ 中以原点为中心边长为2的超立方格.当 $\xi \in Q_N$ 且 $\xi_i$ 取0, 1, 或-1的值,这种 $\xi$ 点叫作 $Q_N$ 的格点.例如原点, (1, 0,  $\dots$  0), (0, -1, 0, 1, 0,  $\dots$  0)等都是格点.显然超立方格是凸集.

**引理14.3** 假设 $f: Q_N \rightarrow R_1$ 是凸函数. $\xi$ 表示 $Q_N$ 的格点,  $M_0 = \max_{\xi \in Q_N} |f(\xi)|$ . 那么对于 $\forall x \in Q_N$ ,

$$|f(x)| \leq M, \text{ 这里 } M = 3^N M_0.$$

**证明** 对 $R_N$ 的维数 $N$ 用归纳法证明. 当 $N = 1$ ,  $Q_1 = I = \{x: -1 \leq x \leq 1\}$ . 先用引理14.1, 取 $a = -1, x_0 = 0$ . 那么对于 $0 \leq x \leq 1$

$$f(-1) + [f(0) - f(-1)](x+1) \leq f(x).$$

又因为 $f$ 是凸的, 对 $0 \leq x \leq 1$ 有

$$f(x) \leq (1-x)f(0) + xf(1).$$

令  $M_0 = \max[|f(-1)|, |f(0)|, |f(1)|]$ , 对  $0 \leq x \leq 1$  可知  $f(x)$  介于  $\max[f(0), f(1)]$  及  $\min[f(0), (2f(0) - f(-1))]$  之间, 应有  $|f(x)| \leq 3M_0$ . 再就函数  $g(y) = f(-x)$ ,  $y = -x$  而论, 对  $0 \leq y \leq 1$ , 应有  $|g(y)| \leq 3M_0$ , 即对  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $|f(x)| \leq 3M_0$ . 综合起来, 当  $N = 1$  时定理成立.

现设  $N = k$  时定理成立. 证明对  $N = k + 1$  定理成立. 设  $f$  在  $Q_{k+1}$  上是凸的, 定义

$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_1, x_2, \dots, x_k, i)$ ,  $i = -1, 0, 1$ . 因为  $\varphi_i$  在  $Q_k$  上是凸的, 且由归纳假设

$$\begin{aligned} & |f(x_1, x_2, \dots, x_k, i)| \\ & \leq 3^k \max_{\xi \in Q_k} |f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, i)|, \end{aligned} \quad (14.12)$$

这里  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  是  $Q_k$  中的格点. 函数  $f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$  对固定的  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in Q_k$  是关于  $x_{k+1}$  的单变量的凸函数, 用  $N = 1$  的结果和不等式 (14.12) 便得

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1})| \leq 3^k \cdot 3M_0 = 3^{k+1}M_0,$$

其中  $M_0 = \max_{\xi \in Q_{k+1}} |f(\xi)|$ . 据归纳法原理, 定理对任意自然数

$N$  都成立.

**定理14.10** 设  $S$  是  $R_N$  内凸集,  $f: S \rightarrow R_1$  是一凸函数. 那么  $f$  在  $S$  的内点之集  $S^{(0)}$  上连续. 若对  $\forall x \in S$ ,  $|f(x)| \leq M$ , 那么当  $B(x^1, \delta)$  及  $B(x^2, \delta) \subset S$  时

$$|f(x^1) - f(x^2)| \leq \frac{2M}{\delta} |x^1 - x^2| \quad (14.13)$$

成立.

**证明** 假设  $S$  的内部  $S^{(0)}$  是非空集,  $\forall x^0 \in S^{(0)}$ , 由  $S^{(0)}$  是开集,  $\exists$  以  $x^0$  为中心的立方格含于  $S^{(0)}$  内, 据引理 14.3,  $f$  在这立方格上有界, 按有限覆盖定理, 可以断定  $f$  在  $S^{(0)}$  内的紧子集  $K$  上有界.

先证明不等式 (14.13). 设  $x^1, x^2 \in S$ , 且  $x^1, x^2$  是能使  $B(x^1, \delta)$  及  $B(x^2, \delta)$  都属于  $S$  的内点. 设  $L$  是过  $x^1$  及  $x^2$  的直线, 那么交集  $L \cap S$  是一线段 (当然是凸集). 取  $l = L \cap S$  上的点  $\bar{x}$ , 把  $l$  写为参数方程:

$$x = \bar{x} + \lambda t, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N),$$
  
 $\lambda_i$  是  $l$  的方向余弦,  $t = t_1$  对应  $x^1$  点,  $t = t_2$  对应  $x^2$  点. 那么所有对应于  $t \in (t_1 - \delta, t_2 + \delta)$  的点都是  $S$  的内点. 定义

$$\varphi(t) = f(\bar{x} + \lambda t), \quad t_1 - \delta < t < t_2 + \delta.$$

$\varphi(t)$  在定义域上满足  $|\varphi(t)| \leq M$ , 对  $\varphi(t)$  使用引理 14.2 之不等式 (14.9), 得出 (14.13):

$$\begin{aligned} |f(x^2) - f(x^1)| &= |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \\ &\leq \frac{2M}{\delta} |t_2 - t_1| = \frac{2M}{\delta} |x^2 - x^1|. \end{aligned}$$

因为  $f$  在  $S^{(0)}$  的紧子集上有界, 由 (14.13) 式断定  $f$  在  $S$  的每一内点  $x^0 \in S^{(0)}$  的某球  $B(x^0, \delta)$  上满足李布希兹条件, 因此  $f$  在  $x^0$  点连续.

注 凸函数可能在其边界点发生间断. 例如, 取  $I = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ , 定义  $f: I \rightarrow R_1$  为  $f(x) = x$ , 当  $x \in (0, 1)$ ;  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$ . 那么  $f$  是  $I$  上的凸函数, 它在  $x=0, 1$  间断.

若一凸函数在定义域内点是可微的, 那么可得到下一定



理所述的关于这种函数的支撑超平面的更精确的结果。

**定理14.11** 设  $S$  是  $\mathbf{R}_N$  内的一凸集, 且  $f: S \rightarrow \mathbf{R}_1$  是凸函数,  $x^0 \in S^{(0)}$ .

(i)  $\exists$  实数  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , 使对  $x \in S$  有

$$f(x) \geq f(x^0) + \sum_{i=1}^N a_i (x_i - x_i^0).$$

(ii) 若  $f \in C^1(S^{(0)})$ , 那么  $a_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x=x^0}$ .

(iii) 若  $f \in C^2(S^{(0)})$ , 那么  $f$  在  $S^{(0)}$  上是凸的  $\Leftrightarrow$

对  $\forall \lambda \in \mathbf{R}_N$ ,  $x_0 \in S^{(0)}$ , 不等式

$$\sum_{i,j} \left[ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x=x^0} \right] \lambda_i \lambda_j \geq 0.$$

证明

(i) 设  $f$  的铭图为  $G$ ,  $G = \{(x, y) : x \in S, y \in \mathbf{R}_1, y \geq f(x)\}$ , 由定理14.6  $G$  为  $\mathbf{R}_{N+1}$  中凸集. 令  $y^0 = f(x^0)$ , 则有  $(x^0, y^0) \in \partial G$ . 由定理14.5,  $\exists \mathbf{R}_{N+1}$  中的超平面  $H_0$  通过  $(x^0, y^0)$  使  $G$  在  $H_0$  的一侧. 因  $f$  在  $S^{(0)}$  连续, 点  $(x^0, y^0 + 1)$  是  $G$  的内点. 于是  $H_0$  不是一“竖直”的超平面 (指平面不过  $(x^0, y^0 + 1)$ ), 因此  $H_0$  的方程为

$$y = f(x^0) + \sum_{i=1}^N a_i (x_i - x_i^0),$$

区域  $G$  在  $H_0$  的上侧 (指  $y > f(x^0) + \sum_{i=1}^N a_i (x_i - x_i^0)$  的半空

间)。

(ii)及(iii)的证明,可用 $f$ 带余项的台劳展开及(i)的结果得出。细节留给读者。

## 习 题

1. 设 $A$ 及 $B$ 是 $R_N$ 内的凸的不相交的非空闭集,

证明 $A \cup B$ 不是凸集。

2. 证明 $R_2$ 内每个凸多边形是有限多个半平面的交集。

3. 证明 $R_2$ 内每一含有不在一直线上三个点的凸集 $S$ 必有内点(要求不用定理14.4,直接证明)。

4. 设 $f_1, f_2, \dots, f_p$ 都是定义在 $R_N$ 内凸集 $S$ 上的凸函数。

而 $\alpha_i \geq 0, i=1, 2, \dots, p$ 是给定的数。证明 $\sum_{i=1}^p \alpha_i f_i$ 是凸函

数。举例说明当允许 $\alpha_i$ 取负值时结论不真。

5\*. 设 $S$ 是 $R_2$ 内具有内点且在边界 $\partial S$ 上的每一点 $\exists$ 唯一切线的凸域。证明 $S$ 能内切于一个正方形。

6. 研究3—维空间内满足以下不等式的锥形域的族:

$(\alpha x^2 + \beta y^2)^{\frac{1}{2}} \leq z, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha, \beta$ 是常数。证明任意多个这样域之交是一凸集。

7. 设 $f, g$ 是定义在区间 $I \subset R_1$ 上的非负的凸函数。找出使 $fg$ 成为凸函数的条件。

8. 证明定理14.6。

9. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $I = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ 上收敛。若对 $\forall$

$n, a_n \geq 0$ , 那么 $f$ 是 $I$ 上的凸函数。

10. 设  $S \subset \mathbf{R}_N$ ,  $S$  的凸包是指所有包含  $S$  的凸集之交. 证明  $S$  的凸包是集  $\{x: x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k, x_i \in S, \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1\}$ .
11. 证明  $\mathbf{R}_N$  内开集  $S$  的凸包是开集 (参看习题10).
- \*12.  $\mathbf{R}_N$  的子集  $K$  称为锥, 如果  $K \in \mathcal{K}$ , 则对  $\forall \lambda > 0, \lambda x \in K$ . 证明  $K$  是凸的  $\iff$  若  $x, y \in K$ , 有  $x + y \in K$ . 给出一非凸的锥的例子. 证明: 若  $K_1, K_2$  都是锥, 那么  $K_1 \cap K_2$  及  $K_1 \cup K_2$  都是锥. 若  $K_1$  及  $K_2$  是凸锥, 在什么条件下有  $K_1 \cap K_2, K_1 \cup K_2$  是凸锥?
13. 设  $K$  是  $\mathbf{R}_N$  内含有过原点一整条直线  $l$  的凸锥. 若  $K$  含有内点, 证明  $K$  是  $\mathbf{R}_N$  或是一半空间. [提示: 参看习题12.]
14. 在引理14.2中若还有  $f(x^1) \leq f(x^4)$ , 那么  $m_{13} \leq m_{24}$ .
15. 证明定理14.11之(ii)及(iii).
16. 设  $\mathbf{R}_N$  内一开的凸集  $A$ , 且  $f_n: A \rightarrow \mathbf{R}_1, n = 1, 2, \dots$ . 证明当  $\{f_n\}$  在  $A$  的每一点收敛时, 那么  $\{f_n\}$  在  $A$  的紧子集上一致收敛.
17. 设  $A$  是  $\mathbf{R}_N$  内开的凸集, 且  $f_n: A \rightarrow \mathbf{R}_1$  是凸函数,  $n = 1, 2, \dots$ . 证明当  $\{f_n\}$  一致有界时, 那么  $\{f_n\}$  含有在  $A$  的紧子集上一致收敛的子序列.
18. 设  $A$  是  $\mathbf{R}_N$  内的凸集且  $A^{(0)}$  非空.  $\{f_n\}$  是  $C^1$  类中函数序列且  $|f_n(x)| \leq M_0$ , 及  $|\nabla f_n(x)| \leq M_1$  对所有  $x \in A$  成立. 那么  $\exists$  在  $A$  上一致收敛的  $\{f_n\}$  的子序列.

# 第十五章 场理论、格林定理 和斯托克斯定理

## § 15·1 $\mathbf{R}_1$ 上的矢函数，弧，运动三面形

设  $\vec{OP}$  是从  $\mathbf{R}_N$  的原点到点  $p = (1, 0, 0 \cdots, 0)$  的有向线段。我们把与  $\vec{OP}$  同向平行，其长度为1的有向线段的等价类定义为单位矢  $\mathbf{e}_1$ 。同样，从原点到点  $(0, 1, 0, \cdots, 0), (0, 0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 0, 1)$  的各有向线段的等价类定义为  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \cdots, \mathbf{e}_N$ 。由集  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_N\}$  及实数域  $\mathbf{R}_1$  构成的所有线性组合所生成的线性空间记为  $V_N(\mathbf{R}_N)$ ，简记为  $V_N$ 。  $V_N$  中元素  $\mathbf{v}$  称为矢，即

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a_N \mathbf{e}_N,$$

这里  $a_i$  是实数。线性空间  $V_N$  中矢间的加法及数乘运算是读者熟知的二维、三维矢空间中的运算的直接推广（参看线性代数或本书附录3）。

矢  $\mathbf{v}$  的长度记为  $|\mathbf{v}|$ ,

$$|\mathbf{v}| = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2)^{\frac{1}{2}}.$$

设  $D \subset \mathbf{R}_1$ ,  $f_1, f_2, \cdots, f_N$  是从  $D$  到  $\mathbf{R}_1$  内的函数。定义  $D \rightarrow V_N$  的映象:  $t \in D$

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{e}_1 + f_2(t)\mathbf{e}_2 + \cdots + f_N(t)\mathbf{e}_N, \quad (15.1)$$

$\mathbf{f}$ 是从 $D$ 到 $V_N$ 的一个矢函数.

若给定 $\mathbf{f}: D \rightarrow V_N$ ,  $\mathbf{c} \in V_N$ , 当 $t \rightarrow a$ 时 $\mathbf{f} \rightarrow \mathbf{c} \iff$ 当 $t \rightarrow a$ 时 $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{c}| \rightarrow 0$ . 记为 $\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{c}$ . 或等价地,  $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_N\mathbf{e}_N$ ,

$$\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = c_i, \quad i = 1, 2, \cdots, N.$$

当 $\mathbf{c} = \mathbf{f}(a)$ 时, 称 $\mathbf{f}$ 在 $t = a$ 处连续.  $\mathbf{f}$ 在 $D$ 的每一点连续称 $\mathbf{f}$ 在 $D$ 上连续.

给定 $\mathbf{f}: D \rightarrow V_N$ ,  $\mathbf{f}$ 在 $t = a$ 点的导数为

$$\mathbf{f}'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a)}{h} \quad (15.2)$$

若 $\mathbf{f}$ 按(15.1)给出, 当且仅当 $f_i'(a)$ ,  $i = 1, 2, \cdots, N$ 存在时 $\mathbf{f}'(a)$ 存在, 且

$$\mathbf{f}'(a) = \sum_{i=1}^N f_i'(a)\mathbf{e}_i.$$

若 $P \in \mathbf{R}_N$ , 把含有有向线段 $\vec{OP}$ 的等价类的矢表示为 $\mathbf{v}(\vec{OP})$ . 用有向线段 $\vec{OP}$ 来表示矢, 由(15.2)式给出的导数 $\mathbf{f}'(a)$ 其几何解释如图15.1所示.

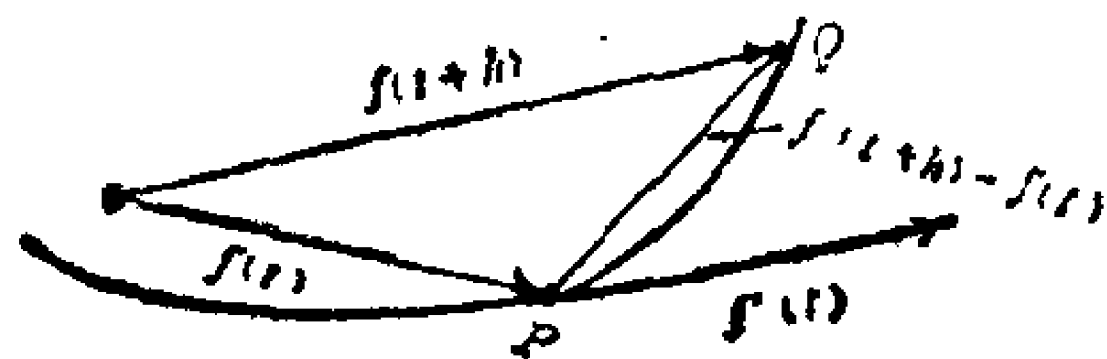


图 15.1

用 $\mathbf{R}_N$ 内的笛卡尔坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 的术语, 函数 $\mathbf{f}$ 是从 $D$ 到 $\mathbf{R}_N$ 内如下给出的映象:

$$x_i = f_i(t) \quad (t \in D), i = 1, 2, \dots, N. \quad (15.3)$$

如果 $f_i$ 及 $f_i'$ 在 $t_0 \in D$ 的一邻域内连续, 且 $i = 1, 2, \dots, N$ 中有一 $k$ ,  $f_k'(t_0) \neq 0$ , 那么 $\exists$ 区间 $t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$ . 在这区间上 $f_k'(t)$ 不等于零 (假定这区间含于 $D$ 内). 应用反函数定理, 在 $x_K^0 = f_K(t_0)$ 的某一邻域内有

$$t = g_K(x_K), \quad g_K[f_K(t)] = t.$$

代入(15.3)得到

$$x_1 = f_1[g_K(x_K)], \quad x_2 = f_2[g_K(x_K)], \dots, x_N = f_N[g_K(x_K)],$$

参数 $t$ 便被消去了.

设 $f$ 是从 $R_1$ 的闭区间 $I$ 到 $V_N$ 内的连续函数, 如果 $f$ 是1—1的, 把 $f$ 的值域 $R(f)$ 称为 $V_N$ 中的一条弧 (图15.2). 一般说



图 15.2

同一条弧可以是若干函数的值域, 每一这样的 $f$ 都是弧的参数表示, 参数 $t$ 在 $I$ 中取值. 定理15.1说明一条弧的两个不同的参数表示之间的关系.

**引理15.1** 设 $I$ 是 $R_1$ 内的区间,  $S: I \rightarrow R_1$ 满足 $t_1 \neq t_2$ 时 $s(t_1) \neq s(t_2)$ , 且 $s$ 是连续函数. 那么 $s(t)$ 在 $I$ 上是严格的单调函数.

**证明** 若不然,  $\exists t_1, t_2$ 及 $t_3, t_4$ 都属于 $I$ ,  $t_2 > t_1$ ,  $t_4 > t_3$ , 而有

$$s(t_2) > s(t_1), s(t_4) < s(t_3).$$

定义

$$\varphi(\lambda) = s(t_2 + \lambda(t_4 - t_2)) - s(t_1 + \lambda(t_3 - t_1)),$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

显然  $\varphi(\lambda)$  是连续的, 且  $\varphi(0) > 0$ ,  $\varphi(1) < 0$ . 因此在  $0, 1$  之间有  $\bar{\lambda}$ , 使  $\varphi(\bar{\lambda}) = 0$ , 即

$$S[t_2 + \bar{\lambda}(t_4 - t_2)] = S[t_1 + \bar{\lambda}(t_3 - t_1)].$$

但是, 对于  $0 < \bar{\lambda} < 1$ ,  $t_2 + \bar{\lambda}(t_4 - t_2) \neq t_1 + \bar{\lambda}(t_3 - t_1)$ , 这与  $s = s(t)$  是 1—1 的相矛盾. 因此  $S$  是  $I$  上严格单调函数.

**定理 15.1** 设  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$  及  $J = \{x : c \leq x \leq d\}$   $f : I \rightarrow V_N, g : J \rightarrow V_N$  都是连续的, 且它们的值域是同一弧  $C$ , 那么  $\exists I \rightarrow J$  的单调连续函数  $S(t)$ , 使

$$f(t) = g[S(t)], t \in I.$$

**证明** 因为  $g$  是 1—1 的, 由定理 6.42 的 (d) 断定  $g^{-1}$  是从弧  $C$  到  $J$  的 1—1 的连续映象. 由复合函数连续性定理, 函数  $S = g^{-1}f$  是  $I \rightarrow J$  上的 1—1 的连续映象. 由引理 15.1 可知  $S$  是严格单调的连续函数.

**定义** 一轨道是指由  $R_1$  的区间到  $V_N$  的连续函数的类, 类中任两个函数之间满足定理 15.1 所述的关系. 类中的任一  $f$  称为轨道的参数表示 (或参数式). 若联系类中  $f, g$ , 使  $f(t) = g[s(t)]$  的  $S(t)$  总是递增的, 称轨道是定向的.

常常把轨道与它的参数式  $f$  等同起来. 若  $R_N$  中从原点出发的有向线段  $\overrightarrow{OP}$  是  $f(t)$  的代表, 随  $t$  变化在  $R_N$  中描出一条曲线  $C$ ,  $C$  是轨道  $f$  的几何解释. 也把轨道与曲线  $C$  等同起来.

注 轨道及弧的定义可以推广到函数定义域是 $\mathbf{R}_1$ 的区间, 而值域属于一距离空间的情况. 因为定理6·42对这样的函数有效, 这里定理15·1的证明不变. 同样, 下面 $V_N$ 中轨道的长度概念也能推广为距离空间中的轨道长度概念.

**定义** 设 $f: I \rightarrow V_N$ 是连续函数, 定义轨道 $f$ 的长度为

$$l(f) = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad (15 \cdot 4)$$

这里上确界是对 $I$ 的所有划分 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ 所取. 若 $l(f)$ 是有限数, 称轨道 $f$ 是可求长的.

注 在 $V_N$ 的 $N=1$ 的特殊情况, 轨道 $f: I \rightarrow V_1$ 的长度为 $\sup_{\Delta} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| = V_a^b f$ , 即 $l(f) = V_a^b f$ .

下一结果与定理12·1及定理12·2类似.

**定理15·2** (a) 设 $f: I \rightarrow V_N$ 是一轨道, 且 $I$ 的划分 $\Delta: a = T_0 < T_1 < \cdots < T_n = b$ ,  $g_K$ 是限制 $f$ 在区间 $I_K = \{t: T_{K-1} \leq t \leq T_K\}$ 的函数,  $K=1, 2, \cdots, n$ . 那么

$$l(f) = l(g_1) + l(g_2) + \cdots + l(g_n).$$

(b) 设 $T \in I$ ,  $I_T = \{t: a \leq t \leq T\}$ ,  $f$ 限制在 $I_T$ 上为 $f_T$ , 定义 $s(T) = l(f_T)$ , 那么 $s$ 是 $I$ 上非负连续函数.

当 $N=2$ 时(a)的证明与定理12·1证明相似. 一般情况借助于归纳法证明. (b)可用定理12·2同样证明步骤获证. 细节留给读者.

定理15·2的(a)简述为: 轨道总长度等于它所分成的若干互不相交的子轨道之长度的总和.

下面定理指出一条弧的长度与其参数方程的选择无关.



**定理15.3** 设 $f$ 与 $g$ 是同一弧的参数式, 那么

$$l(f) = l(g).$$

**证明** 设 $S$ 是定理15.1中的函数, 令

$$L_1 = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

$$L_2 = \sum_{i=1}^m |g(\tau_i) - g(\tau_{i-1})|, \quad (15.5)$$

这里 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ 是 $f$ 的区间的划分, 而 $S$ 当递增时取 $\tau_i = S(t_i)$ (当 $S$ 递减时取 $\tau_i = S(t_{m-i})$ )所得 $g$ 的区间的划分 $\Delta': c = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_m = d$ . 因为 $g(\tau_i) = f(t_i)$ (或 $g(\tau_i) = f(t_{m-i})$ ), 都有 $L_1 = L_2$ . 于是 $l(f) = l(g)$ .

**定理15.4** 设 $f: I \rightarrow V_N$ 是连续的, 且 $f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \cdots + f_N(t)e_N$ . 那么轨道 $f$ 是可求长的 $\iff f_i, i = 1, 2, \cdots, N$ 都在 $I$ 上是有界变差的.

**证明** 设 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ 是 $I$ 的划分, 有

$$|f_i(t_K) - f_i(t_{K-1})| \leq |f(t_K) - f(t_{K-1})|$$

$$\leq \sum_{i=1}^N |f_i(t_K) - f_i(t_{K-1})|, K = 1, 2, \cdots, m.$$

因此

$$V_a^b f_i \leq l(f) \leq \sum_{i=1}^N V_a^b f_i.$$

当弧的参数表示具有充分的可微性，初等微积分中计算弧长、切矢等几何量的公式对 $\mathbf{R}_N$ 的曲线仍然成立。

**定义** 弧 $\Gamma \subset \mathbf{R}_N$ 称为光滑的 $\iff \Gamma$ 具有参数表示 $f$ ，它在区间 $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ 上连续，且 $f'$ 在 $I$ 的内部一致连续，在 $a, b$ 点 $f'$ 的极限不等于零。弧 $\Gamma$ 称为分段光滑的 $\iff$  (i)  $f$ 在 $I$ 上连续；(ii)  $\exists I$ 的划分： $a = T_0 < T_1 < \dots < T_n = b$ ，对 $K = 1, 2, \dots, n$ ， $f$ 限制于 $I_K = \{x : T_{K-1} \leq x \leq T_K\}$ 上的 $f_K$ 是光滑的。

定义中不要求 $f'$ 在 $T_K$ 的左右极限相等。当在其中的 $T_i$ ， $f'$ 左右极限不相等，总规定是其分量不成比例的情况。光滑及分段光滑的轨道其定义是同样的。

**定理15.5** (分段光滑轨道的长度) 设 $f : I \rightarrow V_N$ 是分段光滑的轨道， $f$ 在划分： $a = T_0 < T_1 < \dots < T_n = b$ 的诸子区间上是光滑的，那么

$$l(f) = \int_a^b |f'(t)| dt = \sum_{K=1}^n \int_{T_{K-1}}^{T_K} |f'(t)| dt.$$

**证明** 由定理15.2。只要对 $f$ 在 $I$ 上光滑的情况证明定理就行了。据 $l(f)$ 定义，对 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists$ 划分 $\Delta : a = u_0 < u_1 < \dots < u_p = b$ ，使

$$l(f) - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{i=1}^p |f(u_i) - f(u_{i-1})| \leq l(f). \quad (15.6)$$

另一方面由 $|f'(x)|$ 在 $I$ 上连续，它在 $I$ 上黎曼积分存在，且对上述 $\varepsilon > 0$ ， $\exists \delta > 0$ ，使当划分 $\Delta_1 : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$

的网孔  $\|\Delta_1\| < \delta$ ,  $\forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  都有

$$\left| \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b |f'(t)| dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (15.7)$$

可以认为  $\Delta_1$  是  $\Delta$  的细分, 对于  $f$  的分量  $f_1, \dots, f_N$  在  $[t_{i-1}, t_i]$  区间上应用微分中值定理,  $\exists \xi_{K i} \in (t_{i-1}, t_i)$ , 使

$$f_K(t_i) - f_K(t_{i-1}) = f'_K(\xi_{K i})(t_i - t_{i-1}), i = 1, 2, \dots,$$

$m, k = 1, 2, \dots, N$ . 按照  $|f|$  的定义,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{K=1}^N [f_K(t_i) - f_K(t_{i-1})]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{K=1}^N [f'_K(\xi_{K i})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

再由不等式:

$$\begin{aligned} & \left| \left( \sum_{K=1}^N (f'_K(\xi_{K i}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \sum_{K=1}^N (f'_K(\xi_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ & \leq \left( \sum_{K=1}^N (f'_K(\xi_{K i}) - f'_K(\xi_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

及  $f'_1, f'_2, \dots, f'_N$  在  $I$  上一致连续, 当  $\delta$  充分小, 对  $\|\Delta_1\|$

$< \delta$  的划分  $\Delta_1$  可使右端之中的  $[f'_k(\xi_{ki}) - f'_k(\xi_i)]^2$  对  $\forall i$  及

$\forall k$  一致地小于  $\left(\frac{\varepsilon}{4N(b-a)}\right)^2$ , 于是

$$\left| \sum_{i=1}^m |f'(\xi_i)|(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^N [f'_k(\xi_{ki})]^2 \right)^{\frac{1}{2}} (t_i - t_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (15.8)$$

综合(15.6), (15.7)及(15.8), 得

$$|L(f) - \int_a^b |f'(t)| dt| < \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性, 所以  $L(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$ .

假设  $f: R_1 \rightarrow V_N$  是光滑函数, 定义

$$s(t) = \int_a^t |f'(\tau)| d\tau. \quad (15.9)$$

$s$  表示矢径  $\vec{OP}$  端点  $P$  描出的曲线  $\Gamma$  从点  $f(a)$  到点  $f(t)$  的“有向弧长”。微分(15.9)式得  $s'(t_0) = |f'(t_0)|$ , 并确定一单位矢:

$$T = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|} = \frac{f'(t_0)}{s'(t_0)}.$$

矢 $\mathbf{T}$ 在曲线的每一点 $\mathbf{f}(t_0)$ 与曲线 $\Gamma$ 相切参看(图15·1)因为 $s$ 是 $t$ 的非负递增函数,可取 $s$ 为参数把 $\mathbf{f}, \mathbf{T}$ 作为 $s$ 的矢函数来研究,通常称 $s$ 为自然参数.对自然参数 $s$ ,便有

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds} = \mathbf{T}.$$

任意两矢 $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ ,其数量积 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$ 定义为

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{c}| |\mathbf{d}| \cos \theta$$

$\theta$ 为对应于代表 $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ 的从同一点出发的两有向线段的夹角.

若 $\mathbf{c} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + c_N \mathbf{e}_N$ ,  $\mathbf{d} = d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + d_N \mathbf{e}_N$ ,那么

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_N d_N.$$

如果 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 0$ ,称矢 $\mathbf{c}, \mathbf{d}$ 正交(或垂直).

现在假定 $\mathbf{f} \in C^2$ ,即 $\mathbf{f}$ 的每一分量有连续的二阶导数.由 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ 对 $\forall s$ 成立.对这一恒等式求导得

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \mathbf{T} = 0 \text{ 或 } \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0.$$

这说明 $\mathbf{T}$ 与 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 是互相正交的矢.定义曲线 $\Gamma$ 的曲率 $\kappa$ 为

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\|.$$

$\mathbf{T}$ 表示 $\Gamma$ 的方向, $\kappa$ 是 $\Gamma$ 的方向对弧长之变化率.把 $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ 方向上的单位矢 $\mathbf{N}$ 定义为 $\Gamma$ 的主法矢.这样,有

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N,$$

并称  $R = \frac{1}{\kappa}$  为  $\Gamma$  的曲率半径.

如果  $f$  是充分可微的, 对恒等式  $N \cdot N = 1$  求导, 便知  $\frac{dN}{ds}$

与  $N$  正交. 把  $\frac{dN}{ds}$  表示为

$$\frac{dN}{ds} = \kappa_2 N_1 + \beta T,$$

这里  $N_1$  是与  $N, T$  所决定的平面相正交的单位矢,  $\kappa_2$  称为  $\Gamma$

的第二曲率. 微分  $T \cdot N = 0$  得  $\frac{dT}{ds} \cdot N + T \cdot \frac{dN}{ds} = 0$  即  $\kappa + \beta = 0$ ,

而得  $\beta = -\kappa$ . 继续这一过程可得  $\kappa, \kappa_2, \dots, \kappa_{N-1}$  等  $\Gamma$  的曲率及相应的  $N-1$  条法矢  $N, N_1, \dots, N_{N-2}$ .

对于通常的三维欧几里得空间,  $N_1$  称为副法矢, 习惯上表示为  $B$ . 在  $\Gamma$  的每一点处  $T, N, B$  构成一正交系, 称之为运动三面形.  $\kappa_2$  通常以  $\tau$  表示, 称  $\tau$  为  $\Gamma$  的挠率. 容易证明对平面曲线有  $\tau = 0$ . 选取三维空间的定向, 使

$$B = T \times N,$$

这里“ $\times$ ”表示  $V_3$  内的矢积运算. 微分  $B = T \times N$  得

$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = T \times \frac{dN}{ds} \\ &= T \times (\tau B - \kappa T) = -\tau N. \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \quad \frac{dB}{ds} = -\tau N. \quad (15.10)$$

就是著名的伏莱乃特公式。

**例** 设  $f: R_1 \rightarrow V_3$  定义为

$$f(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}t^3\mathbf{e}_3,$$

求  $T$ ,  $N$ ,  $B$ ,  $\kappa$  及  $\tau$ .

**解** 对  $f(t)$  求导,  $f'(t) = \mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 + 2t^2\mathbf{e}_3$ , 因而

$$|f'(t)| = (1 + 2t^2), \quad s(t) = \int_0^t |f'(t)| dt = t + \frac{2}{3}t^3, \text{ 长度 } s \text{ 以}$$

$t=0$  点算起。所以

$$T = \frac{df}{ds} = \frac{f'}{s'} = (1 + 2t^2)^{-1} [\mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 + 2t^2\mathbf{e}_3].$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} (1 + 2t^2)^{-1}$$

$$= (1 + 2t^2)^{-2} [-4t\mathbf{e}_1 + (2 - 4t^2)\mathbf{e}_2 + 4t\mathbf{e}_3]$$

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = 2(1 + 2t^2)^{-2}.$$

$$N = (1 + 2t^2)^{-1} [-2t\mathbf{e}_1 + (1 - 2t^2)\mathbf{e}_2 + 2t\mathbf{e}_3].$$

为求  $B$ , 计算  $\frac{dN}{ds} = \frac{dN}{dt} (1 + 2t^2)^{-1}$  并由公式  $\frac{dN}{ds} = -\kappa T +$

$\tau$  求出挠率  $\tau$ . 剩下的细节留给读者.

## 习 题

1. 设  $f: \mathbf{R}_1 \rightarrow V_N$ ,  $f = (t, t^2, \dots, t^N)$ . 试消去参数  $t$ , 以  $x_2$  表示  $x_1, x_3, \dots, x_N$ . 在  $\mathbf{R}_1$  的什么样点集内这种消去法成立?
2. 设  $f(t): I \rightarrow V_2$ ,  $f_1(t) = t^2 - t$ ,  $f_2(t) = t^3 - 3t$ ,  
 $I = \{t: -3 \leq t \leq 3\}$ .  
 确定由  $f$  表示的轨道的  $\Gamma$  是否是一条弧?
3. 设  $S$  是一距离空间,  $I, J$  是  $\mathbf{R}_1$  内的区间. 假定  $f: I \rightarrow S$ ,  
 $g: J \rightarrow S$  都是连续的, 其像集是同一弧. 证明存在单调函数  $h: I \rightarrow J$  使  

$$f(t) = g[h(t)], \quad t \in I.$$
4. 设  $f$  是区间  $I \rightarrow S$  的连续函数,  $S$  是距离空间. 给出  $f$  表示之轨道的长度的定义. 并证明与定理 15.2 同样的定理.
5. 对习题 4 中  $f$  叙述并证明与定理 15.3 同样的定理.
6. 设  $f = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $f_1 = 3 \cos t$ ,  $f_2 = 3 \sin t$ ,  $f_3 = 2t$ ,  
 $t \in I$ ,  $I = \{t: 0 \leq t \leq 2\pi\}$ . 求由  $f$  表示的弧的长度.
7. 设  $f: I \rightarrow V_2$ ,  $I = \{t: 0 \leq t \leq 1\}$  及  $f = (f_1, f_2)$ ,  $f_1 = t$ ,

$$f_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \frac{\pi}{t} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}, \quad f \text{ 是否可求长?}$$

习题 8—11 中函数  $f: \mathbf{R}_1 \rightarrow V_3$ , 在给定的  $t$  值处求  $T, N, B$ ,



$\kappa$  及  $\tau$ .

$$8. \quad f(t) = e^t [(\cos t)e_1 + (\sin t)e_2 + e_3], \quad t=0.$$

$$9. \quad f(t) = \frac{1}{3}t^3 e_1 + 2te_2 + \frac{2}{t}e_3, \quad t=2.$$

$$10. \quad f(t) = te_1 + \frac{3}{2}t^2 e_2 + \frac{3}{2}t^3 e_3, \quad t=2.$$

$$11. \quad f(t) = (t \cos t)e_1 + (t \sin t)e_2 + te_3, \quad t=0.$$

12. 设  $f: I \rightarrow V_N$  是  $R_N$  内曲线  $\Gamma$  的参数式. 且  $f \in C^N$ .  $s$  表示

弧长,  $T$  表示切矢. 那么  $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ ,  $N$  正交于  $T$ , 求  $\frac{dN}{ds}$  并

确定单位矢  $N_1$ , 使

$$\frac{dN}{dt} = -\kappa T + \kappa_1 N_1.$$

求  $\frac{dN_1}{dt}$  并确定单位矢  $N_2$ , 使

$$\frac{dN_1}{ds} = -\kappa_1 N + \kappa_2 N_2.$$

继续这一过程, 得出相互正交的单位矢  $T, N, N_1, \dots, N_{N-2}$ , 满足

$$\frac{dN_K}{ds} = -\kappa_K N_{K-1} + \kappa_{K+1} N_{K+1}, \quad \kappa = 2, 3, \dots, N-3.$$

最后 
$$\frac{dN_{N-1}}{ds} = -\kappa_{N-2} N_{N-3}.$$

$\kappa, \kappa_1, \dots, \kappa_{N-2}$ 称为  $\Gamma$  的曲率。

14. 已知  $f: I \rightarrow V_3, I = \{t: a \leq x \leq b\}, f \in C^3$ 。

(a) 证明

$$\kappa^2 = \frac{(f' \times f'') \cdot (f' \times f'')}{|f'|^6}$$

(b) 证明

$$\tau = \frac{f' \cdot (f'' \times f''')}{|f' \times f''|^3}.$$

## § 15.2 矢函数与 $\mathbf{R}_N$ 上的场

这一节研究的  $\mathbf{R}_M \rightarrow V_N$  的函数的微分、积分的基本性质。虽然将利用坐标系作为论证和计算的工具，但所给出的定义与结果具备和坐标系的选取无关的特征时，才着重地加以讨论。

**定义** 设  $D \subset \mathbf{R}_M$ ，从  $D$  到  $V_N$  的矢函数是指映象  $f: D \rightarrow V_N$ 。若  $V_N$  就是  $V_1$  (很自然地把  $V_1$  和  $\mathbf{R}_1$  等同) 那么  $f$  称为数量函数。矢函数、数量函数也称为矢场、数量场。

在客观物理世界中存在着各种实际的场，如温度场、力场、速度场等，因而场的概念把矢函数、数量函数想象为分布于  $\mathbf{R}_M$  区域  $D$  上的矢场、数量

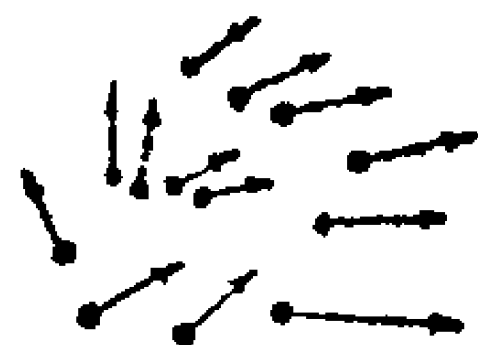


图 15.3

场有着很重要的实际意义 (图15.3所示是  $M = N = 2$  的情况)。

设  $D \subset \mathbf{R}_M, f: D \rightarrow V_N$  是矢函数。  $V_N$  的正交基是互相

正交的 $N$ 个单位矢 $e_1, e_2, \dots, e_N$ 的集, 即

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当 } i=j, i, j=1, 2, \dots, N. \\ 0 & \text{当 } i \neq j, \end{cases}$$

这样, 对 $\forall p \in D$ ,  $f$ 能表示为

$$f(p) = \sum_{i=1}^N f_i(p) e_i \quad (15 \cdot 11)$$

其中 $f_i: D \rightarrow R_1, i=1, 2, \dots, N$ .

根据(15·11)式, 矢场 $f$ 由数量场 $f_1, f_2, \dots, f_N$ 来描写. 这样, 于第六、七、八章所研究过的 $R_M \rightarrow R_1$ 的函数的性质, 通过(15·11)式转化为 $R_M \rightarrow V_N$ 的矢函数的性质. 例如,  $f$ 在 $p$ 点连续, 当且仅当 $f_i$ 都在 $p$ 点连续( $i=1, 2, \dots, N$ ).

为简便, 将经常研究 $R_N \rightarrow V_N$ 的函数 $f$ , 许多结果仅需稍作修改, 对 $R_M \rightarrow V_N$ 的函数也成立.

与第八章对数量函数给出的积分定义类似, 定义矢函数的积分概念.

**定义** 设 $D$ 是 $R_N$ 内的开集,  $u: D \rightarrow V_N$ 是矢函数.  $F \subset D$ 为 $R_N$ 内的图形.  $u$ 在 $F$ 上是可积的 $\iff \exists$  矢 $L \in V_N, L$ 具有性质: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 使 $F$ 的划分 $\Delta = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ ,  $\Delta$ 的网孔 $\|\Delta\| < \delta$ , 及在 $F_i$ 内任取点 $p_i$ 都有

$$\left| \sum_{i=1}^n u(p_i) V(F_i) - L \right| < \varepsilon,$$

这里 $V(F_i)$ 表示 $F_i$ 的体积。称 $L$ 为 $u$ 在 $F$ 上的积分，记为

$$L = \int_F u dV.$$

$$\text{如果 } u = \sum_{i=1}^N u_i(p) e_i, \quad (15 \cdot 12)$$

那么 $u$ 在 $F$ 上可积 $\iff$ 每一数量函数 $u_i$ 在 $F$ 上可积，这时有

$$\int_F u dV = \sum_{i=1}^N \left( \int_F u_i dV \right) e_i. \quad (15 \cdot 13)$$

据(15·13)立即得出 $u$ 在 $F$ 上的积分具有唯一性。同样，可得矢函数积分的基本性质。

设 $v \in V_N$ ，以 $R_N$ 中的有向线段 $\overrightarrow{P_0 P}$ 表示，通常用 $v(\overrightarrow{P_0 P})$ 表示这一矢。

**定义** 设 $P_0 \in D \subset R_N$ ， $a$ 是 $V_N$ 中的一单位矢。 $W: D \rightarrow V_N$ 。 $W$ 沿方向 $a$ 在 $P_0$ 点的方向导数为

$$D_a W(P_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{W(p) - W(P_0)}{h}$$

这里 $P \in D$ ，使 $v(\overrightarrow{P_0 P}) = ha$ ， $h$ 为正数（图15·4）。

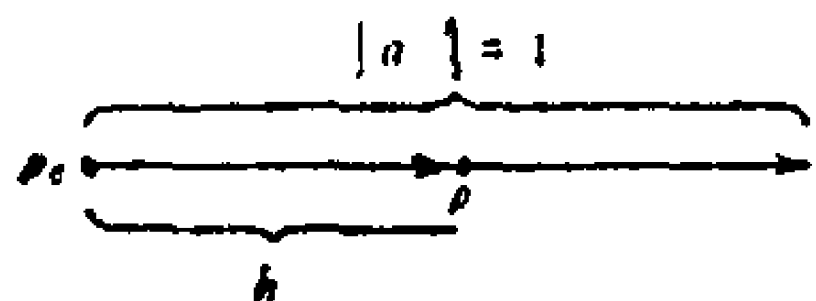


图 15·4

称 $W$ 在 $D$ 内是连续可微的 $\iff W$ 及 $D_a W$ 在 $D$ 上连续，这里 $a$ 表示 $V_N$ 中任意的单位矢。把连续可微的 $W$ 仍记成 $W \in C'(D)$ 。

为了导出方向导数的计算公式，引用 $\mathbf{R}_N$ 中的坐标系。采用 $W(P)$ ， $P \in \mathbf{R}_N$ 的记法是指函数与坐标无关的特性。当引入了笛卡尔坐标系 $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbf{R}_N$ ，这时采用 $W(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 或 $W(x)$ 的记法。若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ 是 $V_N$ 内的正交基，并在 $\mathbf{R}_N$ 中引入笛卡尔坐标系，那么

$$W(x) = \sum_{i=1}^N W_i(x) \mathbf{e}_i,$$

这里每一数量函数 $W_i(x)$ 是用坐标系的坐标变数表示出来的。总之，对 $W$ 采用上述两种表示是为了清楚地看出在什么地方用了坐标系。

#### 定理15.6

(i) 设 $\mathbf{a}$ 是单位矢， $\mathbf{a} \in V_N$ 。 $W$ 是 $D$ 上连续可微数量场， $D \subset \mathbf{R}_N$ 。如果 $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + \dots + a_N \mathbf{e}_N$ ，那么

$$D_{\mathbf{a}} W = \sum_{i=1}^N \frac{\partial W}{\partial x_i} a_i \quad (15.14)$$

(ii) 如果 $W: D \rightarrow V_N$ 是矢场，且 $W = \sum_{i=1}^N W_i \mathbf{e}_i$ ，

$W_i$ 在 $D$ 上是连续可微的数量函数。那么

$$D_{\mathbf{a}} W = \sum_{i=1}^N D_{\mathbf{a}} W_i \mathbf{e}_i = \sum_{i,j=1}^N W_{i;j} a_j \mathbf{e}_i \quad (15.15)$$

**证明** (i) 当 $\mathbf{a}$ 是某坐标方向的单位矢，例如说 $x_i$ 轴方向，

那么  $D_a W$  是  $W$  关于  $x_j$  的偏导数, 即  $D_a W = \frac{\partial W}{\partial x_j}$ , (15·14) 成立.

在一般情况下, 固定点,  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ , 并定义

$$\varphi(t) = W(x_1^0 + a_1 t, \dots, x_N^0 + a_N t).$$

按方向导数定义, 并应用定理7·3所述的链法则 求  $\varphi'(0)$ , 便得

$$D_a W = \sum_{i=1}^N \frac{\partial W}{\partial x_i} a_i.$$

(ii) 由  $W = \sum_{i=1}^N W_i e_i$  及公式(15·14)立即可得

$$\begin{aligned} D_a W &= \sum_{i=1}^N (D_a W_i) e_i = \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N W_{i;j} a_j \right) e_i \\ &= \sum_{i,j=1}^N W_{i;j} a_j e_i \end{aligned}$$

下一定理指出数量函数的方向导数, 可以表示成所给方向的单位矢与一确定的矢场的数量积. 尽管在定理证明中使用了坐标系, 但这一结果与坐标系无关.

**定理15·7** 设  $f: D \rightarrow \mathbb{R}_1$  是定义在  $D \subset \mathbb{R}_N$  的连续可微的数量场. 那么存在唯一的矢场,  $W: D \rightarrow V_N$ , 使对  $\forall a \in V_N$ ,  $|a| = 1$  及  $P \in D$ , 有

$$D_a f(P) = a \cdot W(P) \quad (15·16)$$

如果  $e_1, e_2, \dots, e_N$  是  $V_N$  内单位矢的正交系, 那么对

$\forall x \in D$

$$W(x) = \sum_{j=1}^N f_{,j}(x) e_j. \quad (15 \cdot 17)$$

**证明** 由公式(15·14), 求得

$$D_a f(x) = \sum_{j=1}^N f_{,j}(x) a_j. \quad (15 \cdot 18)$$

按(15·17)定义 $W(x)$ , 显然 $W$ 与 $a$ 的数量积为  $\sum_{j=1}^N f_{,j}(x) a_j$ ,

即满足(15·16)式. 为了证明矢场 $W$ 的唯一性, 设 $W'$ 是满足(15·16)的另一矢场. 那么对任意的单位矢 $a$ , 都有

$$(W - W') \cdot a = 0.$$

如果 $W - W' \neq 0$ , 取 $a = \frac{W - W'}{|W - W'|}$ 这一单位矢, 而

$$(W - W') \cdot a = |W - W'| \neq 0,$$

便导致矛盾.

**定义** 定理15·7中(15·16)式所确定的矢 $W$ 称为 $f$ 的梯度, 以 $\text{grad} f$ 或 $\nabla f$ 表示.

**注** 当 $f$ 是从 $R_N$ 到 $R_1$ 的数量场, 通常称 $f(p) = \text{常数}$ 的那些 $p$ 的集合是 $R_N$ 内的超曲面. 过曲面的点 $p$ 与曲面相切的矢 $a$ 满足  $\sum_{i=1}^N f_{,i}(P) a_i = 0$ , 这里

$$a = \sum_{i=1}^N a_i e_i. \text{ 因此 } \nabla f \text{ 在超曲面 } (f(p) = \text{常数}) \text{ 的每个点 } p \text{ 处与曲面相正}$$

交.

**例1** 设  $e_1, e_2, e_3$  是  $V_3(R_3)$  内的单位正交基, 给定

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3,$$

$$u(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 - x_2 + x_3)e_1 + (2x_2 - 3x_3)e_2 \\ + (x_1 + x_3)e_3,$$

$$a = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

求出  $\nabla f$  及  $D_a u$  用  $x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3$  表示的公式。

**解** 按照(15·17), 求得

$$\nabla f = 3(x_1^2 - x_2x_3)e_1 + 3(x_2^2 - x_1x_3)e_2 \\ + 3(x_3^2 - x_1x_2)e_3.$$

应用(15·15)得

$$D_a u = (2x_1\lambda - \mu + \nu)e_1 + (2\mu - 3\nu)e_2 + (\lambda + \nu)e_3.$$

**定理15·8** 设  $f, g, u$  都是  $D \subset R_N$  上的连续可微的数量场, 而  $h: R_1 \rightarrow R_1$  是连续可微函数,  $u$  的值域含于  $h$  的定义域内. 那么

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g,$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}[g\nabla f - f\nabla g], \quad (g \neq 0)$$

$$\nabla h(u) = h'(u)\nabla u.$$

**证明** 仅证明第二个公式其余留给读者去作. 设  $e_1, e_2,$



...,  $\mathbf{e}_N$  是  $V_N$  内正交基. 由 (15.17) 式计算  $\nabla(f \cdot g)$  得

$$\nabla(f \cdot g) = \sum_{i=1}^N (fg)_{,i} \mathbf{e}_i,$$

而  $(fg)_{,i} = fg_{,i} + f_{,i}g$  代入上式, 求得

$$\nabla(fg) = \sum_{i=1}^N (fg_{,i} + f_{,i}g) \mathbf{e}_i = f \nabla g + g \nabla f.$$

算子  $\nabla$  作用于  $\mathbf{R}_N \rightarrow \mathbf{R}_1$  的连续可微的数量场 得 出一  $\mathbf{R}_N \rightarrow V_N$  的连续的矢场, 在笛卡尔坐标系里可以把算子  $\nabla$  形式地记为公式

$$\nabla \cdot = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i.$$

假设  $\mathbf{W}$  是  $\mathbf{R}_N$  到  $V_N$  的矢场, 其坐标表示 为  $\mathbf{W} = \sum_{i=1}^N W_i \mathbf{e}_i$ ,

我们把  $\nabla \cdot \mathbf{W}$  定义为

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial W_i}{\partial x_i}.$$

称为  $\mathbf{W}$  的散度.

$\nabla$  及  $\nabla \cdot \mathbf{W}$  都具有与坐标系无关的意义, 前者由定理 15.7 可见, 后者将于定理 15.9 证明.

**定义** 数量函数  $f$  在其定义域  $D$  中满足  $f(P) \neq 0$  的  $P$  点所组成集的闭包称为  $f$  的支集, 若  $f$  的支集是紧集, 称  $f$  在  $D$  内有

紧支集.  $n$  是非负整数, 若  $f \in C^n$  且  $f$  具有紧支集, 则用  $f \in C^n_0(D)$  表示.

**引理15.2** 设  $D$  是  $R_N$  内的开图形且设  $f \in C^1_0(D)$ , 那么

$$\int_D f_{,j}(x) dV = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

**证明** 设  $S$  是  $f$  的紧支集, 那么在  $D - S$  上  $f \equiv 0$ ,  $\nabla f \equiv 0$ . 设  $R = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N); a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, 2, \dots, N\}$  是其内部含有  $\overline{D}$  的超方格, 延拓  $f$ , 于  $R - D$  上令  $f = 0$ . 先对  $x_j$  而后对其余  $N-1$  个变量积分, 显然有

$$\begin{aligned} \int_D f_{,j}(x) dV_N &= \int_R f_{,j}(x) dV_N \\ &= \int_{R'} \left[ \int_{a_j}^{b_j} f_{,j}(x) dx_j \right] dV_{N-1} \\ &= \int_{R'} [f(b_j, x') - f(a_j, x')] dV_{N-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

这里  $x'$  表示  $x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_N)$  去掉第  $j$  个坐标的  $R_{N-1}$  中点  $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N)$ .

下一引理在分析的许多分支内有用, 它指出当连续函数  $f$  与任一有紧支集的光滑函数的乘积函数的积分恒为零时,  $f$  必恒为零.

**引理15.3** 设  $D$  是  $R_N$  内的开图形, 数量函数  $f$  在  $D$  上连续, 如果对  $\forall g \in C^1_0(D)$ , 都有

$$\int_D fg dV_N = 0. \quad (15 \cdot 19)$$

那么在 $D$ 上 $f \equiv 0$ .

**证明** 用反证法. 假若  $\exists x^0 \in D$ ,  $f(x^0) \neq 0$ . 可以认为  $f(x^0) > 0$ , 不然可以讨论  $-f$ . 由 $f$ 是连续的, 而 $D$ 是开的,  $\exists$  球  $B(x^0, 3r_0) \subset D$ , 且在球  $B(x^0, 3r_0)$  上  $f > \delta > 0$ . 以 $r$ 表示 $x$ 到 $x^0$ 的距离, 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{1}{r_0^3} (2r - r_0)(r - 2r_0)^2, & \text{当 } r_0 \leq r \leq 2r_0, \\ 0, & \text{当 } 2r_0 \leq r, \end{cases}$$

容易验证  $g(x) \in C_0^1(D)$ , 且  $g(x) \geq 0$ . 而

$$\begin{aligned} \int_D fg dV_N &= \int_{B(x^0, 3r_0)} fg dV_N \geq \int_{B(x^0, r_0)} fg dV_N \\ &= \int_{B(x^0, r_0)} f dV_N > \delta V[B(x^0, r_0)] > 0, \end{aligned}$$

这与(15·19)式相矛盾. 因此在 $D$ 上 $f \equiv 0$ .

注 (15·19)式中限制 $g \in C_0^\infty(D)$ 时, 引理结论仍成立. 为此, 以 $g$ 的平滑(参看§13·3)代替 $g$ , 按同样方法证明.

现在证明散度算子与坐标系无关.

**定理15·9** 设 $D$ 是 $R_N$ 内一开图形,  $W \in C^1(D)$ 是一矢量场, 那么存在唯一的在 $D$ 上连续的数量场 $v$ , 使对 $\forall u \in C_0^1(D)$ , 有

$$\int_D (u v + \nabla u \cdot \mathbf{W}) dV = 0. \quad (15 \cdot 20)$$

并且若  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  是一正交基, 对每一点  $x \in D, \mathbf{W}(x)$

$$= \sum_{j=1}^N W_j(x) \mathbf{e}_j. \text{ 那么}$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} W_j(x). \quad (15 \cdot 21)$$

**证明** 按(15·21)式来定义  $v$ . 对  $\forall u \in C_0^1(D)$ , 据引理 15.2,

$$\begin{aligned} \int_D (u v + \nabla u \cdot \mathbf{W}) dV &= \int_D \sum_{j=1}^N \left( u \frac{\partial}{\partial x_j} W_j + \frac{\partial u}{\partial x_j} W_j \right) dV \\ &= \sum_{j=1}^N \int_D \frac{\partial}{\partial x_j} (u W_j) dV = 0. \end{aligned}$$

为了证明  $v$  的唯一性, 再设  $v'$  也是满足(15·20)的数量场. 将  $v, v'$  满足的(15·20)相减得

$$\int_D (v - v') u dV = 0 \quad \text{对 } \forall u \in C_0^1(D) \text{ 成立.}$$

根据引理 15.3, 便有  $v' \equiv v$ .

**定义** 按(15·20)所确定的数量场  $v$ , 它在任一坐标系之下由(15·21)所定义, 称为  $\mathbf{W}$  的散度. 记作  $v = \operatorname{div} \mathbf{W}$  或  $v = \nabla \cdot \mathbf{W}$ .

注意(15·20)式所确定的  $v$  不依赖于坐标系的选取。引用坐标系的(15·21)式, 适合于实际计算  $v$ 。

**定理15·10** 设  $D$  是  $\mathbb{R}_N$  内的开集, 且  $W, W_1, \dots, W_N$  是属于  $C^1$  的  $D$  上的矢量场,  $f$  是属于  $C^1$  的  $D$  上的数量场,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  都是实数。那么

$$(a) \quad \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^n c_i W_i \right) = \sum_{i=1}^n c_i \operatorname{div} W_i,$$

$$(b) \quad \operatorname{div}(fW) = f \operatorname{div} W + \nabla f \cdot W.$$

证明留给读者。

**例2** 把地球当作球体, 取坐标原点在地球中心,  $R$  为地球半径,  $g$  表示地面上的重力加速度。对  $\mathbb{R}_3$  中的点  $p$ ,  $r$  是以  $\vec{OP}$  为其表示的矢, 令  $r = |r|$ 。经典物理中把重力矢量场叫作地球的重力场, 表示为

$$v(p) = -\frac{gR^2}{r^3} r, \text{ 当 } r > R.$$

试证明  $\operatorname{div} v(p) = 0 \quad (r > R)$ 。

**解** 用定理15·10的(b)求得

$$\operatorname{div} v = \operatorname{div} \left( -\frac{gR^2}{r^3} r \right) = -\frac{gR^2}{r^3} \operatorname{div} r - \left( \nabla \frac{gR^2}{r^3} \right) \cdot r.$$

下一步引入正交基  $e_1, e_2, e_3$ , 有

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad \operatorname{div} r = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\nabla r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}}(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

用定理15·8的公式及上面等式，得

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{3gR^2}{r^3} - \left( \frac{-3gR^2}{r^4} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{r} = 0.$$

在 $V_3$ 中两矢的矢积（或称叉积）可以用来引入一个作用于光滑矢场的新的微分算子。下面我们讨论这一微分算子，若 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $V_3$ 的正交基，形式地构造一个算子

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (15 \cdot 22)$$

**定理15·11** 设 $D$ 是 $R_3$ 内开集， $\mathbf{u} \in C^1(D)$ 是 $D$ 上的矢场，且设 $R_3$ 两个可能定向已选定一种定向。那么 $\exists$ 唯一的 $D \rightarrow V_3$ 的连续矢场 $\mathbf{W}$ ，使对每个常矢 $\mathbf{a}$ ，有

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{a} \quad (15 \cdot 23)$$

如果 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为定向的 $R_3$ 中坐标系的正交基，那么矢 $\mathbf{W}$ 由公式(15·23)确定。

注  $R_3$ 的两种定向是指在 $R_3$ 中选取两正交单位矢 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ ，第三个单位矢可能有两种选取：其一是 $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ ，其二是 $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1$ 。我们说 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 为定向 $R_3$ 的正

交基, 指取  $e_3 = e_1 \times e_2$ .

**定理15.11的证明** 在给定正交基  $e_1, e_2, e_3$  之下, 记  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ ,  $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ . 由矢积公式可得

$$\begin{aligned} u \times a &= (u_2 a_3 - u_3 a_2) e_1 + (u_3 a_1 - u_1 a_3) e_2 \\ &\quad + (u_1 a_2 - u_2 a_1) e_3 \end{aligned}$$

运用散度公式(15.21), 求得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u \times a) &= a_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - a_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + a_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - a_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ &\quad + a_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - a_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

若令  $W_1 = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$ ,  $W_2 = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$ ,

$$W_3 = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right),$$

那么

$$\operatorname{div}(u \times a) = W_1 a_1 + W_2 a_2 + W_3 a_3 = W \cdot a,$$

最右端的  $W = W_1 e_1 + W_2 e_2 + W_3 e_3$ . 这样得到的  $W$  是唯一的. 如果  $W'$  是另一这样的矢场, 对任一单位矢, 都有  $W \cdot a = W' \cdot a$ , 由此  $W = W'$ .

**定义** 定理15.11中的矢  $W$  称为  $u$  的旋度, 以  $\operatorname{curl} u$  或  $\nabla \times u$  表示.

注意这样定义的 $W$ ，由(15·23)式可知与坐标系无关，而引入坐标系的(15·22)式，运用来实际计算 $\text{curl } u$ 。旋度算子的基本性质如下：

**定理15·12** 设 $D$ 是 $R_3$ 中开集， $u, v, u_1, \dots, u_n$ 都是 $D$ 到 $V_3$ 的属于 $C^1$ 的矢量场， $f$ 是 $D$ 上的数量场， $C_1, C_2, \dots, C_n$ 是实数。那么

$$(a) \quad \text{curl} \left( \sum_{i=1}^n C_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n C_i (\text{curl } u_i).$$

$$(b) \quad \text{curl}(fu) = f \text{curl } u + \nabla f \times u.$$

$$(c) \quad \text{div}(u \times v) = v \cdot \text{curl } u - u \cdot \text{curl } v.$$

$$(d) \quad \text{当 } \nabla f \in C^1(D), \text{ 有 } \text{curl } \nabla f = 0.$$

$$(e) \quad \text{当 } v \in C^2(D), \text{ 有 } \text{div } \text{curl } v = 0.$$

**证明** 只证明(b)，余下的留给读者。设 $e_1, e_2, e_3$ 是一组正交基，令 $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ 。那么由(15·22)式

$$\begin{aligned} \text{curl}(fu) &= \left( \frac{\partial(fu_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(fu_2)}{\partial x_3} \right) e_1 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(fu_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(fu_3)}{\partial x_1} \right) e_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial(fu_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(fu_1)}{\partial x_2} \right) e_3. \end{aligned}$$

因此

$$\text{curl}(fu) = f \text{curl } u + \left( u_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) e_1$$



$$\begin{aligned}
& + \left( u_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 \\
& + \left( u_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3.
\end{aligned} \tag{15.24}$$

由  $\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3$ , 并用矢积公式,

(15.24)恰好成为

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{u}) = f\operatorname{curl}\mathbf{u} + \Delta f \times \mathbf{u}.$$

定理15.12的(d)指出: 若 $\mathbf{u}$ 是数量场 $f$ 的梯度, 即 $\mathbf{u} = \nabla f$ , 那么 $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$ . 自然要问条件 $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$ 是否蕴含 $\mathbf{u}$ 是某一数量函数 $f$ 的梯度? 在一定条件之下这一命题成立. 当 $\mathbf{u} = \nabla f$ , 这时也即

$$u_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad u_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad u_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

或者

$$df = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3. \tag{15.25}$$

如果由条件 $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$ , 导出  $\exists f$ , 使 $\mathbf{u} = \nabla f$ , 这等价于(15.25)式右端恰好是某一函数的全微分.

**例3** 设矢场为

$$\mathbf{u} = 2x_1x_2x_3\mathbf{e}_1 + (x_1^2x_3 + x_2)\mathbf{e}_2 + (x_1^2x_2 + 3x_3^2)\mathbf{e}_3,$$

验证 $\operatorname{curl}\mathbf{u} = 0$ , 并求函数 $f$ , 使 $\nabla f = \mathbf{u}$ .

**解** 用公式(15.22)计算 $\nabla \times \mathbf{u}$ , 有

$$\operatorname{curl} \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}, & \frac{\partial}{\partial x_2}, & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 2x_1x_2x_3, & x_1^2x_3 + x_2, & x_1^2x_2 + 3x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1^2 - x_1^2)\mathbf{e}_1 + (2x_1x_2 - 2x_1x_2)\mathbf{e}_2$$

$$+ (2x_1x_3 - 2x_1x_3)\mathbf{e}_3 = 0.$$

寻求函数  $f$ , 使

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1x_2x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2x_3 + x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2x_2 + 3x_3^2.$$

积分第一方程, 得

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2x_3 + c(x_2, x_3).$$

将  $f$  对  $x_2, x_3$  求导, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^2x_3 + \frac{\partial c}{\partial x_2} = x_1^2x_3 + x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^2x_2 + \frac{\partial c}{\partial x_3} = x_1^2x_2 + 3x_3^2,$$

得出

$$\frac{\partial c}{\partial x_2} = x_2, \quad \frac{\partial c}{\partial x_3} = 3x_3^2,$$

对  $\frac{\partial c}{\partial x_2} = x_2$  积分得

$$c = \frac{1}{2}x_2^2 + K(x_3), \quad K'(x_3) = 3x_3^2, \quad K(x_3) = x_3^3 + K_1.$$

最后得

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^3 + K_1,$$

这里 $K_1$ 是常数.

## 习 题

1. 设 $D$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的开集。 $u: D \rightarrow V_N$ 是矢函数， $F$ 是含于 $D$ 内

的图形，且 $\int_F u dV$ 存在，证明积分值是唯一的。

2. 在习题1的条件之下，设 $e_1, e_2, \dots, e_N$ 是 $V_N$ 的正交基，证明公式

$$\int_F u dV = \sum_{i=1}^N \left( \int_F u_i dV \right) e_i.$$

3. 设 $u: \mathbf{R}_2 \rightarrow V_2$ ,  $u(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2)e_1 + 2x_1x_2e_2$ ,

$$F = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}. \text{ 求 } \int_F u dV.$$

习题4—7, 用 $(x_1, x_2, x_3)$ 及 $(e_1, e_2, e_3)$ 表示 $\nabla f(x)$ ,

并求 $D_a f(\bar{x})$ ,  $a$ 是给出的单位矢,  $\bar{x}$ 是给出的点。

4.  $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_3 - x_3^2$ ,

$$a = \frac{1}{3}(2e_1 - 2e_2 - e_3), \quad \bar{x} = (1, -1, 2).$$

5.  $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 + x_3^2$ ,

$$a = \frac{1}{7}(3e_1 + 2e_2 - 6e_3), \quad \bar{x} = (2, 1, -1).$$

$$5. \quad f(x) = e^{x_1} \cos x_2 + e^{x_2} \cos x_3,$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3), \quad \bar{x} = (1, \pi, -\frac{1}{2}).$$

$$7. \quad f(x) = x_1^2 \log(1 + x_2^2) - x_3^3,$$

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{3}e_1 + e_3), \quad \bar{x} = (1, 0, -2).$$

习题8—9, 以 $(x_1, x_2, x_3), (e_1, e_2, e_3)$ 表示 $D_x W(x)$ 并求 $D_x W(x)$ 在给定的点 $\bar{x}$ 的值.

$$8. \quad W(x) = (x_1 - 2x_2)e_1 + x_2x_3e_2 - (x_1^2 - x_3^2)e_3,$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{14}}(3e_1 + 2e_2 - e_3), \quad \bar{x} = (2, -1, 3).$$

$$9. \quad W(x) = x_2x_3e_1 + x_1x_3e_2 + x_1x_2e_3,$$

$$a = \frac{1}{3}(e_1 + 2e_2 - 2e_3), \quad \bar{x} = (1, 2, -1).$$

10. 证明定理15.8中未证明的第一、三、四公式.

11. 证明如果引理15.3的(15.19)的 $g$ 限于 $C_0^\infty(D)$ 类中的函数, 引理仍成立.

12. 证明定理15.10.

习题13—17求给定的 $x$ 点的 $\operatorname{div} v(x)$ 值.

$$13. \quad v(x) = x_1x_2e_1 + x_3^2e_2 - x_1^2e_3, \quad \bar{x} = (1, 0, 1).$$

$$14. \quad v(x) = (x_1^2 - x_2x_3)e_1 + (x_2^2 - x_1x_3)e_2 + (x_3^2 - x_1x_2)e_3,$$

$$\overline{x} = (2, -1, 1).$$

$$15. \quad v(x) = \nabla u, \quad u = 3x_1x_2^2 - x_2^3 + x_3, \quad \overline{x} = (-1, 1, 2).$$

$$16. \quad v(x) = r^{-n}r, \quad r = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3, \quad r = |r|,$$

$$\overline{x} = (2, 1, -2).$$

$$17. \quad v = a \times r, \quad a \text{ 是常矢}, \quad r = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3,$$

$$\overline{x} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0).$$

习题18—20求给出  $v$  的  $\text{curl} v$ . 当  $\text{curl} v = 0$  时求  $f$  使  $\nabla f = v$ .

$$18. \quad v(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1}(xe_1 + x_2e_2 + x_3e_3).$$

$$19. \quad v(x) = (x_1^2 + x_2x_3)e_1 + (x_2^2 + x_1x_3)e_2$$

$$+ (x_3^2 + x_1x_2)e_3.$$

$$20. \quad v(x) = e^{x_1}[(\sin x_2)(\cos x_3)e_1 + (\sin x_2)(\sin x_3)e_2$$

$$+ (\cos x_2)e_3].$$

21. 求例2中重力场  $v$  的  $\text{curl} v$ .

22. 证明定理15.12的(a), (c), (d), (e).

23. 设  $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ , 且  $u_1, u_2, u_3$  都属于  $C^2(\mathbf{R}_3)$ . 求出用  $(x_1, x_2, x_3)$  及  $(e_1, e_2, e_3)$  表示  $\text{curl}(\text{curl} u)$  的公式.

### § 15.3 线积分

设  $I = \{t : a \leq t \leq b\}$ ,  $f : I \rightarrow D \subset V_N$  是  $I$  上的矢函数.

如果从  $\mathbf{R}_N$  的原点出发的有向线段  $\overrightarrow{OP}$  是  $f$  的表示,  $P$  点在  $\mathbf{R}_N$  内

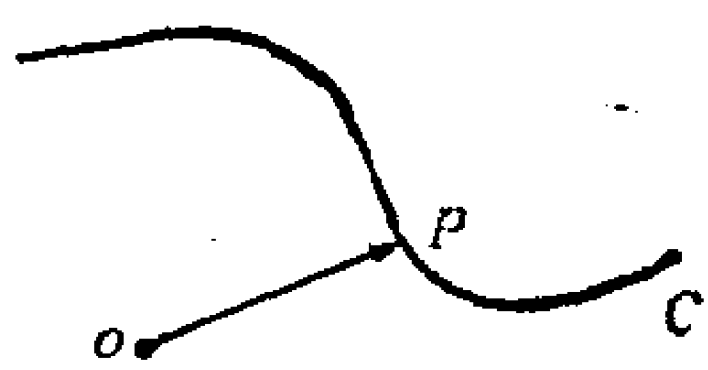


图 15.5

描出一条曲线 $C$  (图15.5).  $\vec{OP}$ 是 $f$ 值域 $D$ 的矢的表示. 当 $f$ 连续且曲线 $C$ 有有限长度, 就说 $C$ 是可求长的轨道 (参看 § 15.1).

设 $g$ 是从 $C$ 到 $V_N$ 的连续矢函数. 如果上述 $f$ 是可求长的, 那么可以定义 $g$ 关于 $f$ 的 $(R-S)$ 积分. 为此在 $V_N$ 中引入坐标系, 坐标系是关于 $V_N$ 的正交基 $e_1, e_2, \dots, e_N$ 的. 记

$$g(x) = g_1(x)e_1 + g_2(x)e_2 + \dots + g_N(x)e_N, x \in C,$$

$$f(t) = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2 + \dots + f_N(t)e_N. \quad (15.26)$$

由 $f$ 是可求长的, 那么函数 $f_i, i=1, 2, \dots, N$ 是连续的有界变差函数. 同样,  $g$ 是连续的, 那么 $g_i, i=1, 2, \dots, N$ , 是 $C \rightarrow \mathbf{R}_1$ 的连续函数. 把 $g_i[f_1(t), \dots, f_N(t)]$ 表示成 $g_i[f(t)]$ , 注意到下列 $(R-S)$ 积分存在:

$$\int_a^b g_i[f(t)] df_i(t), \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (15.27)$$

现在建立把 $(R-S)$ 积分推广到矢函数 $g$ 关于矢函数 $f$ 的一般情况的定理.

**定理15.13** 设 $f: I \rightarrow V_N$ , 曲线 $C \subset \mathbf{R}_N$ 是由矢径 $\vec{OP} = f(t)$ 的 $P$ 点描出的可求长轨道. 而 $g$ 是从 $C$ 到 $V_N$ 内的连续矢场. 那么 $\exists$ 数 $L$ 具有如下性质: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使对网孔 $\|\Delta\| < \delta$ 的任意划分 $\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , 及 $\forall \xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , 有

$$\left| \sum_{i=1}^n g[f(\xi_i)] \cdot [f(t_i) - f(t_{i-1})] - L \right| < \varepsilon. \quad (15.28)$$

数 $L$ 是唯一的.

**证明** 于 $V_N$ 中选取正交基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ , 并按(15·26)写出 $\mathbf{g}$ 及 $\mathbf{f}$ . 令

$$L = \sum_{i=1}^N \int_a^b g_i[\mathbf{f}(t)] df_i(t).$$

显然上式右端 $N$ 个积分都存在, 若把每一积分用 $(R-S)$ 和代替便得(15·28)式成立.

**定义** 称定理15·13中的 $L$ 为 $\mathbf{g}$ 关于 $\mathbf{f}$ 的 $(R-S)$ 积分, 并记为  $L = \int_a^b \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)] d\mathbf{f}(t)$ .

**例1** 设 $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ 分别为

$$\mathbf{f}(t) = t^2 \mathbf{e}_1 + 2t \mathbf{e}_2 - t \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (x_1^2 + x_3) \mathbf{e}_1 + x_1 x_3 \mathbf{e}_2 + x_1 x_2 \mathbf{e}_3. \quad \text{求} \int_0^1 \mathbf{g} d\mathbf{f}.$$

**解**

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)] \cdot d\mathbf{f}(t) \\ &= \int_0^1 [(t^4 - t) \mathbf{e}_1 + t^2(-t) \mathbf{e}_2 + t^2(2t) \mathbf{e}_3] \\ & \quad [d(t^2 \mathbf{e}_1 + 2t \mathbf{e}_2 - t \mathbf{e}_3)] \\ &= \int_0^1 [(t^4 - t)(2t) + t^2(-t) \cdot 2 + t^2(2t)(-1)] dt = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

设 $I_1 = \{t : a_1 \leq t \leq b_1\}$ ,  $I_2 = \{t : a_2 \leq t \leq b_2\}$ ,  $C$ 是 $\mathbb{R}_N$ 中轨道,  $f_1 : I_1 \rightarrow C$ 及 $f_2 : I_2 \rightarrow C$ 都是1—1连续映象. 由定

理15·1,  $\exists$  单调连续函数  $U: I_1 \rightarrow I_2$ , 使

$$f_1(t) = f_2[U(t)], \quad t \in I_1. \quad (15 \cdot 29)$$

如果  $C$  是可求长的而  $g: C \rightarrow V_N$  是连续的, 那么

$$\int_{a_1}^{b_1} g[f_1(t)] df_1(t) = \pm \int_{a_2}^{b_2} g[f_2(U)] \cdot df_2(U),$$

当  $U$  递增取正号, 当  $U$  递减取负号.

设  $f: I \rightarrow V_N$  是 1-1 连续的映象. 由  $f$  的表示  $\overrightarrow{OP}$ , 矢径  $r(t) = v(\overrightarrow{OP})$  定义了  $R_N$  内的弧  $C$ .

**定义** 设所有  $f_a: I_a \rightarrow V_N$  的集为  $\mathcal{A}$ ,  $f_a$  与上述  $f$  的值域是同一弧  $C$ , 且使  $f_a(t) = f[U_a(t)]$  的  $U_a(t)$  总是递增函数. 把序偶  $(C, \mathcal{A})$  称为定向弧, 仍记为  $C$ ,  $\mathcal{A}$  内的任一  $f_a$  是  $C$  的参数式. 如果联系  $f_a$  与  $f$  的单调函数  $U_a$  总是递减的, 这时弧的定向与  $C$  相反, 记为  $C_- = -C$ . 不限制  $U$  的增、减性质的弧  $C$  称为无向弧. 每一无向弧可有两种定向 (图15·6), 以下说弧  $C$  总指定向的.

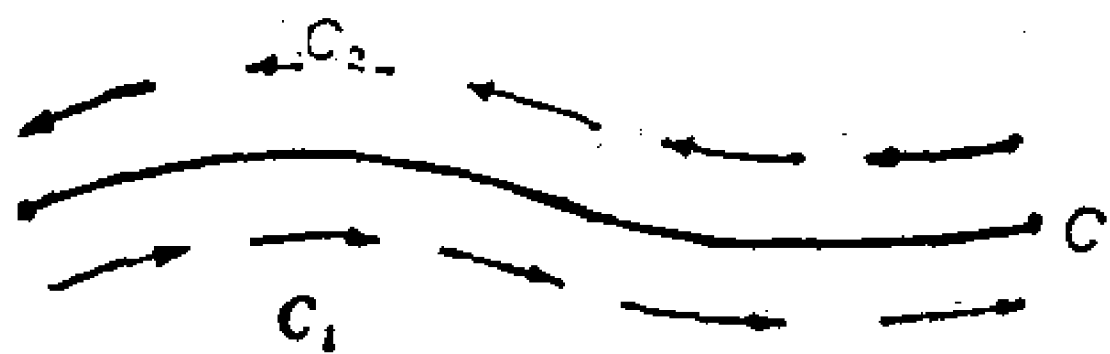


图 15·6

若弧  $C$  是可求长的,  $g: C \rightarrow V_N$  连续, 由定理 15·13,  $g$  关于  $f$  的  $(R-S)$  积分存在.

**定义** 沿定向弧  $C$  的  $(R-S)$  积分为

$$\int_C g(r) \cdot dr = \int_a^b g[f(t)] \cdot df(t), \quad (15 \cdot 30)$$

其中  $f$  是  $C$  的参数式.

容易看出 (15·30) 积分与  $C$  的参数式  $f$  的选择无关, 并有



$$\int_{c^{-}} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_c \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

一条定向弧可以被分解成定向子弧的并. 若划分  $I = \{t : a \leq t \leq b\}$  为  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ ,  $c$  的参数式  $\mathbf{f} : I \rightarrow V_N$ , 限制  $\mathbf{f}$  于子区间  $I_K = \{t : t_{K-1} \leq t \leq t_K\}$  上确定的  $\mathbf{f}_K : I_K \rightarrow V_N$ ,  $\mathbf{f}_K$  所表示的定向弧  $C_K$ , 记

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

下面结果由  $(R-S)$  积分的基本性质立即得出.

#### 定理15.14

(a) 设  $C$  是可求长的弧,  $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ , 若  $\mathbf{g}$  在  $C$  上连续, 那么

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_{K=1}^n \int_{C_K} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (15.31)$$

(b) 若  $C$  的表示  $\mathbf{f}$  分段光滑,  $\mathbf{g}$  在  $C$  上连续, 那么

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)] \cdot \mathbf{f}'(t) dt. \quad (15.32)$$

(15.32) 的右端实际应用来计算沿定向弧的积分.

**例2** 在  $V_3$  中取正交基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , 设

$$\mathbf{g} = 2x_1 \mathbf{e}_1 - 3x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

$C = C_1 + C_2$ ,  $C_1$  为由  $(1, 0, 1)$  到  $(2, 0, 1)$  的有向线段, 而  $C_2$  为由  $(2, 0, 1)$  到  $(2, 0, 4)$  的有向线段 (图15.7). 求

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

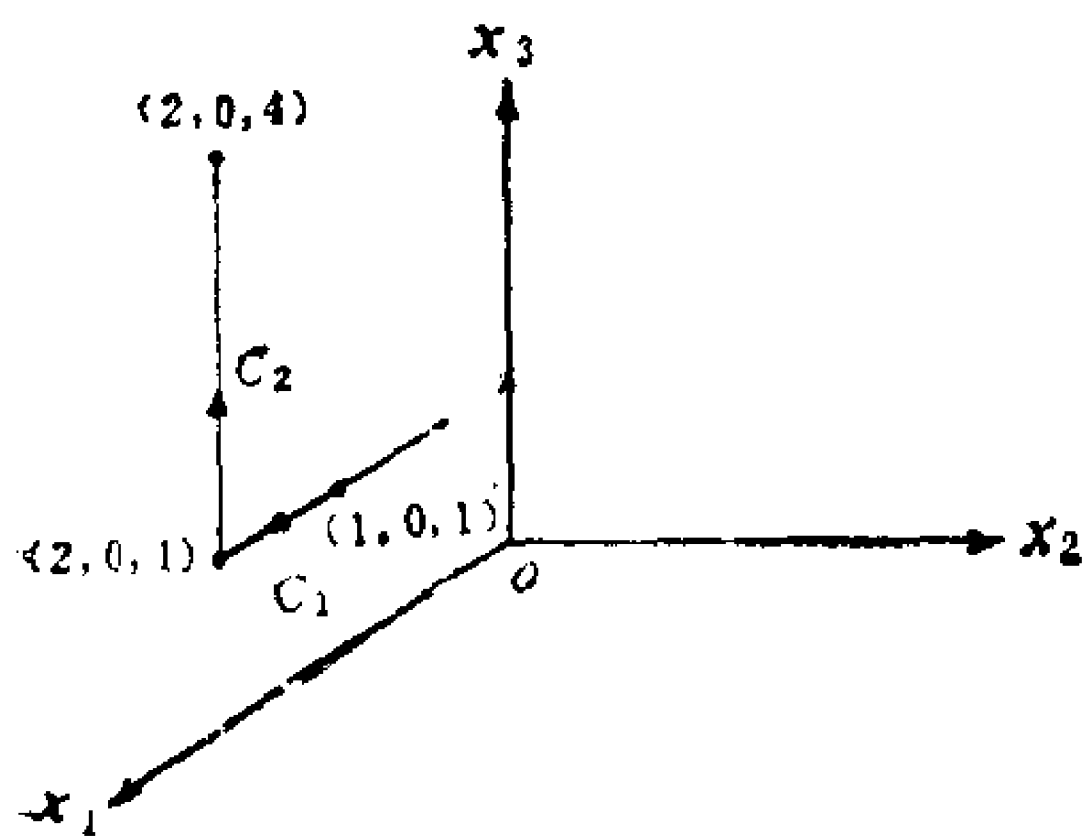


图 15.7

$$\text{解 } C_1 = \{ \mathbf{r} : \mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, 1 \leq x_1 \leq 2 \}$$

$$C_2 = \{ \mathbf{r} : \mathbf{r} = 2\mathbf{e}_1 + x_3 \mathbf{e}_3, 1 \leq x_3 \leq 4 \}.$$

在 $C_1$ 上有 $d\mathbf{r} = (dx_1)\mathbf{e}_1$ , 而在 $C_2$ 上有 $d\mathbf{r} = (dx_3)\mathbf{e}_3$ . 因此

$$\int_{C_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 2x_1 dx_1 = 3, \quad \int_{C_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^4 x_3 dx_3 = \frac{15}{2},$$

$$\int_D \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = \frac{21}{2}.$$

若函数 $\mathbf{g}$ 在 $\mathbf{R}_N$ 的开集 $D$ 上连续, 那么 $\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$ 将依赖于轨道 $C$ 在 $D$ 内的选取. 但确有这样的情况: 在 $D$ 内有相同端点的各轨道 $C$ 上积分值相同. 这种情况出现时, 就说积分与轨道无关.

**定理15·15** 设 $u$ 是在开集 $D \subset \mathbf{R}_N$ 上的连续可微的数量函数,  $P, Q \in D$ .  $C$ 是分段光滑的轨道,  $C$ 的参数式 $\mathbf{f}$ 满足:

$\forall t \in I = \{ t : a \leq t \leq b \}, \mathbf{f}(t) \in D$  (指 $\mathbf{f}(t)$ 的表示 $\overrightarrow{OP}$ 的 $P \in D$ ),  $\mathbf{f}(a) = P, \mathbf{f}(b) = Q$ . 那么对任意的这样的轨道 $C$ , 都有

$$\int_C \nabla u \cdot d\mathbf{r} = u(Q) - u(P).$$

**证明** 据定理15·14的(a), 仅对 $\mathbf{f}$ 为光滑的情况证明就够了. 定义

$$G(t) = u[\mathbf{f}(t)], \quad t \in I.$$

选取坐标系的正交基为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ , 表示

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{e}_1 + f_2(t)\mathbf{e}_2 + \cdots + f_N(t)\mathbf{e}_N.$$

用链法则求得

$$G'(t) = \sum_{i=1}^N u_{,i}[\mathbf{f}(t)] f_i'(t) = \nabla u[\mathbf{f}(t)] \cdot \mathbf{f}'(t).$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C \nabla u \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla u[\mathbf{f}(t)] \cdot \mathbf{f}'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt \\ &= G(b) - G(a) = u(Q) - u(P). \end{aligned}$$

下面给出定理15.15的逆定理.

**定理15.16** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内的连通开集,  $\mathbf{v}: D \rightarrow V_N$ , 是连续的矢量场. 如果对位于 $D$ 内的每一光滑弧 $C$ ,  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 与轨道无关. 那么 $\exists D$ 上连续可微的数量场使对 $\forall p \in D$ ,  $\nabla u(P) = \mathbf{v}(P)$ .

**证明** 设 $\forall P_0 \in D$ .  $C$ 是从 $P_0$ 到 $P$ 点的一条光滑的弧.  
定义

$$u(p) = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

由定理条件,  $u(p)$ 与 $\vec{C}$ 的选取无关,  $u(p)$ 在 $D$ 上有定义. 设 $p_1$ 是 $D$ 内一点,  $C_0$ 是 $p_0$ 到 $p_1$ 的位于 $D$ 内的弧, 从 $p_1$ 点加上有向线段 $L$ 延伸 $C_0$ 为 $C_0 + L$ , 且使 $C_0 + L$ 为光滑的. 并且以 $\mathbf{a}$ 表

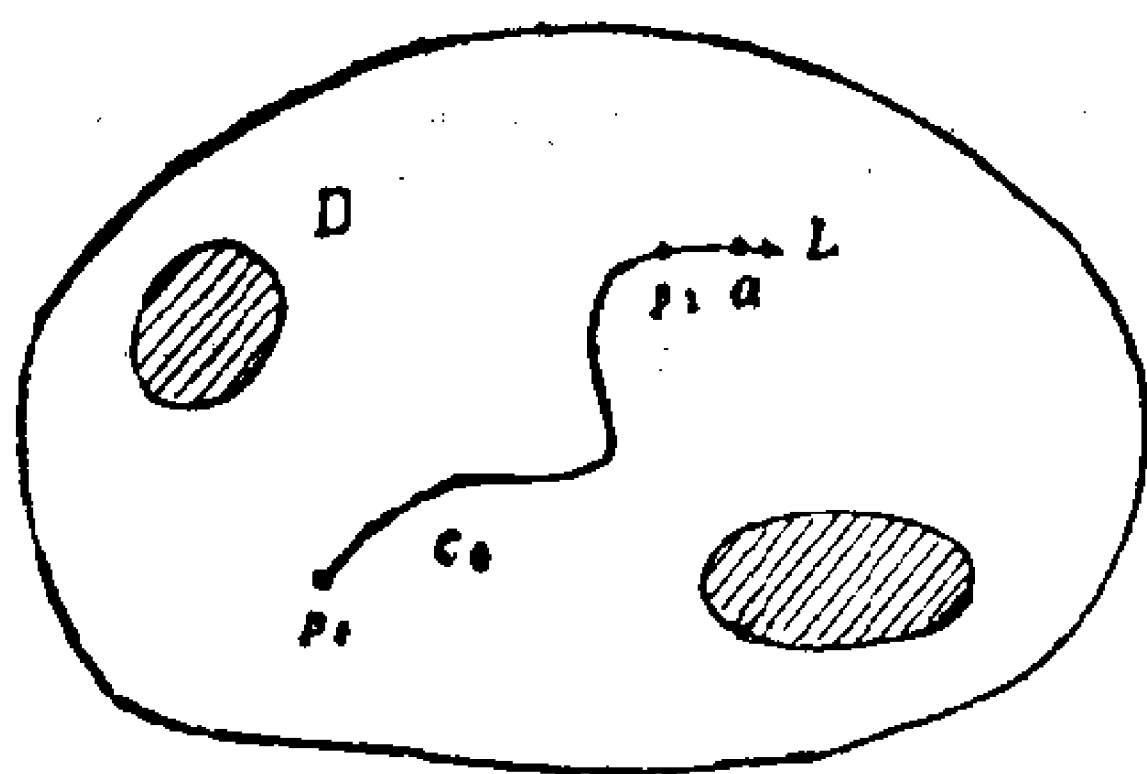


图 15.8

示  $\vec{L}$  方向的单位矢 (图15.8)。于  $R_N$  中引入坐标系, 以  $x^0$  表  $p_1$  点坐标, 那么  $L$  上的任一点  $q$  的坐标为  $x^0 + ta$ ,  $t \in R_1$ 。这样一来, 当  $h > 0$ , 有

$$\frac{1}{h} [u(x^0 + ha) - u(x^0)] = \frac{1}{h} \int_{x^0}^{x^0 + ha} v(t) \cdot a dt.$$

因而

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [u(x^0 + ha) - u(x^0)] = v(x^0) \cdot a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [u(x^0 + ha) - u(x^0)]$$

$$= - \lim_{K \rightarrow +0} \frac{1}{K} [u(x^0 - Ka) - u(x^0)]$$

$$= -v(x^0) \cdot (-a) = v(x^0) \cdot a.$$

由定理15.7可知  $\nabla u = v$  在  $D$  的任意点  $x^0$  成立。

假若  $u$  是  $R_3$  内光滑的数量场, 在上节已经知道当  $v = \nabla u$  时,  $\text{curl } v = 0$ 。但是逆命题要附加一定条件才可能成立。下面的例子指出  $\text{curl } v = 0$  而  $v$  的积分与轨道有关, 由定理15.15,  $v$  不能是某数量场的梯度。取

$$v = (x_1^2 + x_2^2)^{-1} (-x_2 e_1 + x_1 e_2 + 0 e_3),$$

$$D = \{ (x_1, x_2, x_3) : \frac{1}{2} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{3}{2}, |x_3| < 1 \}.$$

$C: r(t) = (\cos t) e_1 + (\sin t) e_2 + 0 e_3, 0 \leq t \leq 2\pi$ 。那么

$$\int_C v \cdot dr = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

这表明积分  $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$  与轨道选取有关（否则积分应等于零）。

原因在于  $C$  包围了  $\mathbf{v}$  的奇异线  $x_1 = x_2 = 0$ ，而定义域  $D$  却不包含  $x_1 = x_2 = 0$  的直线。

如果光滑矢量场  $\mathbf{v}$  的定义域不仅是连通的，而且含于  $D$  内的闭轨道“不包围  $\mathbf{v}$  的奇异点”，那么当  $\text{curl} \mathbf{v} = 0$  时， $\mathbf{v}$  便是一数量场的梯度。上述的  $D$  叫作单连通的。

**定义** 称  $\mathbf{R}_N$  中连通开集  $D$  为单连通的，如果对从  $I = \{t : a \leq t \leq b\}$  到  $D$  内的轨道  $f_0$  及  $f_1$  且有  $f_0(a) = f_1(a), f_0(b) = f_1(b)$  时，都  $\exists$  函数  $f(t, s)$ ， $f(t, s)$  是从矩形  $\{(t, s) : a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1\}$  到  $D$  内连续的函数  $f$ ，满足：

$$\left. \begin{aligned} f(t, 0) &= f_0(t), \\ f(t, 1) &= f_1(t), \\ f(a, s) &= f_0(a) = f_1(a) \\ f(b, s) &= f_0(b) = f_1(b) \quad (s \in [0, 1]). \end{aligned} \right\} \quad (15.33)$$

换句话说， $D$  称为单连通的是指  $D$  内任何两条端点相同的轨道，可以不离开  $D$  由其中一条连续变形为另一条。（图 15.9）



图 15.9

$\mathbf{R}_1$  中的单连通的开集是单一的开区间； $\mathbf{R}_2$  中的单连通开集有平面，及一条闭光滑曲线围起来的内部等； $\mathbf{R}_3$  中单连通开集有整个空间、光滑封闭曲面的内部等，更高维的单连通开集难以直观的说明。通常把连通开集称为  $\mathbf{R}_N$  中的区

域，或更简单地称为域（请与数域相区别）。

下面引理指出，用来把单连通域内一条轨道连续变形为另一条轨道的 $f(t,s)$ ，可以要求它有一定光滑性质。这一引理的证明请参看本节习题17中所给出的提示。

**引理15.4** 设 $D$ 是 $\mathbf{R}_N$ 内一单连通区域， $f_0, f_1$ 是 $I \rightarrow D$ 内的光滑轨道， $I = \{t : a \leq t \leq b\}$ ，且 $f_0(a) = f_1(a)$ ， $f_0(b) = f_1(b)$ 。那么 $\exists R = \{(t,s) : a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1\}$ 上的连续函数 $f(t,s)$ 满足(15.33)所列的条件且(i)  $\frac{\partial}{\partial t}(f)$ 在 $R$ 内连续；(ii)  $\exists$ 充分大的 $n$ ，对 $\forall t \in I$ ， $f$ 关于 $S$ 在区间 $J_i = \{s : \frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}\}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )上是线性的，且 $\frac{\partial f}{\partial s}$ ， $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$ 在每个矩形 $I \times J_i$ 上一致连续。

**定理15.17** 设 $v$ 是 $\mathbf{R}_3$ 内单连通域 $D$ 上的连续可微矢量场，且在 $D$ 上 $\text{curl } v = 0$ 。那么 $\exists D$ 上的连续可微的数量场 $u$ 满足 $v = \nabla u$ 。

**证明** 仅需证明 $\int_C v \cdot dr$ 与轨道无关，为此设 $p, q \in D$ ，而 $f_0, f_1$ 表示 $D$ 内联结 $p, q$ 的两条光滑轨道 $C_0, C_1$ 且 $f_0(a) = f_1(a) = p, f_0(b) = f_1(b) = q$ 。选取以 $e_1, e_2, e_3$ 为正交基的坐标系表示 $v, v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ 。由引理15.4， $\exists f(t,s) = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ ， $f(t,s)$ 对 $t$ 可微，对 $s$ 分段线性且满足(15.33)。定义函数

$$\varphi(s) = \int_a^b \left[ v_1(f) \frac{\partial f_1}{\partial t} + v_2(f) \frac{\partial f_2}{\partial t} + v_3(f) \frac{\partial f_3}{\partial t} \right] dt.$$

由(15.33)诸等式导出

$$\varphi(0) = \int_a^b v(f_0) \cdot f_0' dt = \int_{\vec{c}_1} v \cdot d\mathbf{r}$$

$$\varphi(1) = \int_a^b v(f_1) \cdot f_1' dt = \int_{\vec{c}_1} v \cdot d\mathbf{r}.$$

将证明  $\varphi'(s) \equiv 0$ ，因而导出所要证明的积分与轨道无关。

由  $v, f, \frac{\partial f}{\partial t}$  的连续性，所以  $\varphi(s)$  在  $s \in J = \{s : 0 \leq s \leq 1\}$

是连续的，而在每一子区间  $J_i = \{s : \left(\frac{1}{n}\right)(i-1) \leq s$

$\leq \left(\frac{1}{n}\right)i\}$  上  $\frac{\partial f}{\partial s}$  及  $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$  是一致连续的，因此可以在积分号下

求导而得

$$\varphi'(s) = \int_a^b \left\{ \sum_{i=1}^3 \left\{ v_i(f) \frac{\partial^2 f_i}{\partial s \partial t} + \sum_{j=1}^3 v_{i,j}(f) \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial s} \right\} \right\} dt,$$

$\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}$ 。对含有  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial s}$  的项用部分积分法，得

$$\begin{aligned} \varphi'(s) = & \sum_{i=1}^3 \left\{ [v_i[f(b,s)] \frac{\partial f_i(b,s)}{\partial s} \right. \\ & \left. - v_i[f(a,s)] \frac{\partial f_i(a,s)}{\partial s} \right\} + \int_a^b \left\{ \sum_{i,j=1}^3 \left( v_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial s} \right. \right. \\ & \left. \left. - v_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) \right\} dt. \end{aligned} \quad (15.34)$$

既然 $f(a, s)$ 及 $f(b, s)$ 都是与 $s$ 无关的, 那么应有  $\frac{\partial f_i(a, s)}{\partial s} =$

$\frac{\partial f_i(b, s)}{\partial s} = 0, i = 1, 2, 3$ . 因此(15·34)中第一个和等于零.

这样便有

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int_a^b \sum_{i,j=1}^3 \left( v_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial t} - v_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial s} \frac{\partial f_j}{\partial t} \right) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i,j=1}^3 (v_{i,j} - v_{j,i}) \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial f_j}{\partial s} dt.\end{aligned}$$

由 $\text{curl } v = 0$ , 即 $v_{i,j} - v_{j,i} \equiv 0, (i, j = 1, 2, 3)$ , 得  $\varphi'(s) \equiv 0$ .

注 容易推广定理15·17到 $V$ 是从 $V_N$ 到 $V_N$ 的函数的情况, 只要把 $\text{curl } V = 0$ 换成条件:

$$v_{i,j} - v_{j,i} = 0, i, j = 1, 2, \dots, N.$$

这里 $V = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_N e_N$ , 当 $D$ 是单连通区域时 $V$ 是一数量场 $u$ 的梯度.

为了运用定理15·17, 要求建立区域的单连通性的充分性条件, 读者不难证明下面的结果.

### 定理15·18

- (a) 若 $D$ 是 $R_N$ 中的凸区域, 那么 $D$ 是单连通的.
- (b) 设 $h$ 是 $R_N$ 内域 $D$ 上到另一域 $D_1$ 上的1—1的连续映射, 当 $D$ 是单连通域时, 则 $D_1$ 也是单连通域.

### 习 题

习题1—8中假设 $g$ 从 $R_N$ 内域 $D$ 到 $V_N$ 的连续矢场,  $e_1,$



$\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  构成坐标系的正交基, 计算

$$\int_C \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}.$$

1.  $\mathbf{g} = x_1 x_3 \mathbf{e}_1 - x_2 \mathbf{e}_2 + x_1 \mathbf{e}_3$ ;  $C$  是从  $(0, 0, 0)$  点到  $(1, 1, 1)$  点的有向线段.

2.  $\mathbf{g} = x_1 x_3 \mathbf{e}_1 - x_2 \mathbf{e}_2 + x_1 \mathbf{e}_3$ ,  $C: f(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2 + t^3\mathbf{e}_3$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  $t$  从 0 到 1.

3.  $\mathbf{g} = -x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 - x_3 \mathbf{e}_3$ ;  $C: f(t) = (\cos t)\mathbf{e}_1 + (\sin t)\mathbf{e}_2 + \frac{t}{\pi}\mathbf{e}_3$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $t$  从 0 到  $2\pi$ .

4.  $\mathbf{g} = -x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 - x_3 \mathbf{e}_3$ ;  $C$  是从  $(1, 0, 0)$  到  $(1, 0, 2)$  的定向线段.

5.  $\mathbf{g} = x_1^2 \mathbf{e}_1 + x_1 x_2 \mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$ ;  $C = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = x_1^2, x_3 = 0, 0 \leq x_1 \leq 1, \text{从 } (0, 0, 0) \text{ 到 } (1, 1, 0)\}$ .

6.  $\mathbf{g} = 2x_2 x_3 \mathbf{e}_2 + (x_3^2 - x_2^2)\mathbf{e}_3$ ;  $C$  是圆弧:  $x_1 = 0$ ,  $x_2^2 + x_3^2 = 4$ , 从  $(0, 2, 0)$  到  $(0, 0, 2)$ .

7.  $\mathbf{g} = x_1 x_4 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 - x_2 x_4 \mathbf{e}_3 + x_3 \mathbf{e}_4$ ;  $C$  是从  $(0, 0, 0, 0)$  到  $(a_1, a_2, a_3, a_4)$  的定向直线段.

8.  $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^N x_i^2 \mathbf{e}_i$ ;  $C$  是定向直线段为  $f(t) = \sum_{i=1}^N a_i t \mathbf{e}_i$ ,  $a_i$  是

常数,  $t \in [0, 1]$ ,  $t$  从 0 到 1.

9.  $\mathbf{R}_4$  内定义的数量函数  $u(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + x_4$ .

$C_1$ : 从  $(0, 0, 0, 0)$  到  $(1, 1, 1, 1)$  的定向直线段.

$C_2$ : 从  $(0, 0, 0, 0)$  到  $(1, 0, 0, 0)$  接下从  $(1, 0, 0, 0)$  到  $(1, 1, 1, 1)$  的定向直线段。通过计算沿  $C_1, C_2$

的积分  $\int_C \nabla u \cdot dr$  验证积分  $\int_C \nabla u \cdot dr$  与轨道无关。

10. 设  $R_N$  内定义的数量函数  $u(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2$ ,  $C_1$ : 从  $(0, 0,$

$\dots, 0)$  到  $(1, 1, \dots, 1)$  的定向直线段;

$C_2$ :  $f(t) = t^2 e_1 + \sum_{i=2}^N t e_i$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ; 计算  $\int_C \nabla u \cdot dr$  沿

$C_1$  及沿  $C_2$  的值, 验证积分与轨道无关。

11. 设  $R_2$  内给出矢场  $v = (x_1^2 + x_2^2)^{-1} (-x_2 e_1 + x_1 e_2)$ ,  $C$  为定向弧  $f(t) = (\cos t) e_1 + (\sin t) e_2$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . 用定理 15.17 证明  $R_2$  去掉原点后不再是单连通的。

12. 证明定理 15.18

13. (a) 证明  $R_2$  的半平面是凸集。

(b) 证明  $R_N$  中由  $x_N \geq 0$  给出的半空间是凸的。

14. 证明  $R_2$  内的集  $S = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, -\pi \leq x_2 \leq \pi\}$  是凸集。

15. 设  $I = \{x_1 : a \leq x_1 \leq b\}$ ,  $f: I \rightarrow R_1$  是连续的正值函数, 证明集  $S = \{(x_1, x_2) : a < x_1 < b, 0 < x_2 < f(x_1)\}$  是  $R_2$  中的单连通集。

16. 平面上的圆绕与它不相交的轴旋转得到一环面。环面内部为集:  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b)^2 +$

$x_2^2 < a^2$ }, 试用习题11的方法证明 $S$ 是非单连通集 (图 15·10)。

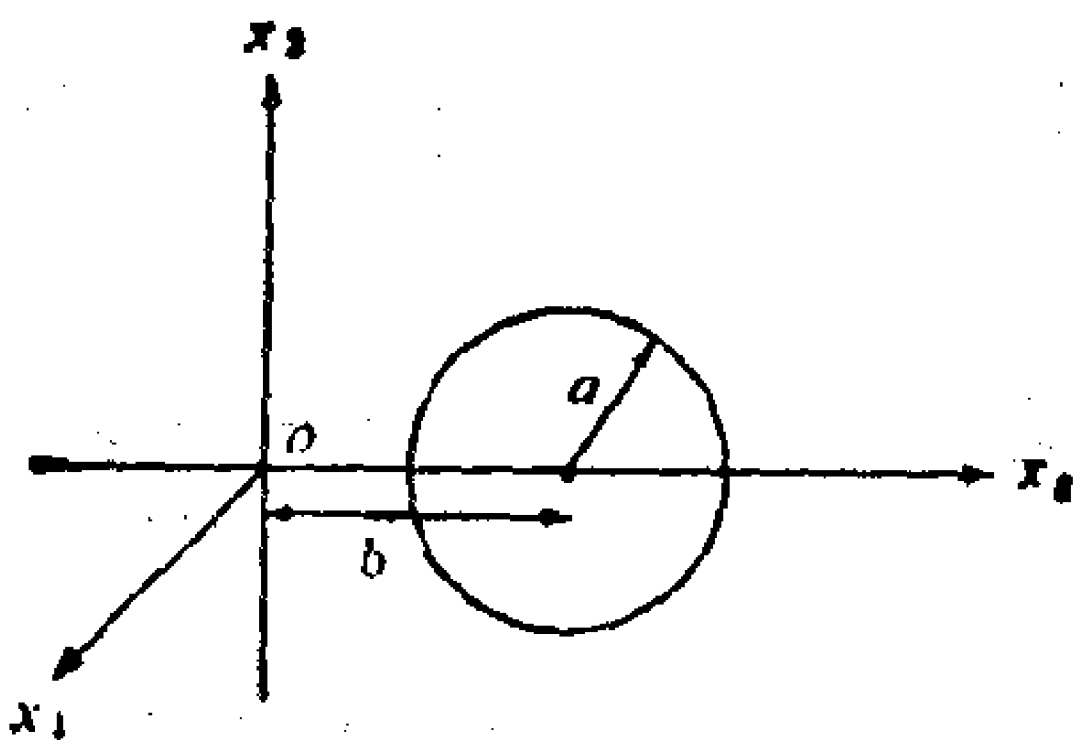


图 15·10

17. 用下列步骤证明引理15·4

(a) 设 $f^*(t, s)$ 是满足单连通域定义的条件(15·33)的在 $R = \{(t, s) : a \leq t \leq b, 0 \leq s \leq 1\}$ 上连续的函数。

证明 $\exists \rho > 0$ , 对所有 $(t, s) \in R$ , 使 $f^*(t, s)$ 为中心 $\rho$ 为半径的球都含于 $D$ 内。

(b) 定义序列 $\{g_{n,i}\} i=0, 1, 2, \dots, n, n=1, 2, \dots$ , 满足 $g_{n,0}(t) = f^*(t, 0) = f_0(t)$ ,  $g_{n,n}(t) = f^*(t, 1) = f_1(t)$ , 且当 $1 \leq i \leq n-1$ , 我们令 $g^*_{n,i}(t)$ 为满足

$$\left| g^*_{n,i}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| < \frac{\rho}{8}, \quad t \in [a, b].$$

定义 $g_{n,i}(t) = g^*_{n,i}(t) - l_{n,i}(t)$ , 这里 $l_{n,i}$ 是线性函数

在 $t=a, t=b$ 时与 $g^*_{n,i}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right)$ 重合, 证明在

$$t \in [a, b], |l_{n,i}(t)| < \frac{\rho}{8}, \quad \text{且}$$

$$\left| g_{ni}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| < \frac{\rho}{4}, \quad t \in [a, b], \quad 0 \leq i \leq n.$$

(c) 证明  $\exists$  充分大的  $n$ , 当  $|s_1 - s_2| < \frac{1}{n}$

$$|f^*(t, s_1) - f^*(t, s_2)| < \frac{\rho}{4}.$$

(d) 以 (c) 所选取的  $n$ , 定义

$$f(t, s) = (i - ns)g_{ni-1}(t) + (ns - i + 1)g_{ni}(t),$$

$$t \in [a, b], \quad \frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

证明  $f, \frac{\partial f}{\partial t}$  在  $R$  上连续并注意  $f$  在  $\frac{i-1}{n} \leq s \leq \frac{i}{n}$  上是线

性函数,  $f\left(t, \frac{i-1}{n}\right) = g_{ni-1}(t), \quad f\left(t, \frac{i}{n}\right) = g_{ni}(t).$

(e) 通过不等式

$$\left| f(t, s) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| \leq \left| f(t, s) - g_{ni}(t) \right|$$

$$+ \left| g_{ni}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| \leq \left| g_{ni-1}(t) - g_{ni}(t) \right| + \frac{\rho}{4}$$

$$\leq \left| g_{n,i-1}(t) - f^*\left(t, \frac{i-1}{n}\right) \right| + \left| f^*\left(t, \frac{i-1}{n}\right) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| + \left| f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) - g_{n,i}(t) \right| + \frac{\rho}{4},$$

$$\text{证明 } \left| f(t, s) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right) \right| < \rho \quad s \in \left[ \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right],$$

得对所有  $(t, s) \in R$ ,  $f(t, s) \in D$ .

## § 15.4 格林定理

设  $I = \{x : a \leq x \leq b\}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbf{R}_1$  是  $I$  上连续可微函数. 微积分基本定理指出

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad (15.35)$$

这一定理能推广为  $\mathbf{R}_2$ 、 $\mathbf{R}_3$ 、 $\mathbf{R}_N$  中的定理. 本节研究最简单的情形, 把 (15.35) 右端换成  $\mathbf{R}_2$  内图形  $F$  上的二重积分, 左端换成沿  $F$  边界的线积分.

**定义** 设  $I = \{t : a \leq t \leq b\}$ ,  $f : I \rightarrow V_N$  是轨道,  $f$  表示  $\mathbf{R}_N$  内的曲线  $C$ . 如果  $f(a) = f(b)$  称  $f$  是一闭轨道. 对  $t_1, t_2 \in (a, b)$ , 当且仅当  $t_1 = t_2$  有  $f(t_1) = f(t_2)$  时, 称闭轨道是简单的闭轨道. 当  $f$  是简单闭轨道,  $f$  表示的曲线  $C$  称为简单闭曲线或约当闭曲线.

下面定理是把定理 15.1 推广到简单闭曲线的情况.

**定理15·19** 设  $I = \{t : a \leq t \leq b\}$ ,  $J = \{t : c \leq t \leq d\}$ ,  $f : I \rightarrow V_N$ ,  $g : J \rightarrow V_N$ ,  $f, g$  的值域是同一条简单闭曲线.

(a) 若  $f(a) = f(b) = g(c) = g(d)$ , 那么  $\exists$  单调连续函数  $U : I \rightarrow J$ , 使  $f(t) = g[U(t)]$ ,  $t \in I$ . 当  $U$  是递增的, 有  $U(a) = c$ ,  $U(b) = d$ ; 当  $U$  是递减的, 有  $U(a) = d$ ,  $U(b) = c$ .

(b) 若  $f$  是可求长的, 那么  $g$  是可求长的, 并且轨道  $g$  与轨道  $f$  的长度相等.

### 证明

(a) 设给定  $\varepsilon > 0$ , 定义  $I_\varepsilon = \{t : a + \varepsilon \leq t \leq b - \varepsilon\}$ . 那么把  $f$  限制于  $I_\varepsilon$  上, 其值域为弧  $C_\varepsilon$ . 这一弧  $C_\varepsilon$  也是  $g$  限制于  $J$  的子区间  $J_\varepsilon$  上的值域. 据定理15·1,  $\exists$  函数  $U_\varepsilon : I_\varepsilon \rightarrow J_\varepsilon$ ,  $U_\varepsilon$  在  $I_\varepsilon$  上连续单调, 使  $f(t) = g[U_\varepsilon(t)]$ ,  $t \in I_\varepsilon$ . 让  $\varepsilon \rightarrow 0$  得到函数  $U$ ,  $U$  是从  $I' = \{t : a < t < b\}$  到  $J' = \{t : c < t < d\}$  的映射,  $U$  是  $U_\varepsilon$  的极限, 当  $U$  是递增的, 定义  $U(a) = c$ ,  $U(b) = d$ , 当  $U$  递减时,  $U(a) = d$ ,  $U(b) = c$ . 这样得到的  $U$  将从  $I$  到  $J$  单调函数.

读者可参照定理15·3完成 (b) 的证明.

$f : I \rightarrow V_N$  及  $g : J \rightarrow V_N$  的值域是同一条简单闭曲线  $C$ , 可能出现  $g(c) = g(d) = f(\beta)$ , 而  $\beta$  是  $I$  的内点的情况. 下面推论证明: 如果把  $f$  按周期性延拓, 可得与定理15·19 (a) 同样的结果.

**推论** 假若把定理15·19的  $f$  的定义按公式  $f(t) = f[t + (b - a)]$ ,  $a \leq t \leq b$ , 由  $I$  推广到区间  $I_1 = \{t : a \leq t \leq b + (b - a)\}$ . 如果对于某  $a$ ,  $0 \leq a \leq (b - a)$ . 有  $g(c) = g(d) = f(a + a) = f(b + a)$ . 定义  $f_a(t) = f(t + a)$ ,  $t \in I$ . 那么有与定理

15·19 (a) 中 $U$ 那样的 $U_\alpha$ , 使得

$$f_\alpha(t) = g[U_\alpha(t)], \quad t \in I.$$

假若 $f_\alpha, g$ 如定理15·19推论所述, 它们都以可求长简单闭曲线 $C$ 为值域. 设 $F: C \rightarrow V_N$ 是 $C$ 上的连续函数, 那么

$$\int_a^b F[f_\alpha(t)] df_\alpha(t) = \pm \int_c^d F[g(s)] dg(s)$$

当 $U_\alpha$ 为递增时取正号;  $U_\alpha$ 为递减时取负号. 上述公式与定理15·3关于可求长弧的证明类似.

类似于曲线定向, 有简单闭曲线的定向.

**定义** 设 $f: I \rightarrow V_N$ 以简单闭曲线 $C \subset R_N$ 为其值域. 一定向简单闭曲线是一序偶 $(C, \mathcal{A})$ , 这里 $\mathcal{A}$ 表示以 $C$ 为值域的矢函数 $f$ 的类, 类中矢函数 $f_\beta$ 与 $f$ 之间以定理15·19推论中递增的 $U_\beta$ 联系着. 称类中任一 $f_\beta$ 为 $(C, \mathcal{A})$ 的参数式.  $(C, \mathcal{A})$ 简记为 $C$ .  $C$ 可能有两种定向, 据 $U_\beta$ 是递增或递减而定, 分别以 $C$ 及 $C_-$ 来记,  $C = -C_-$ .

假设 $f: I \rightarrow V_N$ 是 $C$ 的参数式, 分解 $I = \{t: a \leq t \leq b\}$ 为子区间 $I_K = \{t: t_{K-1} \leq t \leq t_K\}$ ,  $K = 1, 2, \dots, n$ ,  $t_0 = a$ ,  $t_n = b$ . 记 $f$ 限制于 $I_K$ 上为 $f_K$ . 那么定向弧 $C_K$ 是 $f_K$ 的值域, 记 $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$ , 如同定理15·14, 在 $C$ 上的积分可分解为在 $C_K$ 上的积分之和.

设 $D$ 是 $R_2$ 内以简单闭曲线为边界的区域. 以 $|\partial D|$ 表示未定向边界,  $\partial D$ 表示逆时针定向边界,  $-\partial D$ 表示顺时针定向边界.

首先对 $R_2$ 平面中的特殊区域建立格林定理, 然后证明定理对更一般的域也成立.

设 $D$ 是 $R_2$ 内的区域,  $v: D \rightarrow V_2$ 是给定矢函数. 在 $V_2$ 中引入以 $\{e_1, e_2\}$ 为正交基的坐标系. 相应于基的两种定向:  $e_2$ 由 $e_1$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 或由 $e_1$ 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 给予平面这两种定向分别为 $R_2, -R_2$ , 如图15·11所示, 通常研究 $R_2$ 总指正定向的.

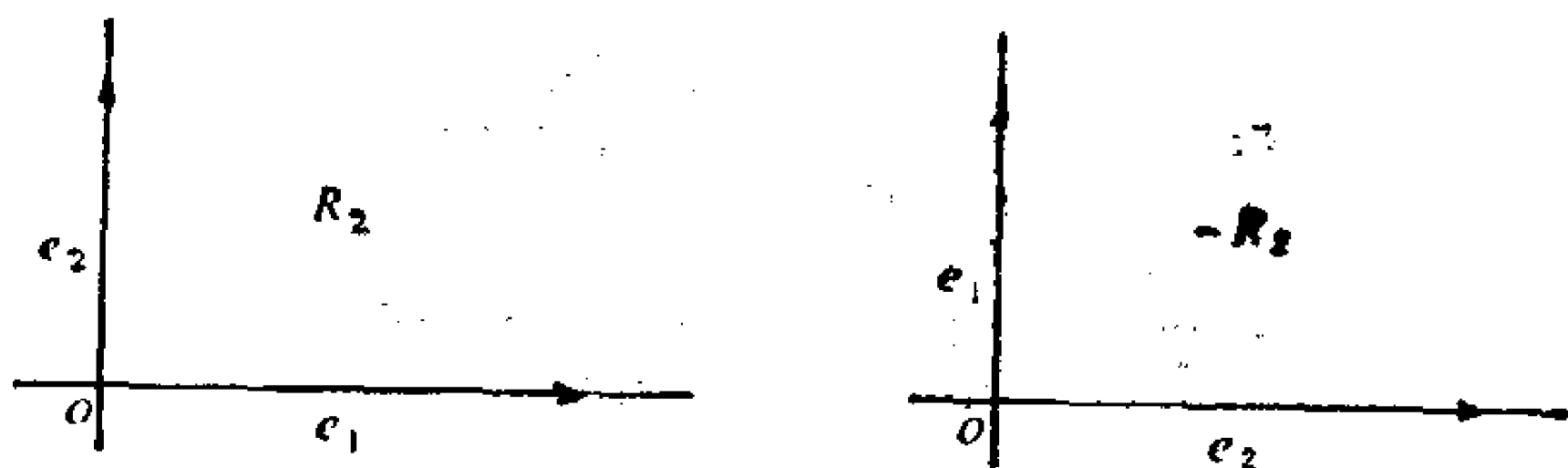


图 15·11

在 $R_2$ 中, 设 $v = p(x_1, x_2)e_1 + q(x_1, x_2)e_2$ ,  $p, q$ 都是 $D$ 上的数量函数. 这时 $\text{curl} v$ 完全由函数 $q_{,1} - p_{,2}$ 所确定. 事实上, 在 $R_3$ 中

$$v = pe_1 + qe_2 + 0e_3,$$

按§15·1中 $\text{curl} v$ 的定义及(15·22)式

$$\text{curl} v = (q_{,1} - p_{,2})e_3,$$

可见 $\text{curl} v$ 完全由 $q_{,1} - p_{,2}$ 所确定. 在 $R_2$ 中的 $v \in V_2$ 的情况下, 采取 $\text{curl} v = q_{,1} - p_{,2}$ .

**引理15·5** 设 $f$ 是 $I = \{x_1 : a \leq x_1 \leq b\}$ 上的连续可微的函数,  $c$ 是一常数, 对 $x_1 \in I$ ,  $f(x_1) > c$ . 定义 $D = \{(x_1, x_2) : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq f(x_1)\}$  (图15·12), 而 $G$ 是包含 $\overline{D}$ 的区域,  $G \subset R_2$ ,  $v: G \rightarrow V_2(R_2)$ 是连续可微的矢函数.



那么

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, \quad (15.36)$$

其中 $\partial D$ 按逆时针定向

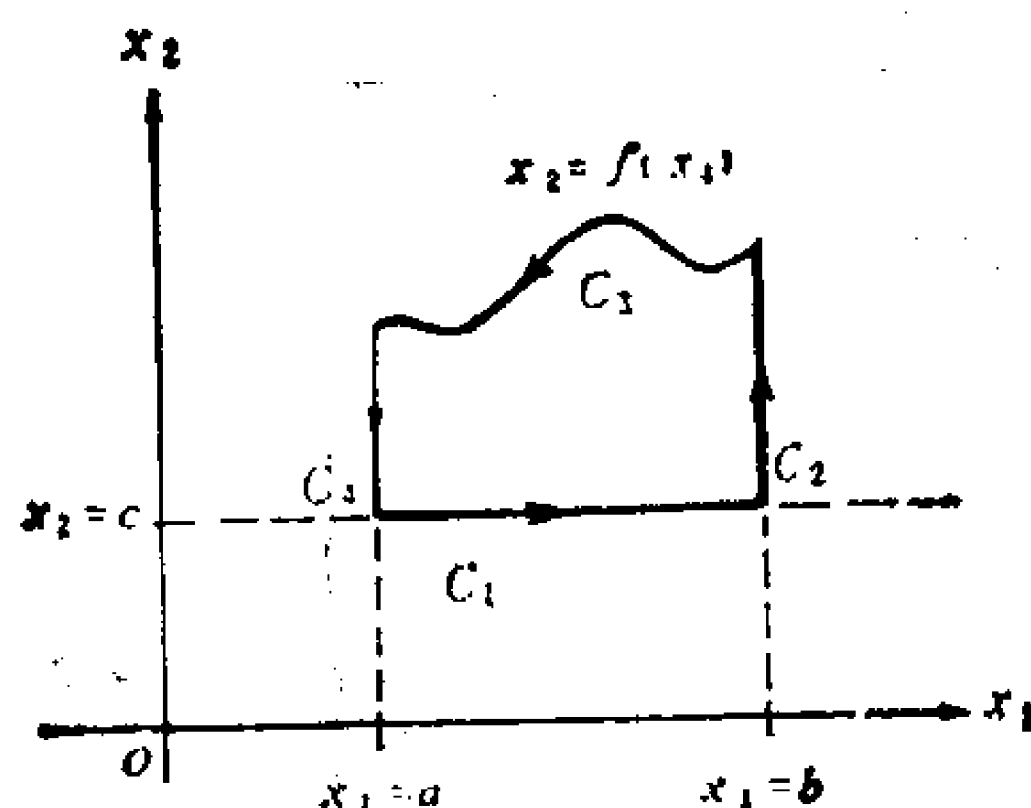


图 15.12

**证明** 记  $\mathbf{v}(x_1, x_2) = p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$ ,  
证明函数  $p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1$  及  $q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$  分别满足 (15.36). 令  
 $\mathbf{v}_1 = p\mathbf{e}_1$ , 有

$$\begin{aligned} \int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_1 d\mathbf{A} &= - \int_D p_{,2}(x_1, x_2) d\mathbf{A} = \\ &= - \int_a^b \{ p(x_1, f(x_1)) - p(x_1, c) \} dx_1. \end{aligned}$$

如图15.12所示:  $\partial D = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ , 那么上式右端

$$\begin{aligned} - \int_a^b \{ p(x_1, f(x_1)) \} dx_1 &= \int_{C_3} p dx_1, \int_a^b p(x_1, c) dx_1 \\ &= \int_{C_1} p dx_1, \text{ 于是} \end{aligned}$$

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_1 dA = \int_{C_1} p dx_1 + \int_{C_2} p dx_2 .$$

$x_1$  沿  $C_2$ ,  $C_4$  是常数, 因而  $\int_{C_2} p dx_1 = \int_{C_4} p dx_1 = 0$ . 这样得到

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_1 dA = \int \sum_{i=1}^4 c_i p dx_1 = \int_{\partial D} p dx_1 . \quad (15 \cdot 37)$$

再令  $\mathbf{v}_2 = q \mathbf{e}_2$ , 且定义

$$U(x_1, x_2) = \int_C^{x_1} q(x_1, \eta) d\eta .$$

那么

$$U_{,1}(x_1, x_2) = \int_C^{x_1} q_{,1}(x_1, \eta) d\eta ,$$

$$U_{,2}(x_1, x_2) = q(x_1, x_2) .$$

$$U_{,1,2} = U_{,2,1} = q_{,1} .$$

因为  $U$  在  $G$  内光滑, 而  $\partial D$  是闭曲线, 据定理 15·15 有

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (U_{,1} dx_1 + U_{,2} dx_2) &= \int_{\partial D} U_{,1} dx_1 + \\ \int_{\partial D} q dx_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (15 \cdot 38)$$

把公式 (15·37) 中的  $p$  换成  $U_{,1}$  可得

$$\int_{\partial D} U_{,1} dx_1 = - \int_D U_{,1,2} dA = - \int_D q_{,1} dA$$

$$= - \int_D \operatorname{curl} v_2 dA.$$

再据 (15·38) 便得

$$\int_D \operatorname{curl} v_2 dA = \int_{\partial D} q dx_2. \quad (15·39)$$

把 (15·38) 与 (15·39) 相加便得

$$\int_D \operatorname{curl} v dA = \int_{\partial D} (p dx_1 + q dx_2) = \int_{\partial D} v \cdot dr.$$

定理获证.

**定义** 设  $C_1$  与  $C_2$  是仅有一公共点  $p$  的两条光滑弧, 且  $p$  是  $C_1, C_2$  各自的一个端点. 若  $C_1, C_2$  在  $p$  点存在单边切线, 且两切线夹角不为零, 就称  $p$  点是  $C_1$  与  $C_2$  的隅角 (图 15·13), 称有限条光滑弧联结隅角形成的简单闭曲线为分段光滑简单闭曲线.

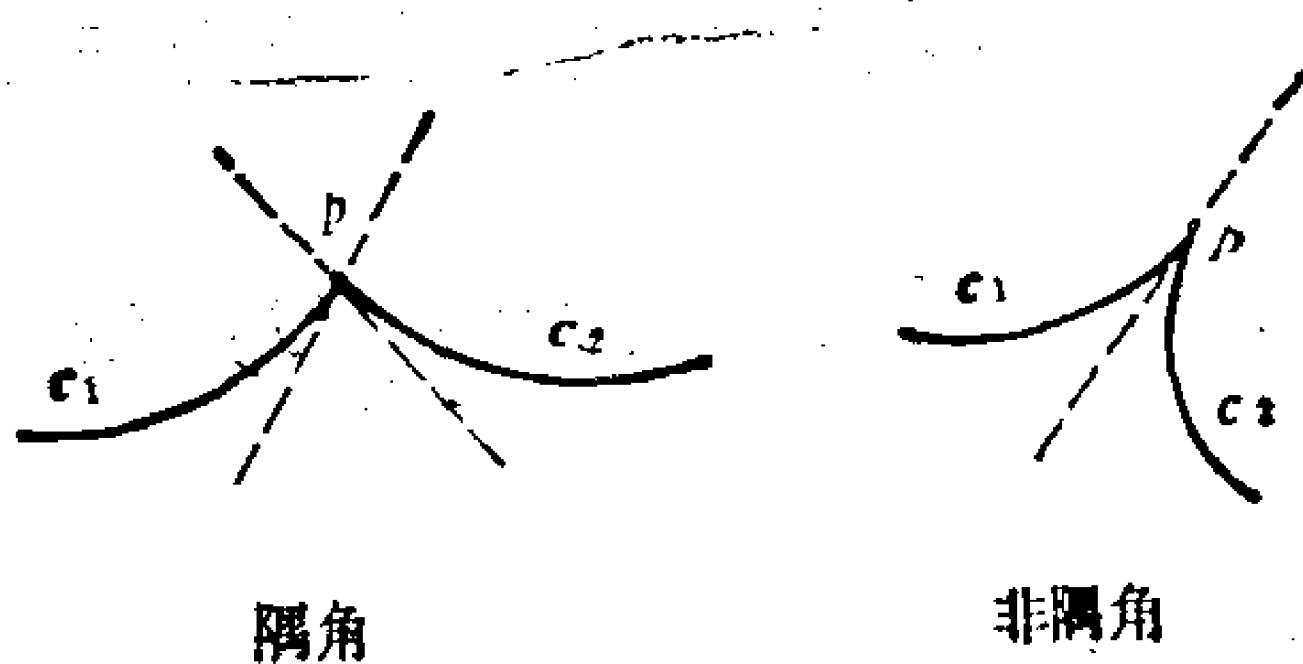


图 15·13

**注** 在引理 15·5 中, 设  $f$  为  $I$  上分段光滑的函数,  $\partial D$  便是分段光滑简单闭曲线, 引理的证明仍然有效.

**定义**  $R_2$  内一区域称为正规的, 当且仅当 (i)  $D$  是有界

的；(ii)  $D$  的边界  $\partial D$  是由有限条分段光滑简单闭曲线组成的；(iii)  $\forall p \in \partial D$ ,  $\exists$  以  $p$  点为原点的笛卡尔坐标系及正数  $a, b$ , 使  $\partial D$  在矩形  $R = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq a, |x_2| \leq b\}$  内的部分可以表示为  $x_2 = f_p(x_1), x_1 \in I = \{x_1 : |x_1| \leq a\}$ ,  $f_p$  是  $I$  上分段光滑函数, 且其值域含于  $J = \{x_2 : |x_2| \leq b\}$  (图15·14)。

定义中的数  $a, b$  及  $f$  一般是因点  $p$  而异的。对于固定点  $p$  找到了合乎要求的  $a, b$ , 当然比  $a, b$  更小的正数仍符合要求。图15·15是非正规区域的示意图。

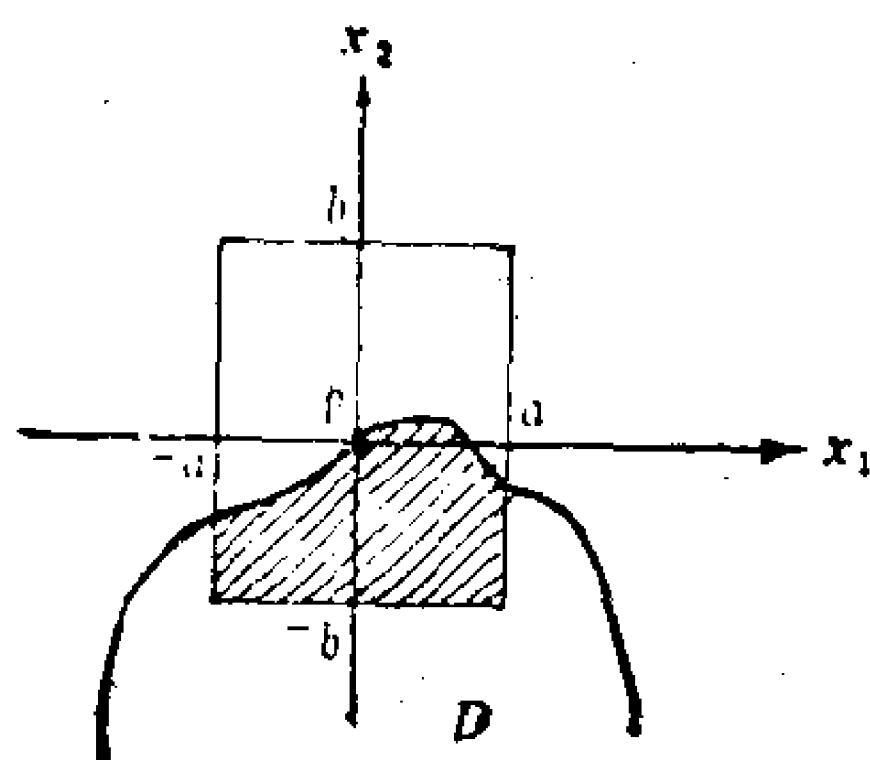


图 15·14

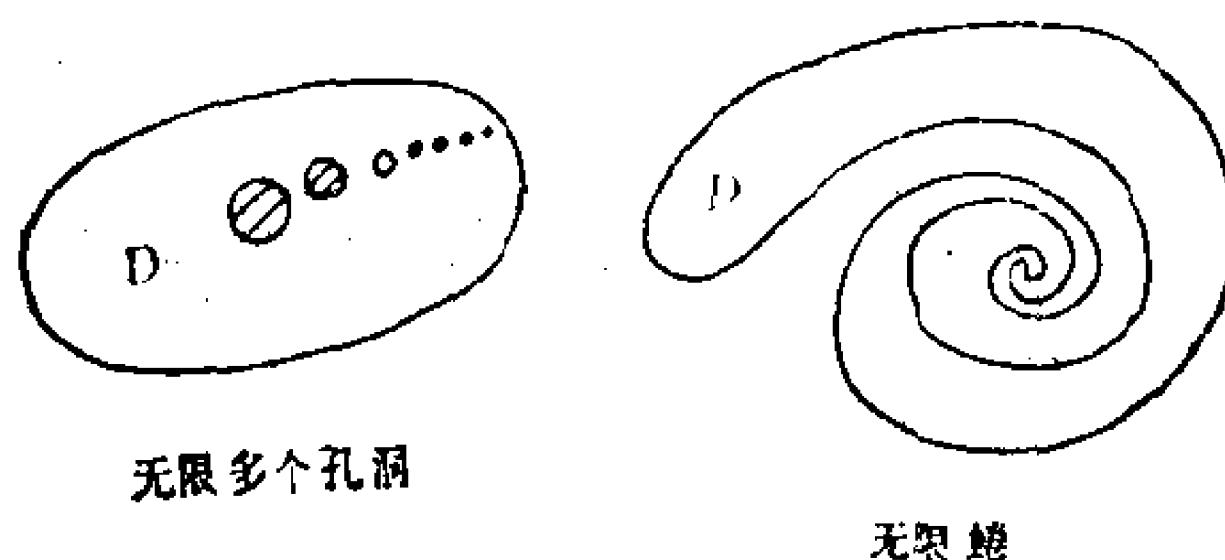


图 15·15

设  $D$  是  $R_2$  内的一正规区域,  $p$  是  $D$  的边界  $\partial D$  上的任意的一个非隅角点.  $\vec{T}$  是  $\partial D$  在  $p$  点的切矢, 在  $R_2$  内建立一坐标系使  $e_1$  与  $\vec{T}$  同向平行, 那么  $\partial D$  在  $p$  点可能取分别使  $e_2$  指向  $D$  内或  $D$  外的两种定向, 前者说  $\partial D$  使  $D$  在  $\partial D$  左的定向; 后者说  $\partial D$  使  $D$  在  $\partial D$  右的定向. 取定一  $\partial D$  定向使逐段光滑闭曲线  $\partial D$  所围的区域  $D$  常在  $\partial D$  之左或常在  $\partial D$  之右 (即沿  $\partial D$  定向行走  $D$  常在左或常在右)。

**定理15·20 (  $R_2$  内的格林定理 )** 设  $D$  是  $R_2$  内的一正规区域.  $G$  是  $R_2$  内包含  $\overline{D}$  的区域,  $v : G \rightarrow V_2(R_2)$  是  $G$  上连续可

微的矢函数。假定  $\partial D$  是使  $D$  在其左边的定向,  $\partial D = C_1 + C_2 + \cdots + C_K$ ,  $C_i$  是光滑弧。那么

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v} dA = \sum_{i=1}^K \int_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (15.40)$$

**证明** 利用  $D$  的正规性, 将  $D$  分解成若干小区域, 使在每一小区域上能用引理 15.5.

对  $\forall P \in \partial D$ , 按正规区域定义存在相应的矩形  $R_P$  及  $f_P$ . 而对于  $P \in D$ , 则取一邻边平行于坐标轴、以  $P$  为中心的开矩形  $R_P$ , 且  $\overline{R_P} \subset D$ . 因为  $\overline{D}$  是紧集, 开矩形族  $\{R_P : P \in \overline{D}\}$

覆盖了  $\overline{D}$ , 存在其中有限个矩形  $R_i$  也覆盖  $\overline{D}$ , 以  $S_1, S_2, \dots, S_n$  表示这有限个开矩形, 按照 § 13.3, 可以找到  $C^\infty(G_0)$

类的平滑函数,  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , 这里  $G_0$  是含有  $\overline{D}$  的开集,  $F_i$  是  $S_i$  内紧子集,  $\psi_i$  在  $(G_0 - F_i)$  内等于零, 对于  $\forall P \in G_0$ ,  $\psi_1, \dots, \psi_n$  中至少有一在  $P$  点取正值。现在定义  $G_0$  上的函数

$$\varphi_i(P) = \frac{\psi_i(P)}{\sum_{i=1}^n \psi_i(P)},$$

$\varphi_i \in C^\infty(G_0)$  且对  $\forall P \in G_0$ , 有  $\sum_{i=1}^n \varphi_i(P) \equiv 1$ , 函数  $\varphi_i(P)$

称为单位分解 (参看 § 13.3 习题 2, 及本节习题 14)。定义

$$\mathbf{v}_i = \varphi_i \mathbf{v}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

每一  $\mathbf{v}_i$  是  $G_0$  上连续可微矢函数, 且

$$\mathbf{v} = \left( \sum_{i=1}^n \varphi_i \right) \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i.$$

这样一来, 只要对每一  $\mathbf{v}_i$  证明 (15·40) 成立就行了. 若

$\overline{S}_i \subset D$ , 因为在  $\partial D$  的每一点  $\mathbf{v}_i$  是零, 有

$$\int_{\partial D} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

又因为在  $F_i$  之外  $\mathbf{v}_i \equiv 0$ , 而  $\partial S_i$  与  $F_i$  不相交, 据引理 15·5, 有

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_i d\mathbf{A} = \int_{S_i} \operatorname{curl} \mathbf{v}_i d\mathbf{A} = \int_{\partial S_i} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

最后, 当  $S_i$  是与边界  $\partial D$  相交的矩形, 令  $D_i = D \cap S_i$ , 而  $C_i = \partial D \cap S_i$ . 那么由在  $(\partial D - C_i)$  上及在  $(D - D_i)$  上  $\mathbf{v}_i = 0$ , 据引理 15·5 导出

$$\int_{\partial D} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_i} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D_i} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{D_i} \operatorname{curl} \mathbf{v}_i d\mathbf{A}$$

$$= \int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_i d\mathbf{A}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

把上面等式对  $i$  求和便得

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \operatorname{curl} \mathbf{v} d\mathbf{A}.$$

若  $\mathbf{v} = P(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + Q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$ , (15.40)式用坐标的术语表示成如下形式的格林定理.

推论 设区域  $G$  包含正规区域  $D$ ,  $P, Q$  是  $G$  上光滑函数, 那么

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dA = \oint_{\partial D} (Pdx_1 + Qdx_2), \quad (15.41)$$

这里线积分是逆时针方向取的.

例1 设  $K = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . 用格林定理计算

$$\int_{\partial K} [(2x_1 - x_2^3)dx_1 + (x_1^3 + 3x_2^2)dx_2].$$

解  $P = 2x_1 - x_2^3, \quad Q = x_1^3 + 3x_2^2$ , 由 (15.41)

$$\oint_{\partial K} (Pdx_1 + Qdx_2) = \int_K 3(x_1^2 + x_2^2) dA$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \frac{3}{2} \pi.$$

例2 设  $K = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  是单位圆,  $D$  是  $K$  的外部左以抛物线  $x_2^2 = 2(x_1 + 2)$ 、右以直线  $x_1 = 2$  为边界的区域 (图 15.16). 用格林定理计算

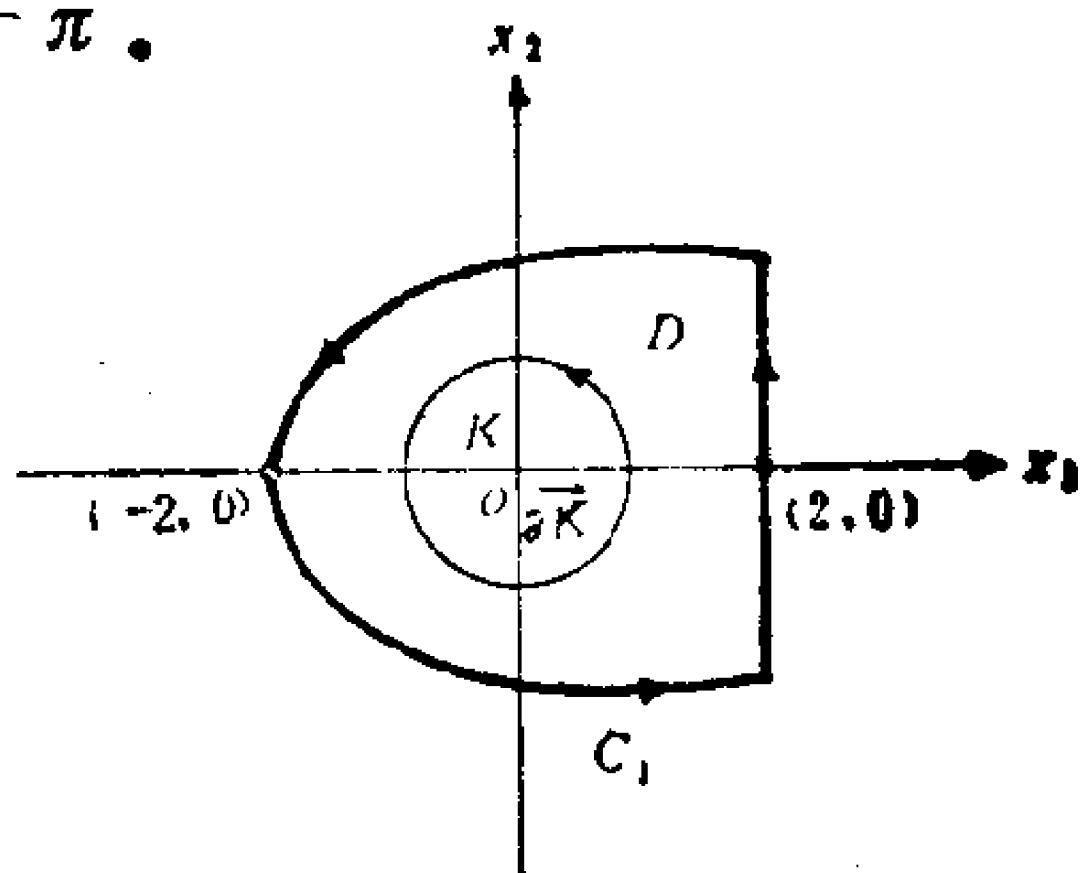


图 15.16

$$\int_{C_1} \left( -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 \right)$$

$C_1$  是  $D$  的外边界。

解 置  $P = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $Q = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$  且注意在  $D$  内

$$Q_{,1} - P_{,2} = 0.$$

取  $\vec{\partial}K$  为逆时针方向, 由格林定理有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial G} (Pdx_1 + Qdx_2) = \int_{C_1} (Pdx_1 + Qdx_2) \\ &\quad - \int_{\partial K} (Pdx_1 + Qdx_2) \end{aligned}$$

对右端后一积分用参数方程  $x_1 = \cos\theta$ ,  $x_2 = \sin\theta$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , 得

$$\int_{C_1} (Pdx_1 + Qdx_2) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = 2\pi.$$

例3 设  $D$  是面积为  $A$  的正规区域,

$$\mathbf{v} = \frac{-1}{2}(x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2). \text{ 证明 } A = \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

解 用格林定理得

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \text{curl} \mathbf{v} dA = \int_D \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) dA = A.$$

这表明正规区域的面积可以表示为沿区域边界的一个线积分。



## 习 题

习题1—6验证格林定理。

1.  $P(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$ ,  $Q(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$ ,  
 $D = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1 \}$ .
2.  $P(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$ ,  $Q(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ ,  $D$ 是单位  
 圆外部在 $x^2 = x_1^2 - 2$ 以上及直线 $x_2 = 2$ 以下的区域。
3.  $P = x_1^2 - x_2^2$ ,  $Q = 2x_1x_2$ ;  $D$ 是以 $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$   
 及 $(1, 1)$ 为顶点的三角形区域。
4.  $P = -x_2$ ,  $Q = 0$ ,  $D$ 是 $x_1^2 + x_2^2 = 4$ 之内及 $x_1^2 + (x_2 - 1)^2$   
 $= \frac{1}{4}$ ,  $x_1^2 + (x_2 + 1)^2 = \frac{1}{4}$ 的外部的区域。
5.  $v = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}(-x_2e_1 + x_1e_2)$ ;  $D = \{ (x_1, x_2) : 1 <$   
 $x_1^2 + x_2^2 < 4 \}$ .
6.  $P = 4x_1 - 2x_2$ ,  $Q = 2x_1 + 6x_2$ ;  $D$ 是椭圆:  $x_1 = 2\cos\theta$ ,  
 $x_2 = \sin\theta$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ 的内部区域。
7. 证明定理15.19 (b) .
8. 设 $D = \{ (x_1, x_2) : 0 \leq x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}} < 1 \}$ , 判定 $D$ 是否为  
 正规区域。

习题9—12用格林定理计算  $\int_D v \cdot dr$ .

9.  $v(x_1, x_2) = (4x_1e^{x_1} + 3x_1^2x_2 + x_2^2)e_1 + (2x_1^2e^{x_1}$   
 $- \cos x_2)e_2$ ;  $D = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \}$ .

$$10. \quad v(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2) \mathbf{e}_2;$$

$$D = \{ (x_1, x_2) : 1 \leq x_1 \leq 3, -2 \leq x_2 \leq 2 \}.$$

$$11. \quad v(x_1, x_2) = -x_2 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2;$$

$$D = \{ (x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 1 \}.$$

$$12. \quad v(x_1, x_2) = -3x_1^2 x_2 \mathbf{e}_1 + 3x_1 x_2^2 \mathbf{e}_2;$$

$$D = \{ (x_1, x_2) : -a \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq \sqrt{a^2 - x_1^2} \}$$

$$13. \quad \text{设 } P = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \quad Q = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \quad \text{用格}$$

林定理求  $\int_C (P dx_1 + Q dx_2)$  的值, 这里  $C$  是抛物线  $x_2 = x_1^2$

$-1, -1 \leq x_1 \leq 2$  的弧接以从  $(2, 3)$  到  $(-1, 0)$  的线

段.  $D$  是  $\vec{C}$  的内部、在以  $(0, 0)$  点为中心, 以很小的  $\rho$  作半径的小圆外部的区域.

$$14. \quad \text{设 } A \text{ 是 } \mathbf{R}_N \text{ 中紧集, } \{V_i\} \text{ 是 } A \text{ 的开覆盖. 证明存在 } \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^\infty(\mathbf{R}_N) \text{ 满足 (a) } 0 \leq \varphi_i \leq 1; \text{ (b) } \varphi_i \text{ 有}$$

$$\text{含于某 } V_i \text{ 中的紧支集; (c) 对 } \forall P \in A, \sum_{i=1}^n \varphi_i(P) = 1.$$

[提示:  $P \in A$ ,  $\exists$  闭球  $\overline{B}(P, 2\delta_p) \subset V_i$ , 据 § 13.3,  $\exists$  平滑  $\psi_p \in C^\infty(\mathbf{R}_N)$ ,  $\psi_p$  在  $B(p, 2\delta_p)$  之外为零, 在  $B(P, \delta_p)$  上等于 1. 由  $A$  紧,  $\exists P_1, P_2, \dots, P_n \in A$ ,

使  $A \subset \bigcup_{i=1}^n B(p_i, \delta_i)$ . 记相应的平滑为  $\psi_i$ , 令  $\varphi_i =$

$$\psi_i / \left( \sum_{i=1}^n \psi_i \right)$$

## § 15.5 $R_3$ 内的曲面及其参数表示式

至今所研究过的  $R_3$  中的曲面都是形如  $x_3 = f(x_1, x_2)$  或  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  的方程在笛卡尔坐标系下的图象。现在研究比上述以  $x_1, x_2, x_3$  的单一方程所描述的曲面更复杂的曲面。

通常把复杂曲面分解为若干较为简单的小曲面片，通过研究这些曲面片，以化简对复杂曲面的研究。如果分解得巧妙，即使整个曲面是相当古怪的，它的每一分片也可能有简单的结构。我们将主要研究其分片有如球面片、或柱面片、或双曲面片那样结构的曲面。

球面、椭球面、平行六面体的表面是没有边界的曲面的例子。而另一方面半球面以圆周为边界。当划分曲面成为若干小片时，必须细心地区别这些小片的边界是否包含整个曲面边界的点。

设  $D$  是其边界为有限条分段光滑的简单闭曲线所围成的  $R_2$  中的区域， $D \cup \partial D \subset$  区域  $G$ 。形如

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(s, t), \quad x_2 = x_2(s, t), \quad x_3 = x_3(s, t), \\ (s, t) &\in D \cup \partial D, \end{aligned} \quad (15.42)$$

的方程组的图象指  $R_3$  中点  $(x_1, x_2, x_3)$  的集。若以  $(x_1, x_2, x_3)$  为坐标的  $R_3$  中的点记为  $q$ ， $o$  是原点，用矢表示 (15.42)，写成

$$\vec{v}(\vec{oq}) = \mathbf{r}(s, t), \quad (s, t) \in D \cup \partial D. \quad (15 \cdot 43)$$

定义 如果  $x_1, x_2, x_3 \in C^1(G)$ , 即  $\mathbf{r} \in C^1(G)$ , 且

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t \neq 0, \quad (s, t) \in G, \quad (15 \cdot 44)$$

$\mathbf{r}(s, t)$  为  $G$  到  $V_3$  的 1—1 映象. 称 (15·42) 的图象为光滑曲面元素.

图 15·17 所示光滑曲面元素,  $\partial D$  是单一段光滑简单闭曲线.

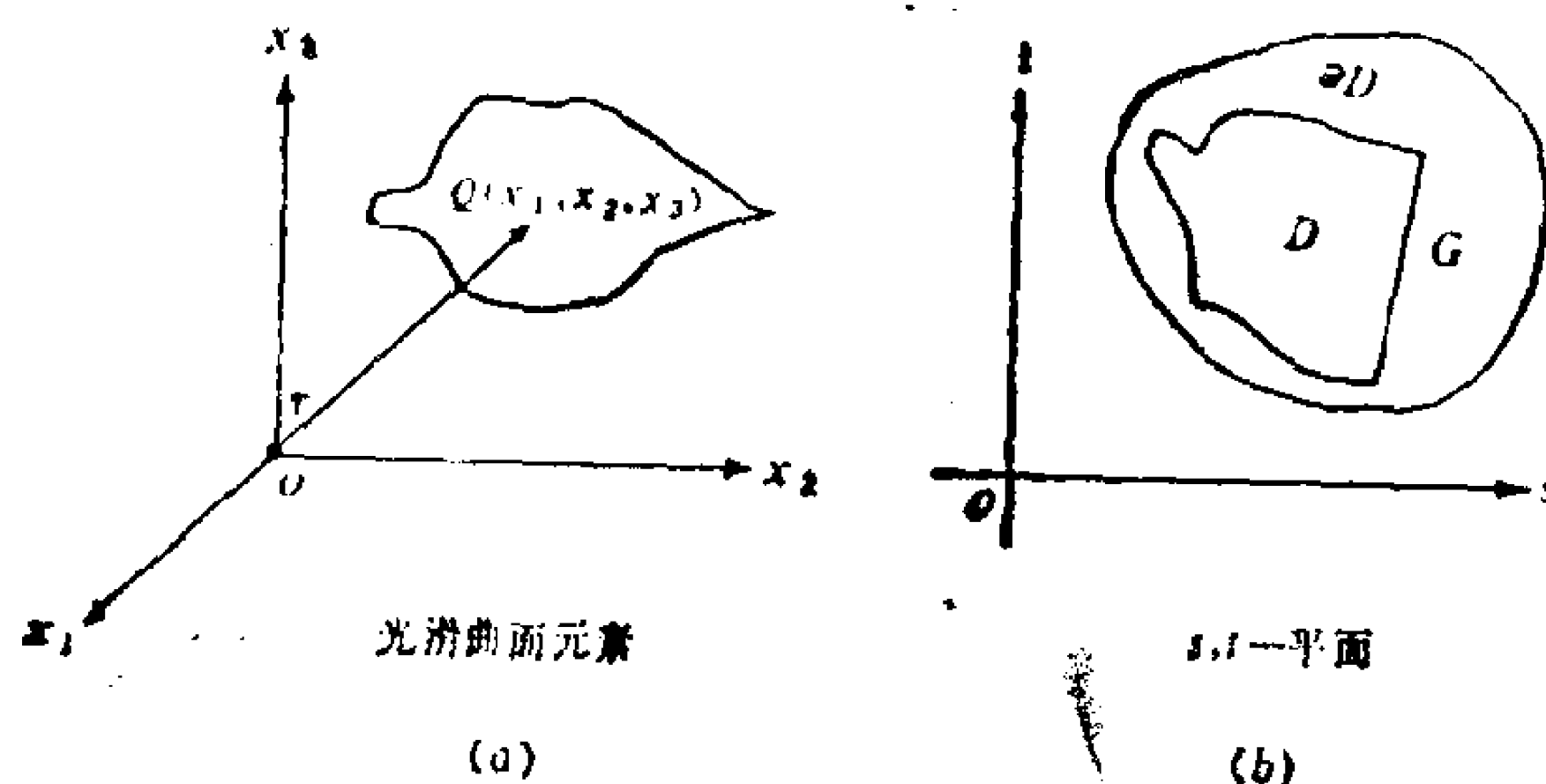


图 15·17

由定义, (15·42) 式给出了  $D \cup \partial D$  的点与曲面元素的点的 1—1 对应.

若在  $\mathbf{R}_3$  中引入以  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  为正交基的坐标系

$$\mathbf{r}(s, t) = x_1(s, t)\mathbf{e}_1 + x_2(s, t)\mathbf{e}_2 + x_3(s, t)\mathbf{e}_3,$$

那么

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t = \left( \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial x_3}{\partial t} - \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{\partial x_3}{\partial s} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial x_3}{\partial s} \frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{\partial x_3}{\partial t} \frac{\partial x_1}{\partial s} \right)$$

$$\mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial x_2}{\partial t} - \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial x_2}{\partial s} \right) \mathbf{e}_3$$

用雅可比记法

$$J\left(\frac{\varphi, \psi}{u, v}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix},$$

习惯上就简称右端行列式为雅可比。这样

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t &= J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right) \mathbf{e}_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right) \mathbf{e}_2 + \\ &J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (15 \cdot 45)$$

**定义** 称(15·42)或(15·43)为曲面元素的参数表示,  $s, t$ 称为参数。

同一曲面元素可以有不同的参数表示, 下面定理指出两参数表示之间的关系。

**定理15·21** 设 $\vec{v}(oq) = \mathbf{r}(s, t)$ ,  $(s, t) \in D \cup \partial D$ , 区域 $G \supset D \cup \partial D$ ,  $\partial D$ 由有限条分段光滑的简单闭曲线组成,  $\mathbf{r} \in C^1(G)$ , 且满足 $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t \neq \mathbf{0}$ ,  $(s, t) \in G$ , 以 $S, S_1$ 分别表示在 $\mathbf{r}$ 之下 $D \cup \partial D, G$ 的象集。

(a) 若 $(\overline{s}, \overline{t}) \in D \cup \partial D$ ,  $\exists$  正数 $\rho$ , 使 $S$ 与圆盘,  
 $(s - \overline{s})^2 + (t - \overline{t})^2 < \rho^2$  相对应的部分可以表为 $x_3 = f(x_1, x_2)$ ,  $x_1 = g(x_2, x_3)$ ,  $x_2 = h(x_1, x_3)$ 三者之一的形式, 这里 $f, g, h$ 是在 $(\overline{s}, \overline{t})$ 点对应点 $(x_1, x_2, x_3)$ 某邻域内

的光滑函数。

(b) 设曲面 $S, S_1$ 的另一参数方程为

$$\vec{v}(\overrightarrow{op}) = \vec{r}_1(s', t'), \quad (s', t') \in D_1 \cup \partial D_1,$$

$S, S_1$ 分别是 $(s', t')$ 平面内的 $D_1 \cup \partial D_1, G_1$ 的象集, 并且 $D_1, G_1, \vec{r}_1$ 与 $D, G, \vec{r}$ 有完全相同的性质. 那么 $\exists$ 一个1—1的光滑变换

$$T: S = U(s', t'), \quad t = V(s', t'), \quad (s', t') \in G_1 \quad (15.46)$$

从 $G_1$ 到 $G$ 使 $T(D_1) = D, T(\partial D_1) = \partial D$ , 且

$$\vec{r}[U(s', t'), V(s', t')] = \vec{r}_1(s', t') \in G_1.$$

**证明**

(a) 因为于 $(\overline{s}, \overline{t})$ 点 $\vec{r}_s \times \vec{r}_t \neq \mathbf{0}$ , 那么(15.45)式中的三个雅可比至少有一个在 $(\overline{s}, \overline{t})$ 处不等于零, 例如

在 $(\overline{s}, \overline{t})$ 点,  $J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) \neq 0$ . 令

$$\vec{r}(s, t) = X_1(s, t)\mathbf{e}_1 + X_2(s, t)\mathbf{e}_2 + X_3(s, t)\mathbf{e}_3,$$

并表示 $\overline{x}_1 = X_1(\overline{s}, \overline{t}), \overline{x}_2 = X_2(\overline{s}, \overline{t}), \overline{x}_3 = X_3(\overline{s},$

$\overline{t})$ 表示 $x_1 = X_1(s, t), x_2 = X_2(s, t), x_3 = X_3(s, t)$ ;

$\overline{x}_1 = X_1(\overline{s}, \overline{t}), x_2 = X_2(\overline{s}, \overline{t}), x_3 = X_3(\overline{s}, \overline{t})$ .

考察方程组 $x_1 = X_1(s, t), x_2 = X_2(s, t)$ , 由隐函数定理,

在 $(\overline{s}, \overline{t})$ 的某邻域与 $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ 某邻域之间可解得1—1映射 $s = \varphi(x_1, x_2), t = \psi(x_1, x_2)$ , 即存在正数 $\alpha, \beta$ , 使

$(x - \overline{x_1})^2 + (x_2 - \overline{x_2})^2 < a^2$ ,  $(s - \overline{s})^2 + (t - \overline{t})^2 < \beta^2$  中的  $x_1, x_2, s, t$ , 若满足  $x_1 = X_1(s, t)$ ;  $x_2 = X_2(s, t)$ , 则满足  $s = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $t = \psi(x_1, x_2)$ , 这里  $\varphi$  与  $\psi$  是圆盘  $(x - \overline{x_1})^2 + (x_2 - \overline{x_2})^2 < a^2$  内的光滑函数。于是  $S_1$  在  $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$  的一邻域内的部分为

$$x_3 = X_3[\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)]$$

$$((x_1 - \overline{x_1})^2 + (x_2 - \overline{x_2})^2 < a^2)$$

的图象。当选取  $\rho > 0$  如此之小, 使圆盘  $(s - \overline{s})^2 + (t - \overline{t})^2 < \rho^2$  的映象位于圆盘  $(x_1 - \overline{x_1})^2 + (x_2 - \overline{x_2})^2 < a^2$  内。这样的  $\rho$  便合乎 (a) 的要求。

(b) 因为  $r(s, t)$  及  $r_1(s', t')$  是 1—1 的, 在  $S_1$  上的点  $P$  是  $G$  中唯一的  $(s, t)$  及  $G'$  中唯一的  $(s', t')$  的映象, 如图 15·18 所示, 使  $(s', t')$  与  $(s, t)$  互相对应确定了 (15·46) 的变换  $T: s = U(s', t'), t = V(s', t')$ 。显然  $T$  是 1—1 的。

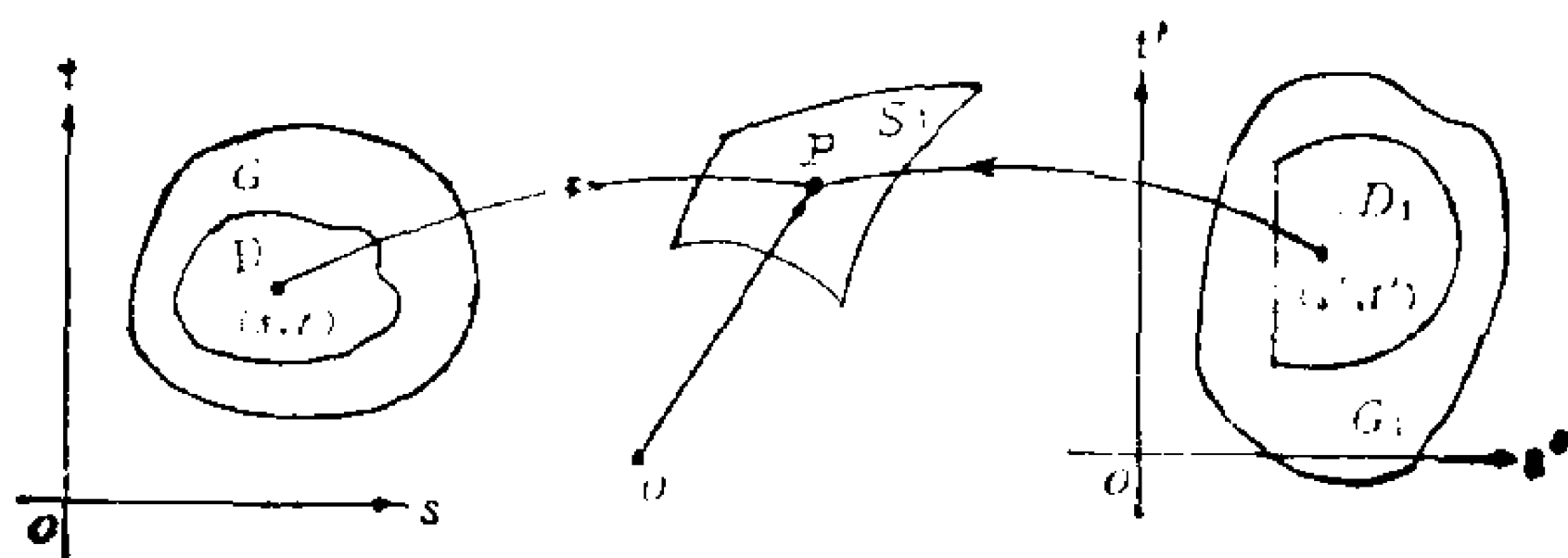


图 15·18

为了证明 $T$ 的光滑性, 设 $\forall (s'_0, t'_0) \in G_1$ ,  $s_0 = U(s'_0, t'_0)$ ,  $t_0 = V(s'_0, t'_0)$ , 且以 $P_0$ 表示 $(s_0, t_0)$ 及 $(s'_0, t'_0)$ 在曲面上的对应点. 因为(15·45)式中三个雅可比至少有一在 $(s_0, t_0)$ 不为零, 例如最后一个不为零, 如在(a)中那样, 可以解得 $s, t$ 为 $x_1, x_2$ 的函数:  $s = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $t = \psi(x_1, x_2)$ . 现今

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(s', t) &= X_1'(s', t')\mathbf{e}_1 + X_2'(s', t')\mathbf{e}_2 \\ &+ X_3'(s', t')\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

曲面 $S$ 在 $P_0$ 点邻域内的点 $P$ 可以表示为 $(x_1, x_2)$ 的函数, 即 $(X_1', X_2')$ 与 $P$ 之间1—1对应, 而 $P$ 又与 $(s', t')$ 1—1对应, 既然 $(s, t)$ 与 $(s', t')$ 之间的1—1对应是通过它们共同的象 $P$ 确定的. 因此在 $(s'_0, t'_0)$ 邻域内

$$\begin{aligned} s &= U(s', t') = \varphi(X_1'(s', t'), X_2'(s', t')), \\ t &= V(s', t') = \psi(X_1'(s', t'), X_2'(s', t')). \end{aligned}$$

所以变换 $T$ 在 $(s'_0, t'_0)$ 邻域内光滑, 由 $(s'_0, t'_0)$ 是 $G_1$ 的任意点,  $T$ 为 $G_1$ 到 $G$ 的1—1光滑变换. 于是(b)获证.

**定义** 若 $S$ 是由参数表示

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s, t) &= X_1(s, t)\mathbf{e}_1 + X_2(s, t)\mathbf{e}_2 \\ &+ X_3(s, t)\mathbf{e}_3, \quad (s, t) \in D \cup \partial D. \end{aligned}$$

给出的曲面元素.  $\partial D$ 的象称为 $S$ 的边界记为 $\partial S$ .

由定理15·21的(b)光滑曲面元素的边界与参数表示的特殊选择无关.  $\partial D$ 由有限条分段光滑互不相交的简单闭曲线所组成,  $\partial S$ 是 $\partial D$ 的光滑映象,  $\partial S$ 也是由有限条分段光滑的互



不相交的简单闭曲线所组成。

由定理15·21的(a)可知在一光滑曲面元素上的任一点的某邻域内，曲面是形如

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad x_1 = g(x_2, x_3), \quad x_2 = h(x_1, x_3)$$

三方程之一的图象， $f, g, h$ 都是光滑函数。

当 $f$ 是在包含 $D \cup \partial D$ 的区域上光滑的函数，那么点集 $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in D \cup \partial D\}$ 是光滑的曲面元素。事实上，注意到 $S$ 有如下的参数表示

$$x_1 = s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = f(s, t), \quad (s, t) \in D \cup \partial D,$$

合乎(15·42)，(15·43)的条件。因此 $S$ 是光滑曲面元素。

**定义** 分段光滑曲面 $S$ 是有限个曲面元素 $S_1, S_2, \dots, S_n$ 的并，且满足下列五个条件：

(i) 没有两个 $S_i$ 有公共内点。

(ii)  $\partial S_i \cap \partial S_j, i \neq j$ , 是空的、一个点或是一段光滑的弧(图15·19)。

(iii) 任意三个不同的曲面元素的边界最多有一个公共点。

(iv)  $S$ 的任意两个点可用位于 $S$ 上的轨道来联结，

即 $\exists$ 联结两点而且位于 $S$ 上的轨道。

(v) 所有仅是唯一的 $S_i$ 边界上弧的并形成有限条互不相交的分段光滑的简单闭曲线，恰好是 $S$ 的边界 $\partial S$ 。当 $\partial S$ 是

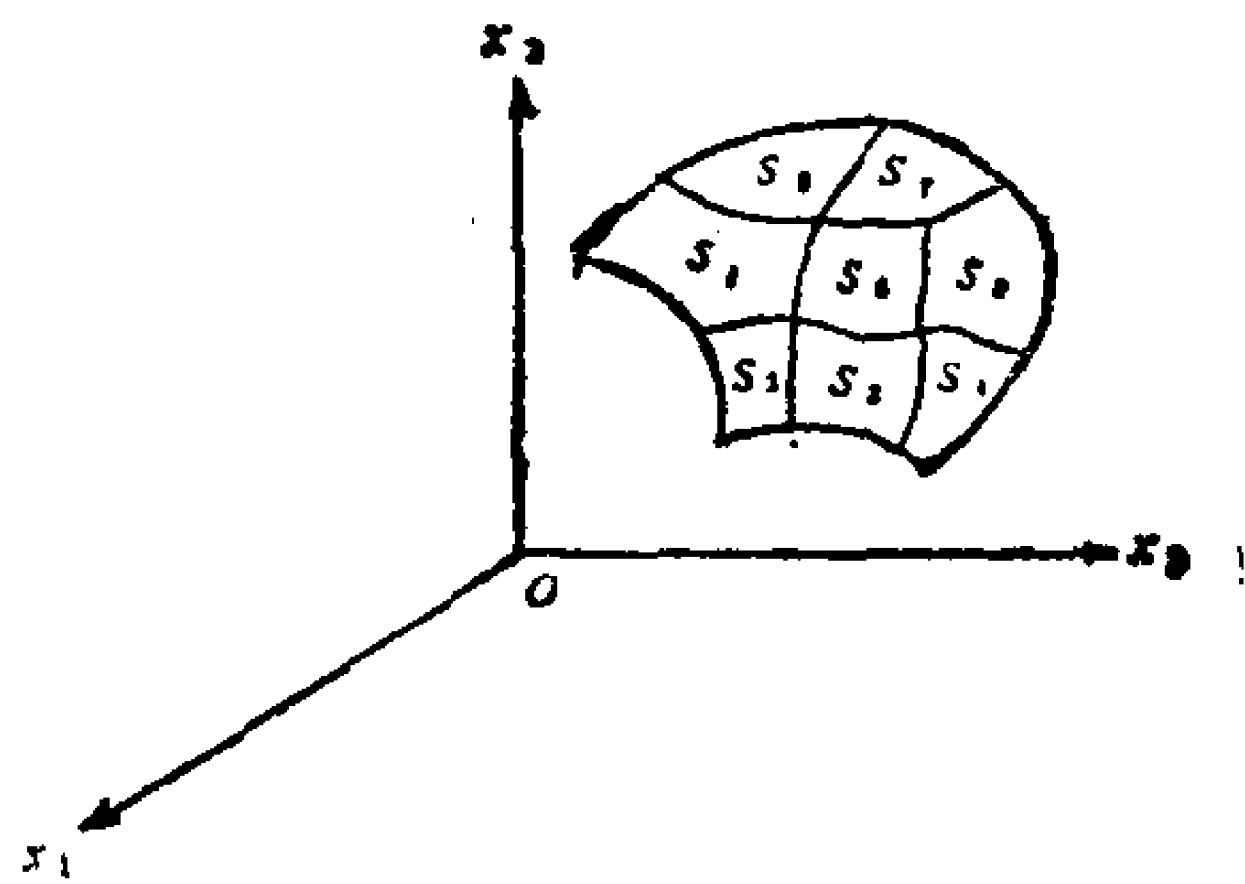


图 15·19

空集时 $S$ 是无边界的分段光滑曲面。

分解分段光滑曲面为有限个光滑曲面元素的方法不是唯一的。一条弧是两个 $S_i$ 的边界的部分时，称它为分解的边缘。 $S_i$ 边界的偶角称为顶点。

一分段光滑曲面称为光滑曲面，当且仅当曲面上不在边界 $\partial S$ 上的点 $p$ ，都有曲面的分解，把曲面分解为几个曲面元素，使 $P$ 点是一曲面元素的内点。

假若 $F$ 是 $\mathbf{R}_3$ 内某区域上的光滑数量场，且 $F(x_1, x_2, x_3)$ 与 $\nabla F(x_1, x_2, x_3)$ 不同时为零，那么能够证明，当 $F=0$ 的图象是有界闭集时，它是光滑曲面。把这一结果的证明留给读者。例如函数

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2,$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - 1,$$

$F=0$ 的图象分别是球面，椭球面。而任一多面体的表面是分段光滑曲面的例子。

**例** 设定义在 $\mathbf{R}_3$ 上的数量场

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 44.$$

证明集 $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : F=0 \}$ 是一光滑曲面。

**解** 求出

$$\nabla F = 2x_1 \mathbf{e}_1 + 8x_2 \mathbf{e}_2 + 18x_3 \mathbf{e}_3.$$

可见仅在 $(0, 0, 0)$ 点 $\nabla F=0$ 。因为 $S$ 非空(例如点 $(\sqrt{44}, 0, 0) \in S$ )，且 $(0, 0, 0)$ 不属于 $S$ ，且由 $F=0$ 是一闭的有

界集，因此曲面  $F=0$  是光滑的。

## 习 题

1. 求半球面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 > 0 \}$  的两个参数方程，并求出联系两组参数的如 (15·46) 中的变换  $T$ 。
2. 同习题1，这里  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 1, x_3 > 0 \}$ 。
3. 设顶点为  $(0, 0, 0)$ ， $(1, 0, 0)$ ， $(0, 1, 0)$ ， $(1, 1, 0)$ ， $(0, 0, 1)$ ， $(0, 1, 1)$ ， $(1, 0, 1)$ ， $(1, 1, 1)$  的立方体。试把立方体表面分解为曲面元素，并验证边界是空集。
4. 设球面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ 。分解  $S$  为曲面元素并验证  $S$  是一无边界的光滑曲面。
5. 设圆锥曲面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, -1 < x_3 < 1 \}$ 。判别  $S$  是否是光滑曲面。
6. 设环面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b)^2 + x_3^2 = a^2 \}$ ， $0 < a < b$ 。试将  $S$  分解为光滑曲面元素，并验证  $S$  是无边界的曲面。
7. 设  $F$  是定义在  $R_3$  内区域  $D$  上的数量场。且  $F$  与  $\nabla F$  不同时为零。 $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : F(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$  是闭的有界集。证明  $S$  是一光滑曲面。
8. 设  $S_0 = \{ (x_1, x_2, x_3) : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 4 \}$   
 $S_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : 2(x_1^2 + x_2^2) = 1, x_3 > 0 \}$ 。  
 证明  $S_1 \cap S_0$  是一分段光滑曲面。画出  $\partial S$ 。

## § 15·6 曲面的面积及曲面积分

设曲面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_3 = f(x_1, x_2) (x_1, x_2) \in D \cup \partial D \}$ , 当  $f$  有一阶连续偏导数, 曲面  $S$  的面积  $A(S)$  的计算公式为

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2} dA.$$

为了计算更复杂的曲面的面积, 首先求光滑曲面元素的面积公式.

设  $\sigma$  是一光滑的曲面元素, 它的参数表示为

$$\sigma : \overrightarrow{OQ} = \mathbf{r}(s, t), (s, t) \in D \cup \partial D \quad (15 \cdot 47)$$

$\mathbf{r}$  及  $D$  满足光滑曲面元素定义的条件. 当  $t$  取常数  $t_0$ , 那么

(15·47) 的图象是位于  $\sigma$  上的一条光滑曲线  $\mathbf{r}(s, t_0)$ . 因此  $\mathbf{r}_s(s, t_0)$  是曲面上这条曲线的切矢. 同样,  $\mathbf{r}_t(s_0, t_0)$  则是曲面上曲线  $\mathbf{r}(s_0, t)$  的切矢 (图 15·20 所示). 矢  $\mathbf{r}_s(s_0, t_0)$ ,

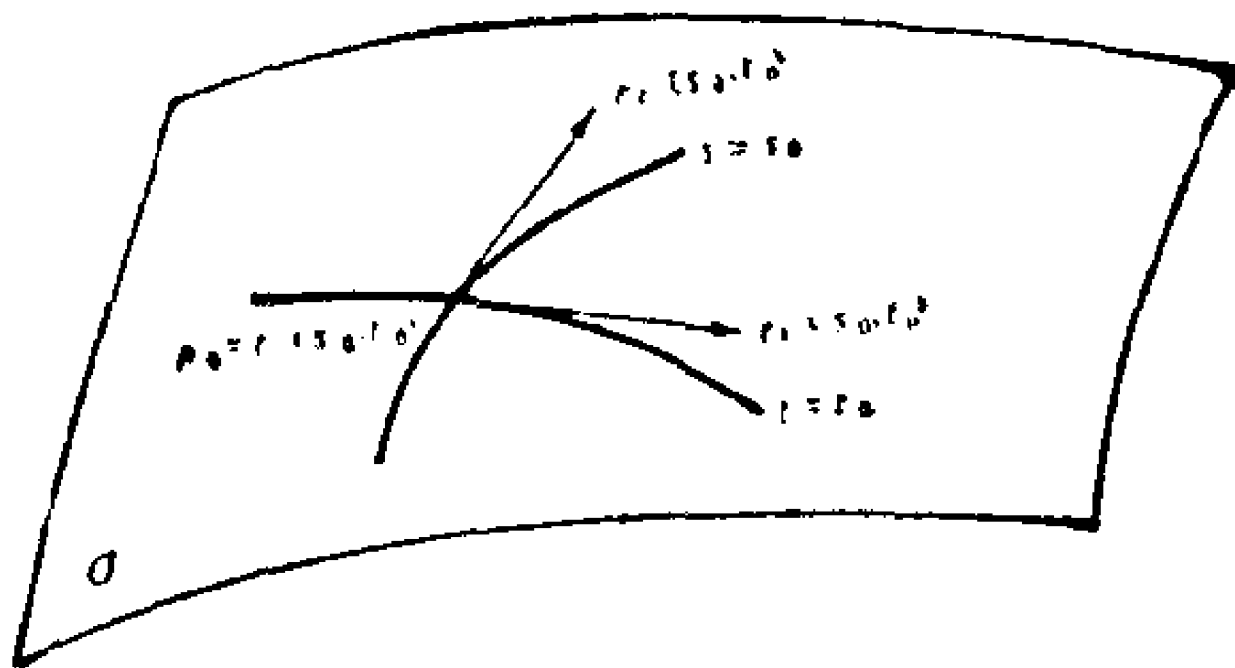


图 15·20

$\vec{r}_t(s_0, t_0)$  都位于曲面的过  $\vec{OP_0} = \vec{r}(s_0, t_0)$  矢端  $P_0$  点的切平面上.

**定义** 设曲面元素  $\sigma$  由 (15·47) 所表示,  $P_0 \in \sigma$ . 给出  $R_2$  上的变换: 对  $(s, t) \in R_2$

$$\begin{aligned} \vec{U}(\vec{OP}) &= \vec{r}(s_0, t_0) + \vec{r}_s(s_0, t_0)(s - s_0) \\ &\quad + \vec{r}_t(s_0, t_0)(t - t_0) \end{aligned} \quad (15 \cdot 48)$$

称为曲面在  $P_0$  点的切线变换.  $P$  点的集是  $\sigma$  过  $P_0$  点的切平面  $\pi$ .  $R_2$  中的矩形  $R = \{ (s, t) : s_1 \leq s \leq s_2, t_1 \leq t \leq t_2 \}$  在变换 (15·48) 之下的像是切平面  $\pi$  上的平行四边形  $ABCD$  (图15·21) .

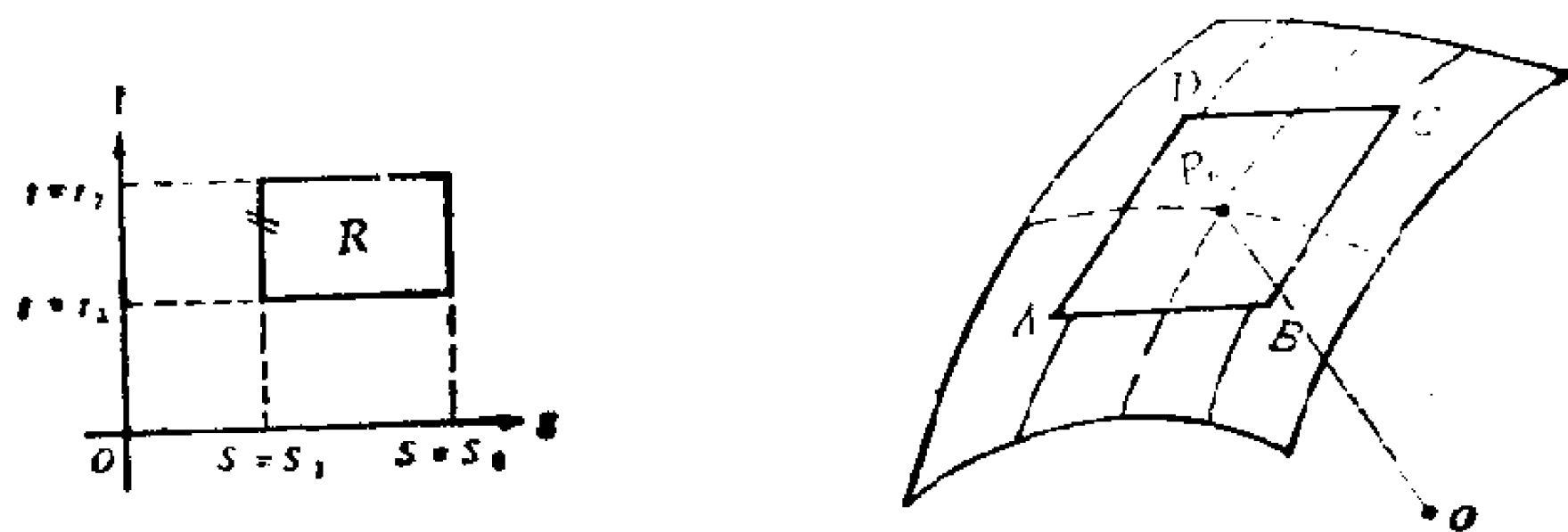


图 15.21

令  $\mathbf{a} = \vec{r}_s(s_0, t_0)$ ,  $\mathbf{b} = \vec{r}_t(s_0, t_0)$ , 点  $A, B, C, D$  满足

$$\vec{OA} = \vec{r}(s_0, t_0) + \mathbf{a}(s_1 - s_0) + \mathbf{b}(t_1 - t_0)$$

$$\vec{OB} = \vec{r}(s_0, t_0) + \mathbf{a}(s_2 - s_0) + \mathbf{b}(t_1 - t_0)$$

$$\vec{OC} = \vec{r}(s_0, t_0) + \mathbf{a}(s_1 - s_0) + \mathbf{b}(t_2 - t_0)$$

$$\vec{OD} = \vec{r}(s_0, t_0) + \mathbf{a}(s_2 - s_0) + \mathbf{b}(t_2 - t_0).$$

据此，求得

$$\begin{aligned}\vec{v}(\overrightarrow{AB}) &= \vec{v}(\overrightarrow{OB}) - \vec{v}(\overrightarrow{OA}) = (s_2 - s_1)\mathbf{a} \\ \vec{v}(\overrightarrow{AD}) &= \vec{v}(\overrightarrow{OD}) - \vec{v}(\overrightarrow{OA}) = (t_2 - t_1)\mathbf{b}.\end{aligned}$$

以矢积的长度表示 $ABCD$ 的面积：

$$|\vec{v}(\overrightarrow{AB}) \times \vec{v}(\overrightarrow{AD})| = |(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

以 $A(R)$ 表示 $R$ 的面积 $|(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)|$ ，有

$$ABCD \text{ 的面积} = A(R) |\mathbf{r}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{r}_t(s_0, t_0)|.$$

为了定义曲面元素的面积，以曲面片上相应的切平面 $\pi$ 上的平行四边形来逼近曲面片。当曲面片越“小”这种逼近精度越高。

**定义** 设 $\sigma$ 是由(15·47)表示的光滑曲面元素。划分 $D$ 为有限个子区域： $D_1, D_2, \dots, D_n$ ，记这一划分 $\Delta$ 的网孔 $\|\Delta\| = \max_i \{\text{diam} D_i\}$  ( $\text{diam} D_i$ 表示 $D_i$ 的直径)。曲面

元素 $\sigma$ 的面积 $A(\sigma)$ 定义为

$$A(\sigma) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(D_i) |\mathbf{r}_s(s_i, t_i) \times \mathbf{r}_t(s_i, t_i)|,$$

这里 $A(D_i)$ 是 $D_i$ 的面积， $(s_i, t_i)$ 是 $D_i$ 的任一点，这里极限存在的意义与积分定义的极限存在意义一致。

由 $\sigma$ 的面积定义，立即得出公式：

$$A(\sigma) = \iint_D |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| dA \quad (15 \cdot 49)$$

如果 $\sigma$ 的另一参数表示为

$$\sigma: \overrightarrow{v(O, P)} = \mathbf{r}'(s', t'), \quad (s', t') \in D' \cup \partial D'.$$

在这参数表示之下的面积 $A'(\sigma)$ 为

$$A'(\sigma) = \iint_{D'} |\mathbf{r}'_s(s', t') \times \mathbf{r}'_t(s', t')| dA'. \quad (15.50)$$

当证明了 $A(\sigma) = A'(\sigma)$ 时, 曲面面积的上述定义才是合理的.

事实上, 根据雅可比的乘法法则及重积分变量替换公式, 有

$$|\mathbf{r}'_{s'}(s', t') \times \mathbf{r}'_{t'}(s', t')| = |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot$$

$$\left| J\left(\frac{s, t}{s', t'}\right) \right|,$$

因而

$$\begin{aligned} & \iint_{D'} |\mathbf{r}'_{s'}(s', t') \times \mathbf{r}'_{t'}(s', t')| dA' \\ &= \iint_{D'} |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot \left| J\left(\frac{s, t}{s', t'}\right) \right| dA' \\ &= \iint_D |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot \left| J\left(\frac{st}{s't'}\right) \right| \cdot \left| J\left(\frac{s', t'}{s, t}\right) \right| dA \\ &= \iint_D |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| dA. \end{aligned}$$

即 $A(\sigma) = A'(\sigma)$ .

如果 $\sigma$ 由 $x_3 = f(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in D \cup \partial D$ 表示, 令  
 $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = f(s, t)$ , 并求得

$$J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right) = -f_s, \quad J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right) = -f_t,$$

$$J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| &= \sqrt{J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)^2 + J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)^2 + J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + f_s'^2 + f_t'^2} \end{aligned}$$

(15·49) 式成为

$$A(\sigma) = \iint_D \sqrt{1 + f_s'^2 + f_t'^2} dA. \quad (15\cdot51)$$

曲面 $\sigma$ 由单一方程如 $x_3 = f(x_1, x_2)$ 所表示, 就说曲面 $\sigma$ 用非参数式给出.

然而, 多数曲面不能以非参数式表示. 因而一般说曲面面积不能应用 (15·51) 式来计算. 可以证明象球面这样简单的曲面不能是单一光滑曲面元素的部分.

如果 $S$ 是一分段光滑曲面, 可以把它分解开来定义 $S$ 的面积. 设 $F \subset \sigma$ ,  $F$ 是一图形  $\iff F$ 是图形  $E \subset D \cup \partial D$  在 (15·47) 之下的象.  $F$ 的面积按 (15·49) 式定义. 同样根据雅可比的乘法法则及重积分变量替换公式,  $F$ 的面积与 $\sigma$ 的参数表示的特殊选取无关.  $F$ 的面积记为 $A(F)$ .

**定义** 设 $S$ 是一分段光滑曲面.  $S$ 内的集 $F$ 是一图形  $F \iff$



$F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ ,  $\forall F_k$ , 是含于  $S$  的唯一的平滑曲面元素  $\sigma_i$  内的图形, 并且任两  $F_i$  没有公共内点.  $F$  的面积定义为.

$$A(F) = A(F_1) + \cdots + A(F_k).$$

应当证明  $F$  的任意这样两个分解都有同样的值  $A(F)$ , 上述定义才是合理的. 这可根据相应的  $F$  的原象  $E \subset D \cup \partial D$  的分解, 及公式 (15.49) 与积分变量替换公式证明, 证明的细节省略.

假定  $F$  是分段平滑曲面上的闭图形. 如果  $F = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$ , 每一  $F_i$  是包含在一平滑曲面元素之内的图形. 每一  $F_i$  是  $R_2$  中图形  $E_i \subset (D_i \cup \partial D_i)$  在映象.

$$\overrightarrow{v(OQ)} = r_i(s, t), \quad (s, t) \in D_i \cup \partial D_i, \quad (15.52)$$

之下的象,  $D_i$  是互不相交的. 设  $f: F \rightarrow R_1$  是连续的数量场, 如下定义  $f$  在  $F$  上的积分:

$$\text{定义} \quad \iint_{F_i} f dS = \iint_{E_i} f[r_i(s, t)] \cdot |r_{i,s} \times r_{i,t}| dA \quad (15.53)$$

而  $f$  在  $F$  上的积分

$$\iint_F f dS = \sum_{i=1}^k \iint_{F_i} f dS. \quad (15.54)$$

如定义之前所述,  $\iint_F f dS$  与划分  $\{F_i\}$  及 (15.52) 的参数

表示的选取都无关.

当曲面元素 $\sigma$ 具有非参数表示 $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$ , 那么  
(15.53) 成为

$$\iint_{F_i} f dS = \iint_{E_i} f[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2} dA. \quad (15.55)$$

上式右端是通常的二重积分, 可化为累次积分计算. 下面举例说明这种计算方法并给出这种积分的直接应用.

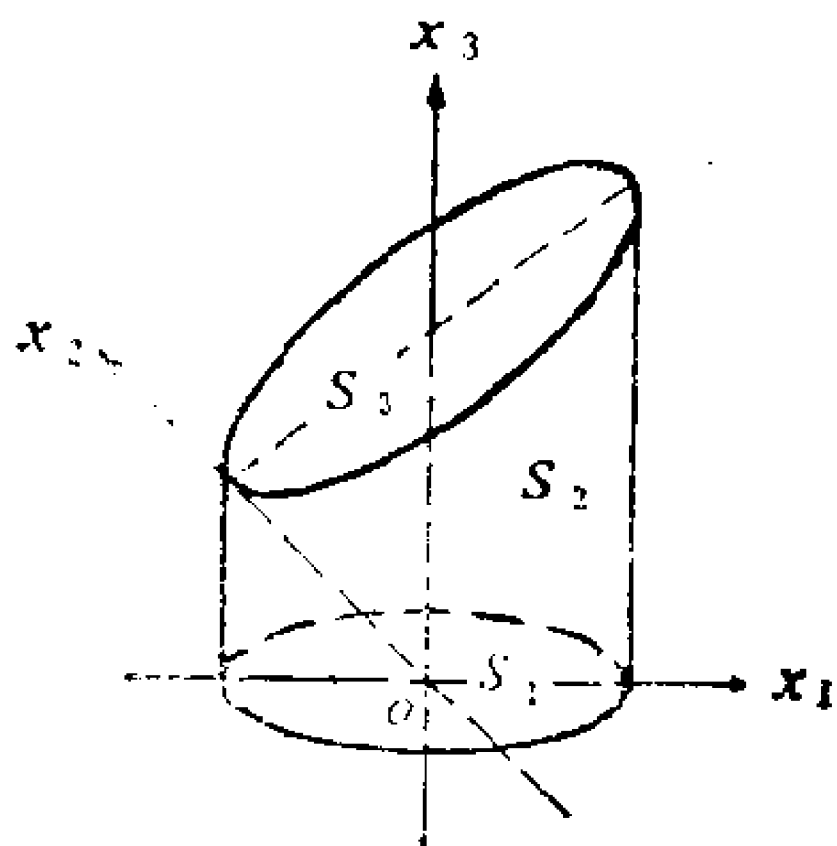


图 15.22

**例1** 设 $F$ 是柱面 $x_1^2 + x_2^2 = 4$  界于平面 $x_3 = 0$  及  $x_3 = x_2 + 3$  之间的部分的侧面 (图15.22),

求  $\iint_F x_3^2 dS$  的值.

**解** 变换到柱面坐标系:

$$x_1 = r \sin \theta, \quad x_2 = r \cos \theta, \quad x_3 = z.$$

那么 $F$ 位于 $r = 2$ 上. 可以 $\theta, z$ 为 $F$ 的参数坐标, 且令

$$G = \{ (\theta, z) : -\pi \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq 3 + 2 \cos \theta \}.$$

$$F = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2 \sin \theta, \quad x_2 = 2 \cos \theta, \quad x_3 = z, \quad (\theta, z) \in G \}.$$

曲面面积元素 $dS = |r_\theta \times r_z| dA_{\theta z}$  (图15.23), 且因为

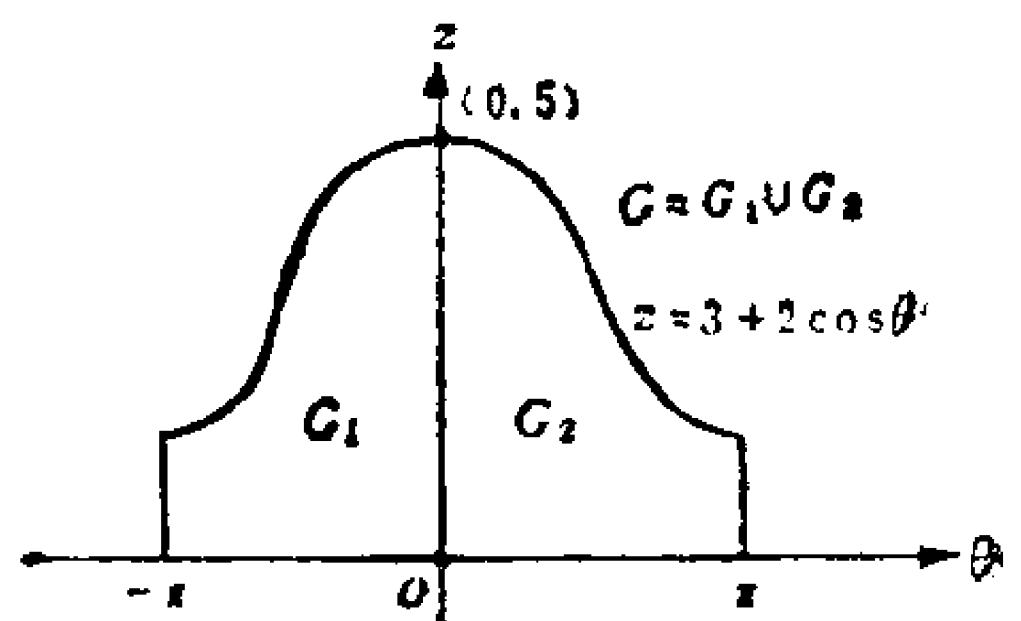


图 15.23

$$\begin{aligned} r_\theta \times r_z &= J\left(\frac{x_2, x_3}{\theta, Z}\right) e_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{\theta, Z}\right) e_2 + J\left(\frac{x_1, x_2}{\theta, Z}\right) e_3 \\ &= -(2\sin\theta) e_1 - (2\cos\theta) e_2 + 0 e_3, \end{aligned}$$

所以

$$dS = 2 \cdot dA_{\theta z}.$$

因而

$$\begin{aligned} \iint_F x_3^2 dS &= 2 \iint_G z^2 dA_{\theta z} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{3+2\cos\theta} z^2 dz d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{-\pi}^{\pi} (3+2\cos\theta)^2 d\theta = 60\pi. \end{aligned}$$

(15.56)

注 曲面 $F$ 不是单一光滑曲面元素，因为 $G$ 的 $(-\pi, z)$ 与 $(\pi, z)$ 点在 $G$ 到 $F$ 的变换下变成 $F$ 的同一点，这与光滑曲面元素要求变换是1—1的相违背。但如图15.23所示划分 $G$ 为 $G_1$ 及 $G_2$ ， $G_1$ ， $G_2$ 各自的映象是光滑曲面元素，积分(15.56)的值不变。

曲面积分被用来计算各种各样的物理量。例如薄曲面板的质量中心及惯性矩的计算归为曲面积分，分布在曲面上的电荷位势也归成曲面积分。假定曲面上分布一层质量，其面密度为 $\delta$ ， $\delta$ 是连续函数，曲面 $F$ 上分布的总质量表示为 $M(F)$

$= \iint_F \delta(P) dS$ 。曲面 $F$ 关于 $x_3$ 轴的惯性矩 $I_{x_3}$ 计算公式是

$$I_{x_3}(F) = \iint_F \delta(P) (x_1^2(p) + x_2^2(p)) dS,$$

$I_{x_1}(F)$ ,  $I_{x_2}(F)$ 也有同样的公式.

**例2** 求曲面  $S = \{x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$  关于  $x_1$  轴的惯性矩, 假定密度  $\delta$  是常量.

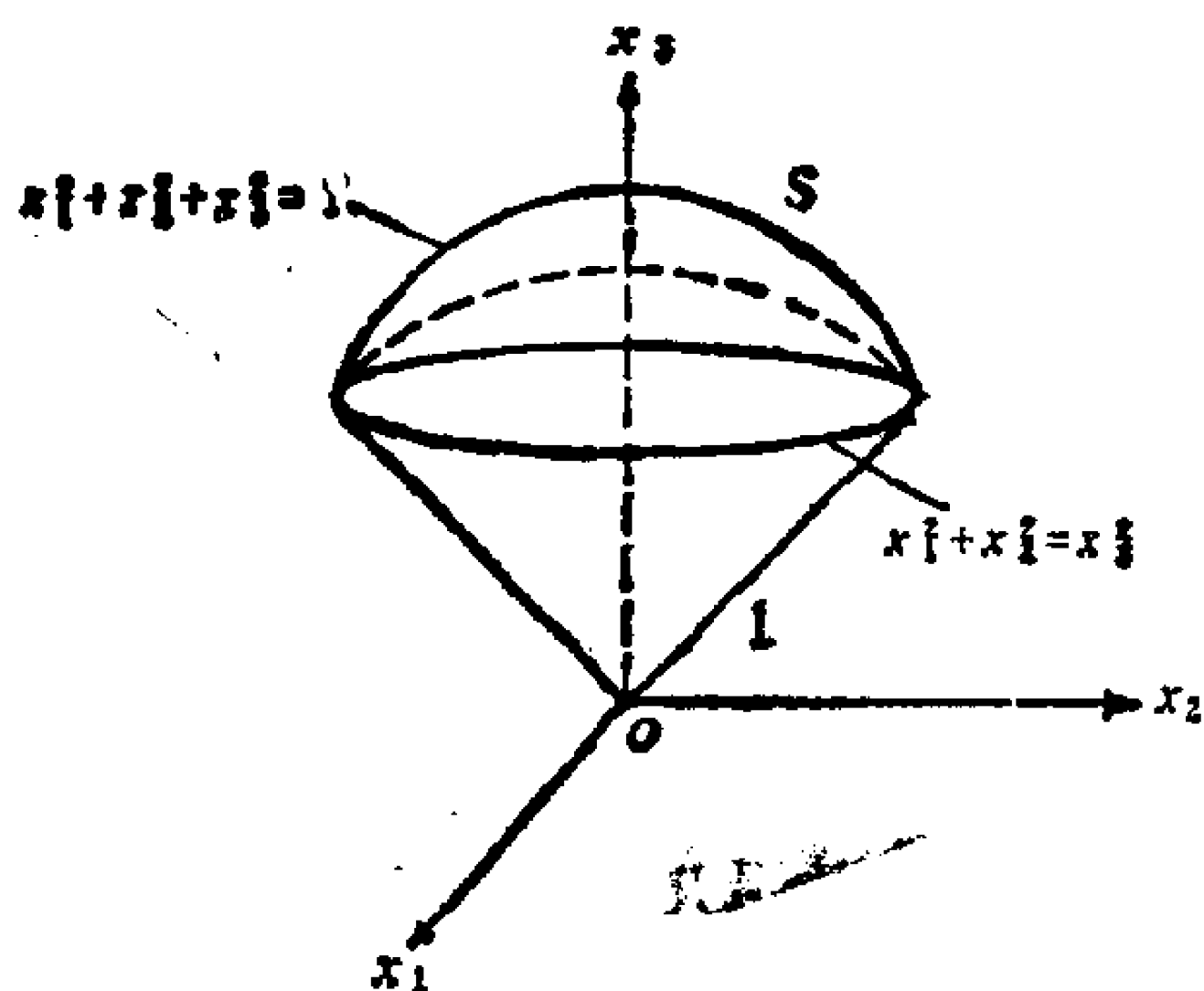


图 15.24

**解** 据  $S$  的特性(图 15.24) 引用球面坐标:

$$x_1 = \rho \cos \theta \sin \varphi,$$

$$x_2 = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x_3 = \rho \cos \varphi \text{ 且令}$$

$$D = \{(\theta, \varphi) :$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi$$

$$\leq \frac{\pi}{4}\}. \text{ 那么}$$

$$S = \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho = 1, (\theta, \varphi) \in D\}.$$

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = J \begin{pmatrix} x_2, x_3 \\ \varphi, \theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 + J \begin{pmatrix} x_3, x_1 \\ \varphi, \theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + J \begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ \varphi, \theta \end{pmatrix} \mathbf{e}_3.$$

$$= (\sin^2 \varphi \cos \theta) \mathbf{e}_1 + (\sin^2 \varphi \sin \theta) \mathbf{e}_2$$

$$+ (\sin \varphi \cos \varphi) \mathbf{e}_3.$$

曲面面积元素

$$dS = |\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| dA_{\varphi\theta} = \sin \varphi dA_{\varphi\theta}.$$

于是

$$I_{x_1} = \iint_D \delta(x_1^2 + x_2^2) \sin \varphi dA_{\varphi\theta}$$

$$= \delta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\theta d\varphi$$

$$= \pi \delta \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{\pi \delta}{12} (16 - 7\sqrt{2}).$$

注  $S$  在球面坐标下的参数表示并不满足  $|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| \neq 0$  的要求, 因为  $|\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta| = \sin \varphi$ , 在  $\varphi = 0$  时等于零, 但可以绕轴挖去一小孔, 这时  $\varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$  曲面便是合乎要求的类型, 然后令小孔趋向于零, 即  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 而得到  $I_x$  和上述同样的值.

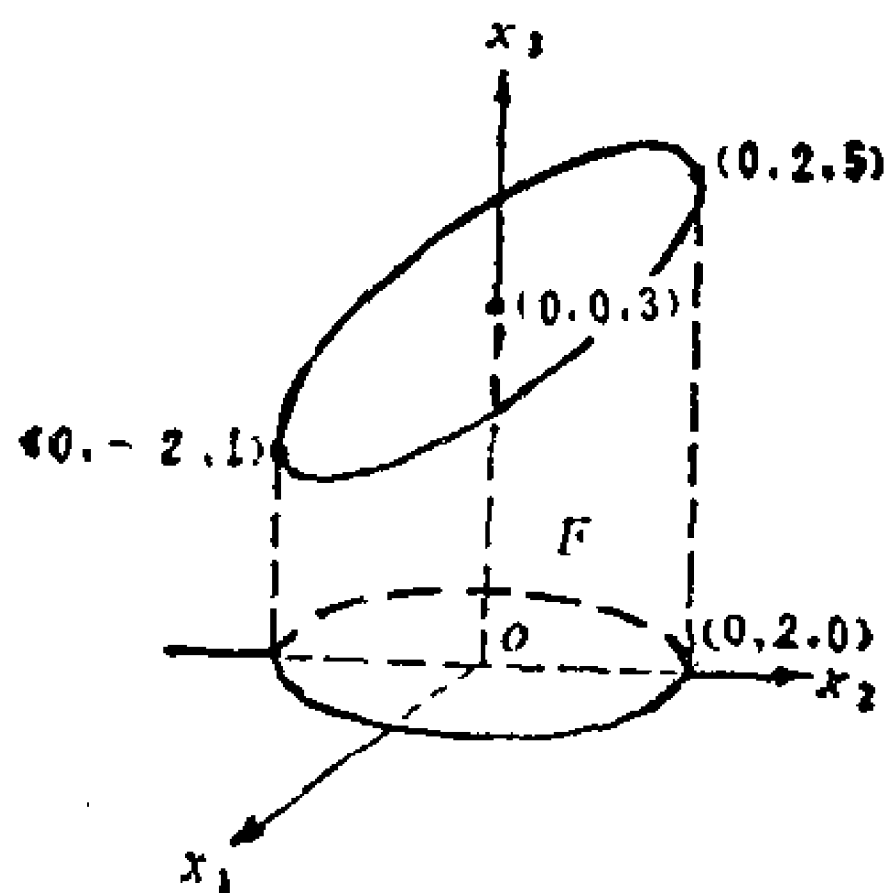


图 15.25

**例3** 设  $R = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq x_1 + 2 \}$  而  $S$  为  $\partial R$  (图15.25).

若  $S$  的面密度  $\delta$  为常数, 求  $S$  的质量及质量中心的  $x_1$  坐标.

**解** 把  $S$  划分为三部分:  $S_1$ ,  $x_1x_2$  平面上的圆盘;  $S_2$ , 柱面的侧面;  $S_3$ , 平面  $x_3 = x_1 + 2$

在柱面之内的部分. 先计算  $S$  关于  $x_1$  的力矩:

$$\iint_S x_1 dS = \iint_{S_1} x_1 dS + \iint_{S_2} x_1 dS + \iint_{S_3} x_1 dS.$$

因  $x_1$  是奇函数, 所以

$$\iint_{S_1} x_1 dS = 0.$$

在  $S_3$  上,  $S_3: x_3 = x_1 + 2, (x_1, x_2) \in S_1$ . 因此  $dS = \sqrt{2} dA_{x_1, x_2}$ ,  $dA_{x_1, x_2}$  是  $S_1$  上的面积元素. 于是

$$\iint_{S_3} x_1 dS = \sqrt{2} \iint_{S_1} x_1 dA = 0.$$

在  $S_2$  上, 取  $(\theta, Z)$  坐标:  $x_1 = \cos \theta, x_2 = \sin \theta, x_3 = Z$ ,  $dS = dA_{\theta Z}$ , 记

$$D_2 = \{ (\theta, Z): -\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq Z \leq 2 + \cos \theta \},$$

$$\iint_{S_2} x_1 dS = \iint_{D_2} \cos \theta dA_{\theta Z} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2+\cos \theta} \cos \theta dZ d\theta = \pi.$$

于是

$$\iint_S x_1 dS = \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} x_1 dS = \pi.$$

现在来求  $S$  的总质量. 由  $\delta$  是常量, 所以

$$M(S) = \iint_S \delta dS = \delta A(S).$$

注意到曲面  $S$  是分段光滑没有边界的曲面. 柱面  $x_1^2 + x_2^2 = 1$  与平面  $x_3 = 0$  及  $x_3 = x_1 + 2$  的交线是两条光滑边缘,  $S$  上没有顶点,  $A(S) = A(S_1) + A(S_2) + A(S_3)$ .

显然

$$A(S_1) = \pi, \quad A(S_3) = \sqrt{2} \pi.$$

而

$$A(S_2) = \iint_{D_1} dA_{\theta z} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2+\cos\theta} dz d\theta = 4\pi,$$

于是  $M(S) = \pi \delta(5 + \sqrt{2})$ . 为了得到质量中心的  $x_1$  坐标, 用公式

$$\bar{x}_1 = \frac{\delta \iint_S x_1 dS}{M(S)} = \frac{\delta \pi}{\delta \pi (5 + \sqrt{2})} = \frac{1}{5 + \sqrt{2}}.$$

## 习 题

习题1—9 求  $\iint_S f(x_1, x_2, x_3) dS$  的值.

1.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ .
2.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ .
3.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3^2 = x_1^2 + x_2^2, 1 \leq x_3 \leq 2\}$ .
4.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$ ,  $S$  是柱面  $x_3 = \frac{x_1^2}{2}$  被平面  $x_2 = 0$ ,  $x_1 = 2$  及  $x_1 = x_2$  截出的部分.

5.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$ ,  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq x + 2 \}$ .
6.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1$ ,  $S$  是柱面  $x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 = 0$  介于锥面  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$  两叶之间的部分.
7.  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ , 应用  $x_1 x_2$  平面上的极坐标  $(r, \theta)$ ,  $S$  是在螺线  $r = \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  上的垂直柱面, 且以  $x_1 x_2$  平面为下界, 以锥面  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$  为上界的部分.
8.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2$ ,  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \}$ .
9.  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$ ,  $S = \partial R$ ,  $R = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_3^2 \leq x_1^2 + x_2^2, 1 \leq x_3 \leq 2 \}$ .

习题10—14求关于指定轴的惯性矩, 假设密度  $\delta$  是常量.

10.  $S$  如习题3中所给;  $x_1$  轴.
11.  $S$  为习题6中的曲面;  $x_1$  轴.
12.  $S$  为习题7中的曲面;  $x_3$  轴.
13. 曲面  $S$  为  $\partial R$ ,  $R = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 < 1, x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0 \}$ ; 关于  $x_2$  轴.
14. 环面  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : (\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - b)^2 + x_3^2 = a^2, 0 < a < b \}$ ;  $x_3$  轴.

[环面的参数表示]  $x_1 = (b + a \cos \varphi) \cos \theta, x_2 = (b + a \cos \varphi) \sin \theta, x_3 = a \sin \varphi, (\varphi, \theta) \in \{ (\varphi, \theta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$

习题15—17求  $S$  的质量中心, 设  $\delta$  为常量.

15.  $S$  是习题2中的曲面.
16.  $S$  是习题13中的曲面.



$$17. S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4a^2, (x_1 - a)^2 + x_2^2 \leq a^2 \}.$$

设在曲面 $S$ 上分布有电荷,其面密度 $\rho$ ,在 $q$ 点的电势 $E(q)$

$$= \iint_S \frac{\rho(p) dS}{dpq} \text{ 这里 } dpq \text{ 是 } (R_3 - S) \text{ 的点 } q \text{ 到点 } p \in S \text{ 的距}$$

离.

习题18—21 求给定点的 $E(q)$ , 并设 $\rho$ 是常量.

$$18. S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, 0 \leq x_3 \leq 1 \}, \\ q = (0, 0, 0).$$

$$19. S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \}, q = (0, 0, C). \\ (i) C > a > 0; \quad (ii) a > C > 0.$$

$$20. S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, x_3 > 0 \}. \\ q = (0, 0, C), 0 < C < a.$$

$$21. S \text{ 是习题3的曲面, } q = (0, 0, 0).$$

## § 15.7 可定向曲面

假设 $S$ 是一光滑曲面元素, 其参数表示为

$$\vec{r}(\overrightarrow{OP}) = \vec{r}(S, t), (S, t) \in D \cup \partial D \quad (15.57)$$

这里 $D$ 是 $(S, t)$ 平面内具有分段光滑边界 $\partial D$ 的区域. 按光滑

曲面元素的定义, 对

于某一含有 $D \cup \partial D$ 的

区域 $G$ 内的 $(S, t)$ ,

$\vec{r}_S \times \vec{r}_t \neq 0$ (图15.26).

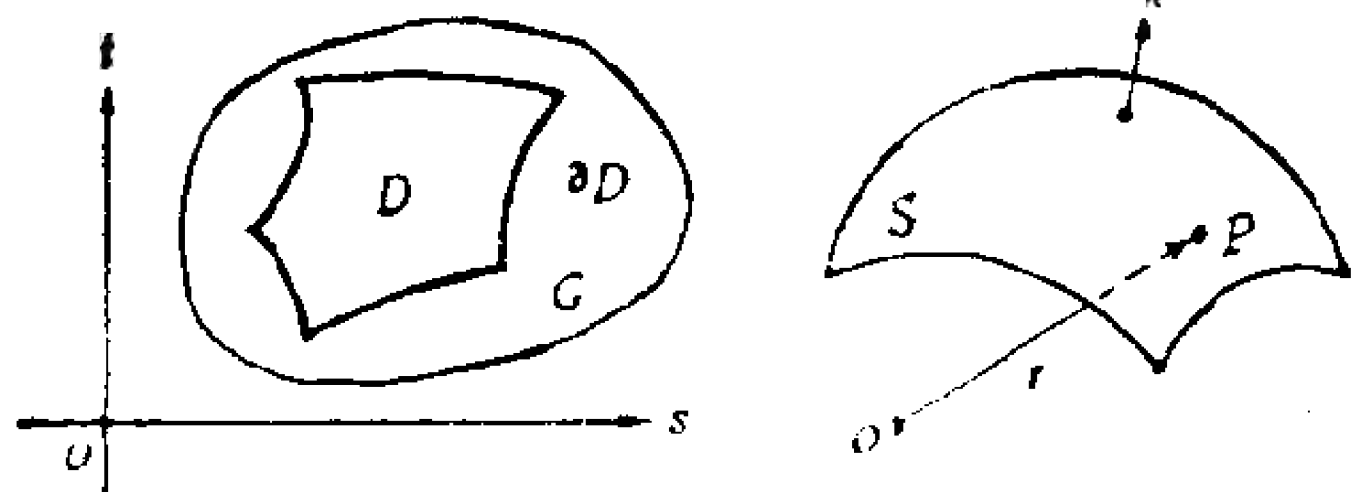


图 15.26

**定义** 对光滑曲面元素 $S$ ，定义单位法矢为

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|}, \quad (s, t) \in D.$$

当 $S$ 是一光滑曲面元素，法矢 $\mathbf{n}$ 是 $(s, t)$ 的连续函数，用雅可比表示， $\mathbf{n}$ 可写成

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^{-1} & \left[ J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right) \mathbf{e}_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right) \mathbf{e}_2 + \right. \\ & \left. J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (15.58)$$

如果曲面 $S$ 另一参数表示为

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}'(s', t'), \quad (s', t') \in D' \cup \partial D'.$$

那么由定理15.21的(b)存在1-1的连续可微变换

$$T: S = U(s', t'), \quad t = V(s', t'), \quad (s', t') \in G'.$$

$T$ 将 $G$ 变换为 $G'$ ， $T(D) = D'$ ， $T(\partial D) = \partial D'$ 。且有

$$\mathbf{r}[U(s', t), V(s', t')] = \mathbf{r}'(s', t'), \quad (s', t') \in D'.$$

以 $S$ 的第二个参数表示来确定单位法矢 $\mathbf{n}'$ ：

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' = |\mathbf{r}'_{s'} \times \mathbf{r}'_{t'}|^{-1} & \left[ J\left(\frac{x_1, x_3}{s', t'}\right) \mathbf{e}_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{s', t'}\right) \mathbf{e}_2 \right. \\ & \left. + J\left(\frac{x_1, x_2}{s', t'}\right) \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned} \quad (15.59)$$

用雅可比相乘法则，由(15.58)及(15.59)断定对所有  
 $p \in S$

$$n'(p) = n(p) \text{ 或 } n'(p) = -n(p),$$

正负号依  $J \begin{pmatrix} s & t \\ s' & t' \end{pmatrix}$  在  $D' \cup \partial D'$  上是正或负来决定。

**定义** 光滑曲面  $S$  是可定向的  $\iff \exists S$  上处处有定义的  $S$  的单位法矢  $n$ ,  $n$  是连续的矢函数。这样单位法矢函数称为  $S$  的一定向。

由法矢函数在  $S$  的点  $p$  有两种取向  $n(p)$  或  $-n(p)$ , 相应的可定向曲面恰好具有两种定向, 一种定向是另一种定向的反向。一定向曲面是序偶  $(S, n)$ , 这里  $n$  是两种可能定向取定的一种。取定一定向曲面仍以  $S$  表示 (其反定向记为  $S_-$ )。如果  $F$  是  $S$  的光滑曲面元素, 那么限制  $n$  在  $F$  上, 给出了  $F$  一种定向  $(F, n) = F$ 。这样定向的  $F$  是由  $S$  的定向所导出。

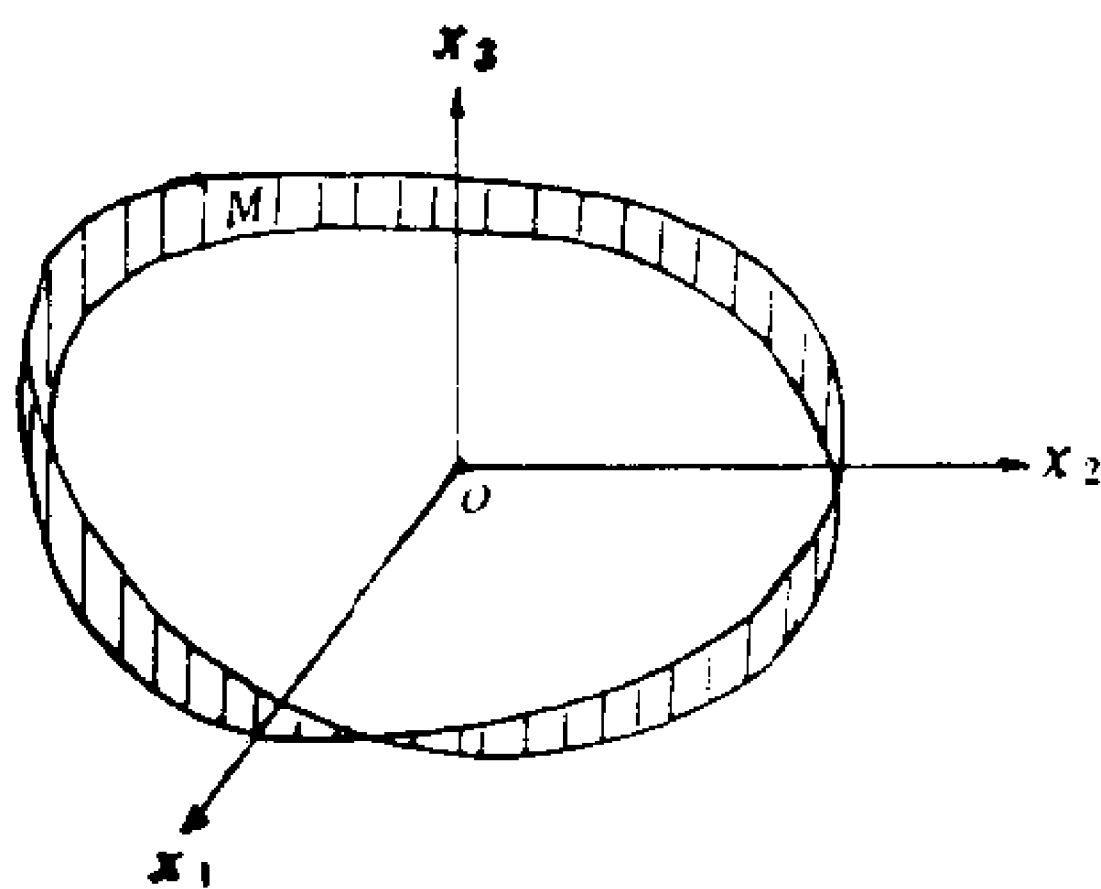


图 15·27

象球面, 椭球面, 环面等光滑曲面, 直观上显然地都是定向曲面。但是, 的确存在不能定向的光滑曲面。(图15·27)所示的莫比乌斯带就是不能定向的曲面。这一曲面的模型可由一条狭长的矩形纸带, 将一头扭转  $180^\circ$

之后, 然后把两端胶合在一起而构成。莫比乌斯带的参数表示为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= (a + t \sin \frac{1}{2}s) \cos s & (s, t) \in R, \\ x_2 &= (a + t \sin \frac{1}{2}s) \sin s \\ x_3 &= t \cos \frac{1}{2}s \end{aligned} \right\} \quad (15 \cdot 60)$$

$$R = \{ (s, t) : 0 \leq s \leq 2\pi, -h \leq t \leq h \}, \quad 0 < h < a.$$

为了求莫比乌斯带  $M$  的单位法矢, 首先计算

$$J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right) = (a + t \sin \frac{1}{2}s) (\cos \frac{1}{2}s) (\cos s) + \frac{1}{2} t \sin t,$$

$$J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right) = (a + t \sin \frac{1}{2}s) (\cos \frac{1}{2}s) (\sin s) - \frac{1}{2} t \cos t,$$

$$J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) = -(a + t \sin \frac{1}{2}s) \sin \frac{1}{2}s.$$

那么

$$|\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^2 = (a + t \sin \frac{1}{2}s)^2 + \frac{1}{4} t^2,$$

$\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t$  不为  $O$ , 当我们定义  $\mathbf{n}(s, t)$  为

$$\mathbf{n}(s, t) = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^{-1} \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t,$$

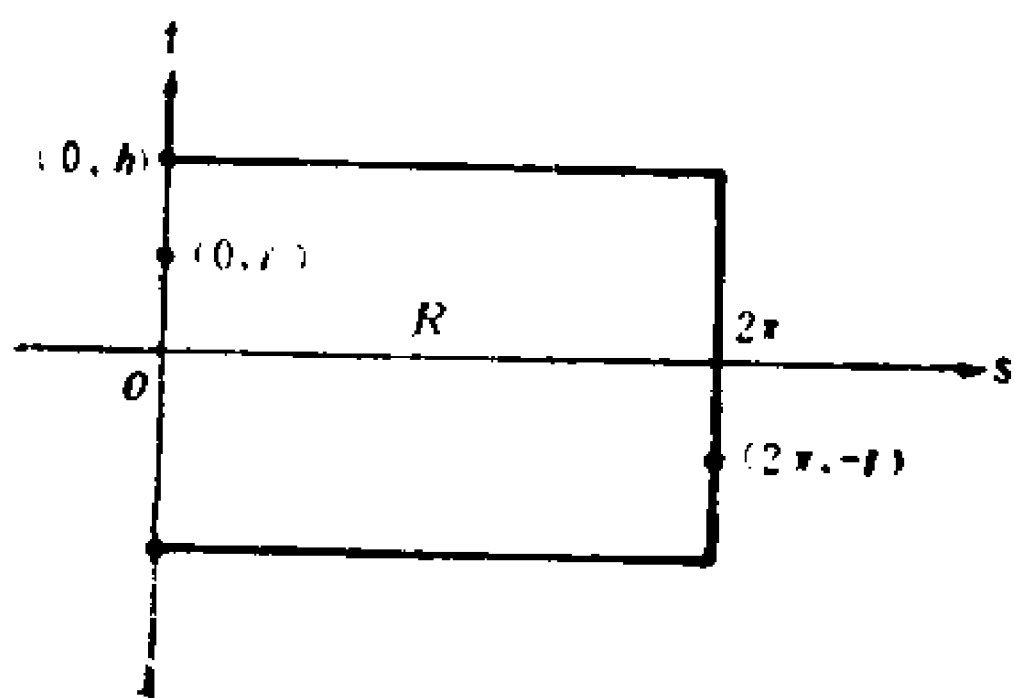


图 15·28

很明显  $\mathbf{n}(s, t)$  是连续的.

但是,  $\mathbf{n}(0, 0) = \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{n}(2\pi, 0) = -\mathbf{e}_1$ , 而  $(0, 0)$  及  $(2\pi, 0)$  是  $R$  内对应  $M$  上同一点的. 变换 (15·60) 把  $R$  的  $(0, t)$  及  $(2\pi, -t)$ ,

$-h \leq t \leq h$  变换为  $M$  的同一点 (图15·28),  $M$  不是光滑曲面元素. 如果铅笔垂直于曲面来画  $M$  带子的中心线, 铅笔画完一圈之后回到出发点, 则铅笔发生倒向! 或者可以不越过边界将  $M$  带各处着色 (即原矩形两面都着色). 象这种曲面称为“单侧曲面”, 单侧曲面是不能定向的. 凡可定向的曲面, 它的法矢可取两种方向, 曲面有两侧称为“双侧曲面”.

若光滑曲面元素其参数表示为

$$\vec{R}(\overrightarrow{OP}) = \mathbf{r}(s, t), (s, t) \in D \cup \partial D, \quad (15 \cdot 61)$$

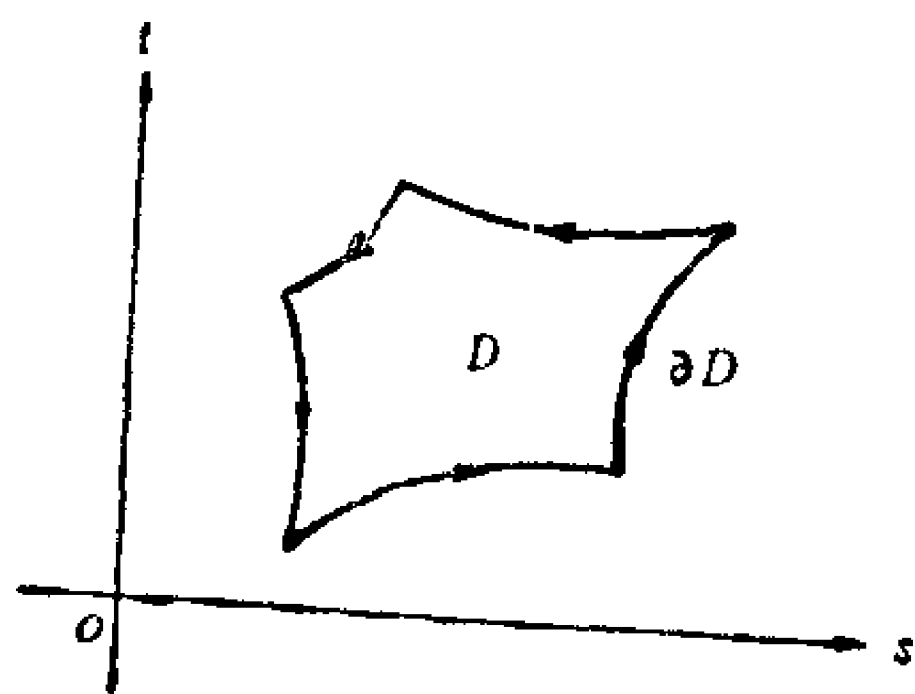


图 15·29

边界  $\partial S$  是  $\partial D$  的映象. 因为  $R_2$  被定向, 我们说  $D$  是正定向的, 如果沿  $\partial D$  行走  $D$  在左边 (图15·29), 对这一定向记为  $\partial D$ , 其相反定向记为  $-\partial D$ .

设  $S$  是一定向曲面且其定向由参数表示 (15·61) 所规定. 那么每一  $S$  边界上的闭曲线  $\Gamma$ , 将由  $\partial D$  的定向闭曲线  $C$  导出它的定向  $\Gamma$ , 这里  $\Gamma$  是  $C$  的象. 当  $C$  是正定向的, 就称  $\Gamma$  是关于  $S$  的正定向曲线. 从几何上来说, 如果按  $S$  的正法矢  $\mathbf{n}$  的方向为向上的方向, 沿  $\partial S$  行走曲面在左边, 这种  $\Gamma$  的定向是正定向 (图15·30). 用  $R_3$  内的正向及负向坐标系的术语来说, 若  $\mathbf{t}$  是  $\partial S$  的正向切矢,  $\mathbf{n}$  是垂直于  $\mathbf{t}$  且取  $S$  正法矢方向,  $\mathbf{b}$  与  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$

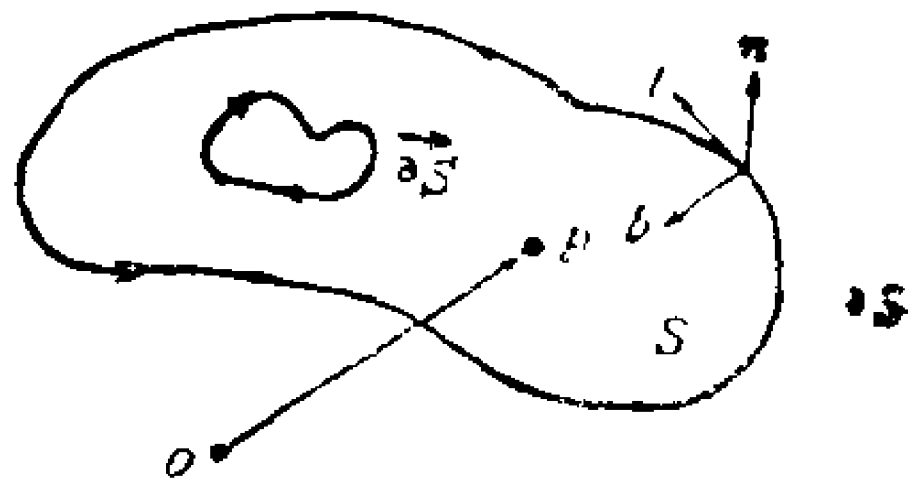


图 15·30

相垂直且指向曲面 $S$ ，那么 $\mathbf{t}$ ， $\mathbf{b}$ ， $\mathbf{n}$ 是正定向的坐标系 ( $\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}$ )。如果 $\partial D$ 及 $\partial S$ 是由几条闭曲线组成，上述定向对每条曲线都成立。

定向曲面的概念可以推广到分段光滑曲面。这种曲面之上有边缘，因此不能定义在整个曲面上的连续的单位法矢场。但是分段光滑曲面可以划分成有限个光滑曲面元素 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 。每一曲面元素可以定向而其边界能导出一正定向。

**定义** 设 $\Gamma_{ij}$ 是 $F_i$ 及 $F_j$ 的公共边界， $\Gamma_{ij}$ 是光滑弧。如果 $\Gamma_{ij}$ 作为 $\partial F_i$ 的部分的正定向，与作为 $\partial F_j$ 的部分的正定向其方向恰好相反，这一性质对所有 $\Gamma_{ij}$ 成立就称曲面 $F$ 是可定向的分段光滑曲面。定向曲面元素 $F_i$ 的集合形成 $F$ 的定向，定义在每一 $F_i$ 内部的单位法矢函数称为 $F$ 的正的法矢函数。

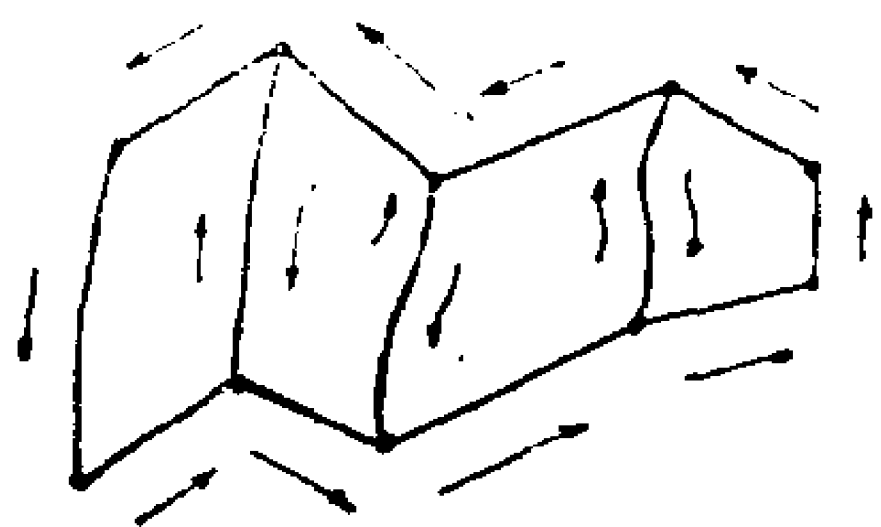


图 15·31

图15·31所示的曲面是一分段光滑可定向曲面，它分解成为四片光滑曲面元素。所有 $F_i$ 的边界弧中仅有一次定向的弧组成了 $\partial F$ ， $\partial F$ 是正定向的分段光滑的闭曲线。 $\partial F$ 也可能是空集（例如 $S$ 是立方体的表面时 $\partial S$ 是空集）。

由上面分析可知，如果一分段光滑曲面按某一分解它是可定向的，那么按另一分解它也是可定向的。不能定向的曲面，不论对它作怎样的分解，都有某 $\Gamma_{ij}$ 作为 $\partial F_i$ 及 $\partial F_j$ 的公共部分的定向是相同的。像莫比乌斯带就是如此。

**例** 设 $S$ 是以 $(0, 0, 0)$ ， $(1, 0, 0)$ ， $(0, 1, 0)$ ， $(0, 0, 1)$ 为顶点的四面体的表面。划分 $S$ 为光滑曲面元

素，对每一曲面元素找一参数表示，并以参数表示其单位法矢 $\mathbf{n}$ （图15·32）。

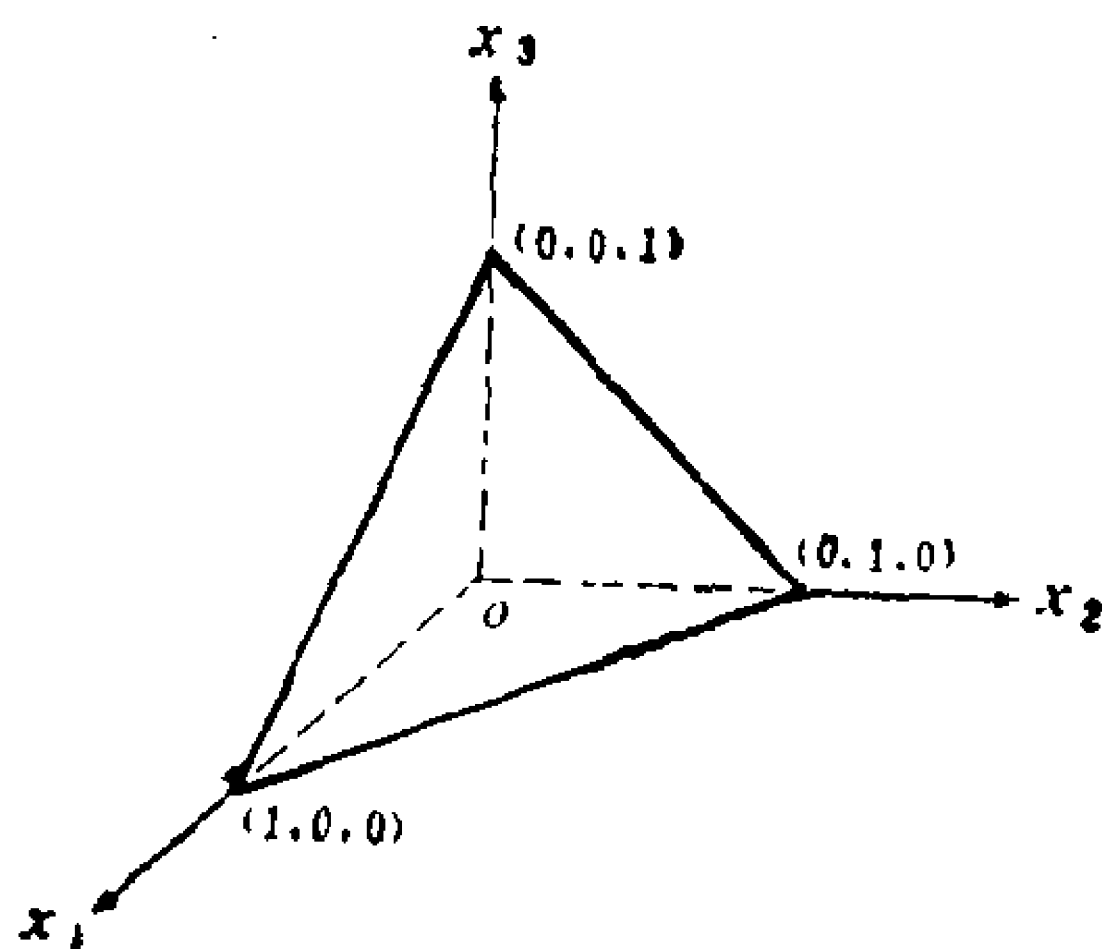


图 15·32

解  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ ，诸 $S_i$ 是三角形面。取  $D = \{(s, t) : 0 < s < 1-t, 0 \leq t \leq 1\}$ 。

$S_1$ 是联结  $(0, 0, 0)$ ， $(1, 0, 0)$ ， $(0, 1, 0)$  的三角形区域，其参数表示为

$$\mathbf{r}(s, t) = s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3, \quad (s, t) \in D.$$

因此求得 $\mathbf{r}_s = \mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{r}_t = \mathbf{e}_2$ ， $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t = \mathbf{e}_3$ 。于 $S_1$ 上 $\mathbf{n} = \mathbf{e}_3$ 。

$S_2$ 是联结  $(1, 0, 0)$ ， $(0, 1, 0)$ ， $(0, 0, 1)$  的三角形面，其参数表示为

$$\mathbf{r}(s, t) = s\mathbf{e}_1 + t\mathbf{e}_2 + (1-s-t)\mathbf{e}_3, \quad (s, t) \in D.$$

因此求得 $\mathbf{r}_s = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{r}_t = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ， $\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 。

于是  $\mathbf{n} = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^{-1} \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$ 。

曲面元素 $S_3$ ， $S_4$ 与 $S_1$ 的情况类似。

$$S_3: \mathbf{r}(s, t) = t\mathbf{e}_1 + s\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, (s, t) \in D.$$

$$S_4: \mathbf{r}(s, t) = s\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1, (s, t) \in D.$$

## 习 题

习题1—6中, 分段光滑 (或光滑) 的曲面 $S$ 是给定的. 划分 $S$ 为光滑曲面元素, 并对每一元素求一参数表示, 然后用参数表示给出单位法矢函数 $\mathbf{n}$ . 画出 $\partial S$ 的定向.

1.  $S$ 是棱长为1的正方体表面.

2.  $S$ 是以  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  为顶点的棱锥.

3.  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0 \}$ .

4.  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, -1 \leq x_3 \leq 1 \}$

5.  $S = S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 = 12,$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \},$$

$$S_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 12,$$

$$-\frac{1}{2} \leq x_2 \leq 0 \}.$$

6.  $S = \{ (x_1, x_2, x_3) : |x_3| = x_1^2 + x_2^2, -1 \leq x_3 \leq 1 \}$ .

\*7. 设 $M$ 是莫比乌斯带:  $x_1 = (1 + t \sin \frac{1}{2}s) \cos s,$

$$x_2 = (1 + t \sin \frac{1}{2}s) \sin s, \quad x_3 = t \cos \frac{1}{2}s,$$



$$(s, t) \in R = \left\{ (s, t) : 0 \leq s \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

把 $R$ 划分成 $n$ 个等大的矩形带, 并证明与这每一小矩形带 $M$ 相对应的部分是一光滑曲面元素. 以 $\Gamma_i$ 表示第 $i$ 个与第 $j$ 个曲面元素的公共边界. 按 $M$ 的这一分解证明 $M$ 是非定向的.

## § 15.8 斯托克斯定理

格林定理建立了两变量函数沿 $\partial D$ 的积分与这函数的导数在 $D$ 内积分之间的关系. 斯托克斯定理是格林定理由平面区域到曲面的推广. 设 $S$ 是 $R_3$ 内一光滑定向曲面元素其边界为 $\partial S$ , 而 $\mathbf{v}$ 是定义在 $S \cup \partial S$ 上的矢函数. 斯托克斯定理建立 $\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 在曲面 $S$ 上的积分与 $\mathbf{v}$ 在 $S$ 的边界上积分之间的等式.

设 $S$ 的参数表示为

$$\mathbf{r}(s, t) = X_1(s, t)\mathbf{e}_1 + X_2(s, t)\mathbf{e}_2 + X_3(s, t)\mathbf{e}_3.$$

$$(s, t) \in D,$$

这里 $D$ 是 $(s, t)$ 平面内的有界区域, 那么其正的单位法矢函数是

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(s, t) = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^{-1} & \left[ J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)\mathbf{e}_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)\mathbf{e}_2 \right. \\ & \left. + J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)\mathbf{e}_3 \right]. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{v}$ 是一连续矢场, 它定义在 $S$ 上, 在坐标系下

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) &= v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 \\ &+ v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

由 $S$ 是光滑曲面, 数量积 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 在 $S$ 上连续, 直接计算之, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|^{-1} \left[ v_1 J \left( \frac{x_2, x_3}{s, t} \right) + v_2 J \left( \frac{x_3, x_1}{s, t} \right) \right. \\ &\quad \left. + v_3 J \left( \frac{x_1, x_2}{s, t} \right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{定义 } \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (15.62)$$

称为矢量场 $\mathbf{v}$ 在曲面元素 $S$ 上的曲面积分。 $dS$ 按

$$dS = |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| dA_{st}$$

计算,  $dA_{st}$ 是平面区域 $D$ 的面积元素。(15.62)之积分

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_D \left[ v_1 J \left( \frac{x_2, x_3}{s, t} \right) + v_2 J \left( \frac{x_3, x_1}{s, t} \right) \right. \\ &\quad \left. + v_3 J \left( \frac{x_1, x_2}{s, t} \right) \right] dA_{st} \quad (15.63) \end{aligned}$$

注 积分(15.62)应当与 $S$ 的参数表示无关, 其定义才是合理的, 设 $\mathbf{r}_1(s', t'), (s', t') \in D$ , 是 $S$ 的另一参数表示, 根据定理15.21存在一光滑的 $1-1$ 的变换

$$s=U(s', t'), \quad t=V(s', t')$$

使

$$\mathbf{r}[U(s', t'), V(s', t')] = \mathbf{r}_1(s', t')$$

按雅可比乘法法则，及积分变量替换公式，并注意到：当且仅当  $J\left(-\frac{s,t}{s',t'}\right)$

$> 0$  时， $r_1(s', t')$  与  $r(s, t)$  给出  $S$  的同样定向。因此于(15.63)中以  $(s', t')$

代替  $(s, t)$  在  $D_1$  上取积分便得出用参数  $(s', t')$  表示的  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ ，即

$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$  的值与  $S$  之参数表示的选取无关。

如果  $S$  是分段光滑的， $S$  能表示为有限个光滑曲面元素  $S_1, S_2 \cdots S_m$  的并。那么定义

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^m \iint_{S_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i dS_i$$

若  $\partial S$  是由有限条光滑正定向的弧  $C_1, C_2, \cdots C_n$  所组成的，而  $\mathbf{v}$  是定义在  $R_3$  内含有  $\partial S$  的一区域上的连续矢量场，定义

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

为了建立斯托克斯定理，需要以下两个引理。

**引理15.6** 设  $S$  是  $R_3$  内定向光滑曲面元素， $S$  的参数表示

$\mathbf{r}(s, t) = x_1(s, t)\mathbf{e}_1 + x_2(s, t)\mathbf{e}_2 + x_3(s, t)\mathbf{e}_3(s, t) \in D \cup \partial D$ ，其定向与  $S$  定向相符合。设  $\mathbf{v}$  是定义在含有  $S \cup \partial S$  的开集  $G$  上的连续矢量场，对  $(x_1, x_2, x_3) \in G$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = & v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 \\ & + v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = & \int_{\partial D} \left[ \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial S} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial S} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial S} \right) dS \right. \\ & \left. + \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) dt \right] \end{aligned} \quad (15.64)$$

**证明** 仅对 $\partial D$ 是一条分段光滑闭曲线的情况证明引理， $\partial D$ 是几条这样曲线的一般情况容易由此导出。设 $\partial D$ 的参数表示为

$$s = s(\tau), \quad t = t(\tau), \quad a \leq \tau \leq b.$$

那么方程

$$\begin{aligned} x_1 = & x_1[s(\tau), t(\tau)], \quad x_2 = x_2[s(\tau), t(\tau)], \\ x_3 = & x_3[s(\tau), t(\tau)], \quad a \leq \tau \leq b. \end{aligned}$$

是 $\partial S$ 的一参数式。运用微分的链法则求得

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = & (dx_1)\mathbf{e}_1 + (dx_2)\mathbf{e}_2 + (dx_3)\mathbf{e}_3 \\ = & \left[ \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \mathbf{e}_1 + \\ & \left[ \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \mathbf{e}_2 + \\ & \left[ \frac{\partial x_3}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_3}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \left[ \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial s} \right) \frac{ds}{d\tau} \right. \\ &\quad \left. + \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \\ &= \int_{\partial D} \left[ \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial s} \right) ds + \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

引理要求之 (15.64) 成立.

**引理15.7** 设  $D \cup \partial D$  是  $(s, t)$  平面内的有界区域,  $f$  是在含有  $D \cup \partial D$  的开集  $G$  上的光滑函数, 那么存在一函数序列  $\{f_n\}$ , 使  $f_n, \frac{\partial f_n}{\partial s}, \frac{\partial f_n}{\partial t}, n=1, 2, \dots$ , 都是开集

$G \supset D \cup \partial D$  上的光滑函数, 并且当  $n \rightarrow \infty$  时在  $D \cup \partial D$  上  $f_n \rightarrow f$ ,

$\frac{\partial f_n}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f_n}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial t}$  收敛是一致的.

引理16.7是第十三章中的定理13.11推论2的直接推论.

设  $\mathbf{v}$  是定义在  $R_3$  内的区域  $G$  上的光滑矢量场其坐标表示为

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3. \quad (15.65)$$

我们知道  $\text{curl } \mathbf{v}$  是  $G$  上的矢量场:

$$\begin{aligned} \text{curl } \mathbf{v} = & \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 \\ & + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (15.66)$$

**定理15.22 (斯托克斯定理)** 设  $S$  是一有界的、闭的、定向的分段光滑的曲面, 而  $\mathbf{v}$  是在含有  $S \cup \partial S$  的  $R_3$  内的区域上的光滑矢量场. 那么

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (15.67)$$

**证明** 首先假定  $S$  是光滑定向曲面元素, 而  $\mathbf{r}$  的分量具有连续的二阶导数. 由引理15.6的 (15.64) 式导出

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = & \int_{\partial D} \left[ \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial s} \right) ds \right. \\ & \left. + \left( v_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} \right) dt \right]. \end{aligned}$$

对上式右端积分应用格林定理, 并由链法则

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = & \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[ v_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial t} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial t} \left[ v_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} + v_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} + v_3 \frac{\partial x_3}{\partial s} \right] \right\} dA_{12} \end{aligned}$$

上式右端被积函数为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s} \right) \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial s} \right] \\
 &- \left[ \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \right) \frac{\partial x_i}{\partial s} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t} \right] \\
 &= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial s} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) J \left( \frac{x_2 x_3}{s, t} \right) + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) J \left( \frac{x_3 x_1}{s, t} \right) \\
 &+ \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) J \left( \frac{x_1 x_2}{s, t} \right) \\
 &= [(\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t|.
 \end{aligned}$$

于是据曲面积分定义的 (15.53) 式, 有

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D [(\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}] |\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_t| dA_{st} \\
 &= \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS.
 \end{aligned}$$

如果 $\mathbf{r}$ 的分量 $x_1(s, t)$ ,  $x_2(s, t)$ ,  $x_3(s, t)$ , 不具有连续的二阶导数, 它们仅在含有 $D \cup \partial D$ 的开集 $G$ 上连续可微. 那么根据引理15.7, 存在 $\{x_{1n}\}$ ,  $\{x_{2n}\}$ ,  $\{x_{3n}\}$ , 它们

连同其各偏导数 $\frac{\partial x_{1n}}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial x_{2n}}{\partial s}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial x_{3n}}{\partial t}$ 都在 $G$ 上是

光滑的, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 $D \cup \partial D$ 上分别一致收敛于 $x_1$ ,  $x_2$ ,

$x_3$ 及其相应的各偏导数 $\frac{\partial x_1}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial x_2}{\partial s}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial x_3}{\partial t}$ . 根据上面的

的证明, (15.67) 式对 $\forall n$ 成立, 而收敛又是一致的, 所以 (15.67) 对其极限函数保持成立.

最后, 若 $S$ 是一分段光滑的定向曲面, 它是分段光滑定向曲面元素 $S_i$ 的并 $S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ ,  $\Gamma_{ij}$ 作为 $S_i$ 与 $S_j$ 的共同边界弧由 $S_i$ 及 $S_j$ 定向所决定之 $\Gamma_{ij}$ 的定向相反. 这样 $\partial S$

$$= \sum_{i=1}^k \partial S_i, \text{ 于是}$$

$$\iint_S (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \sum_{i=1}^k \int_{\partial S_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

**推论** 设 $S$ 是一有界、闭的、定向的分段光滑没有边界的曲面, 而 $\mathbf{v}$ 是定义在包含 $S$ 的某开集上的光滑矢量场. 那么

$$\iiint_S (\text{curl } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (15.68)$$



下面的例题说明怎样把在 $R_3$ 内一曲面上的积分化为平面区域上的二重积分。

**例1** 设 $R_3$ 内的区域 $R = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq x_1 + 2 \}$ 。  $S$ 是 $R$ 的边界。而 $v(x_1, x_2, x_3) = 2x_1\mathbf{e}_1 - 3x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ ，求积分值

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (15.69)$$

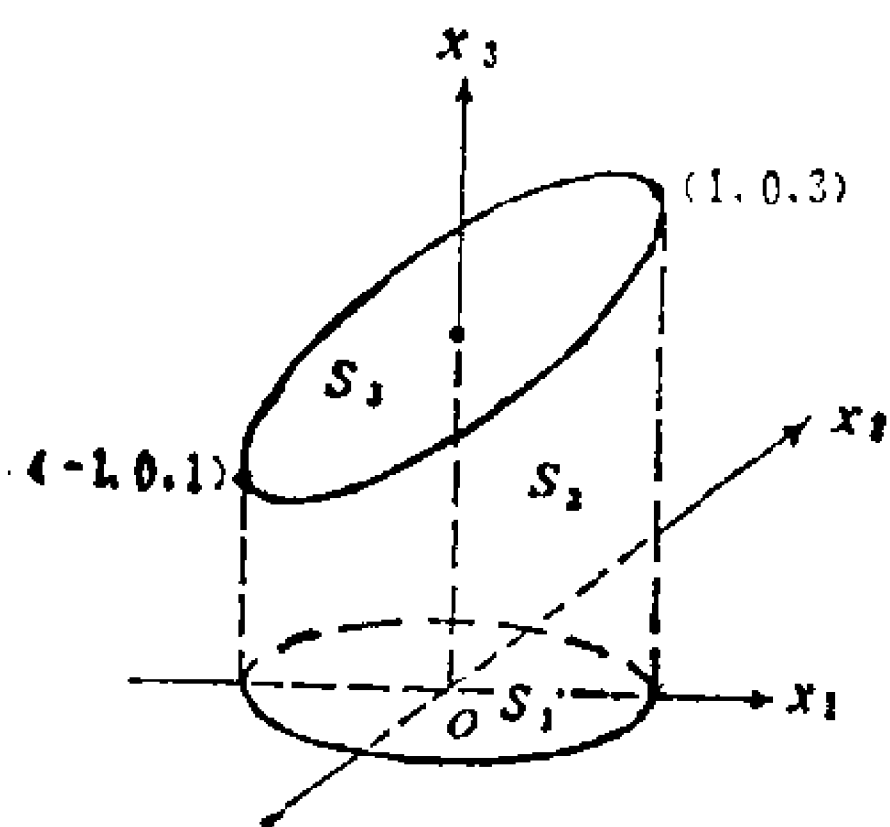


图 15.33

这里 $\mathbf{n}$ 是单位法矢，其方向是由 $S$ 向外（图15.33）。

**解**  $S$ 是一分段光滑曲面，如图15.33所示，把 $S$ 分为三个光滑曲面元素。 $S_1$ 的法矢是 $-\mathbf{e}_3$ ，在 $S_1$ 上 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = -x_3$ 。而在 $S_1$ 上

$x_3 = 0$ ，那么 $\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ 。因

为 $S_3 : x_3 = x_1 + 2$ ，在 $S_3$ 上

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-2x_1 + x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x_1 + 2);$$

$$dS = \sqrt{2} dA_{st};$$

这里 $dA_{st}$ 是 $(s, t)$ 平面上圆盘 $D = \{ (s, t) : s^2 + t^2 < 1 \}$ 的

面积元素,  $S_3$  的参数表示为:  $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = s + 2$ ,  $(s, t) \in D$ , 有

$$\iint_{S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_D (-s + 2) dA_{s,t} = 2\pi.$$

为了计算在  $S_2$  上的积分, 选取柱面坐标系:

$$x_1 = \cos s, x_2 = \sin s, x_3 = t, (s, t) \in D_1,$$

$D_1 = \{(s, t) : -\pi \leq s \leq \pi, 0 \leq t \leq 2 + \cos s\}$ . 在  $S_2$  的外法矢  $\mathbf{n} = (\cos s)\mathbf{e}_1 + (\sin s)\mathbf{e}_2$ , 从而  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2\cos^2 s - 3\sin^2 s$ , 因此

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_{D_1} (2\cos^2 s - 3\sin^2 s) dA_{s,t} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2+\cos s} (2 - 5\sin^2 s) dt ds = -2\pi. \end{aligned}$$

最后

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0 + 2\pi - 2\pi = 0.$$

**例2** 验证斯托克斯定理. 设  $\mathbf{v} = x_2\mathbf{e}_1 + x_3\mathbf{e}_2 + x_1\mathbf{e}_3$ ,  $S_2$  是例1中  $S$  的侧面  $S_2$ ,  $\mathbf{n}$  指向外.

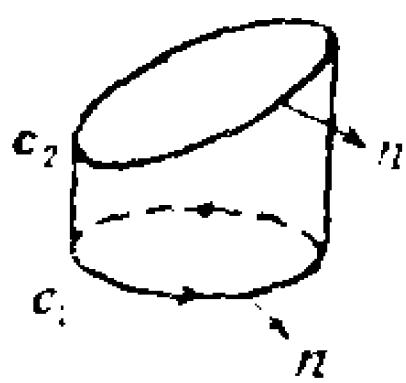


图 15.34

**解**  $S_2$  的边界  $\partial S_2$  由圆周  $C_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}$  及椭圆周  $C_2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_1 + 2\}$  组成.  $C_1, C_2$  如图15.34所示的定向. 对  $S_2$  取柱面坐标:

$$S_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \cos s, x_2 = \sin s, x_3 = t, \\ (s, t) \in D_1 \}$$

$$D_1 = \{ (s, t) : -\pi \leq s \leq \pi, 0 \leq t \leq 2 + \cos s \}.$$

把  $S_2$  分解为两个光滑曲面元素:

对应于  $x_2 \geq 0$  及  $x_2 \leq 0$  的  $S_2$  的部分. 那么相应地  $D_1$  被分为如图 15·35 所示的  $s \geq 0$  及  $s \leq 0$  的  $E_1$ ,  $E_2$  两部分. 之所以必须作这样的划分, 是由于  $D_1 \rightarrow S_2$  不是 1—

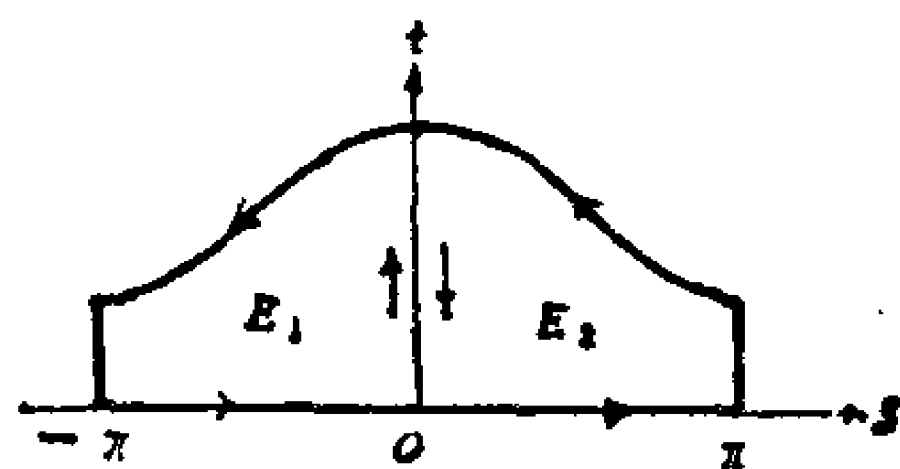


图 15·35

1 的,  $s = \pi$ ,  $s = -\pi$  对应着  $S_2$  上同一曲线. 算出

$$J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right) = \cos s, \quad J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right) = \sin s$$

$$J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right) = 0,$$

$$\mathbf{n} = (\cos s)\mathbf{e}_1 + (\sin s)\mathbf{e}_2,$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad dS = dA_{st}.$$

于是

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2+\cos s} (-\cos s - \sin s) dt ds = -\pi. \quad (15 \cdot 70)$$

沿边界  $\partial S$  的积分

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

仍用柱面坐标, 在 $C_1$ 上

$$\mathbf{v} = (\sin s)\mathbf{e}_1 + (\cos s)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{r} = [(-\sin s)\mathbf{e}_1 + (\cos s)\mathbf{e}_2]ds,$$

在 $C_2$ 上

$$\mathbf{v} = (\sin s)\mathbf{e}_1 + (2 + \cos s)\mathbf{e}_2 + (\cos s)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{r} = [-\sin s)\mathbf{e}_1 + (\cos s)\mathbf{e}_2 + (-\sin s)\mathbf{e}_3]ds.$$

作数量积 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ 并积分

$$\int_{C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 s)ds = -\pi. \quad (15 \cdot 71)$$

$$\int_{-C_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 \theta + 2\cos \theta + \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta)d\theta = 0. \quad (15 \cdot 72)$$

综合 (15·70), (15·71), (15·72),  $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$

成立.

## 习 题

习题1—6计算 $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ ,  $S$ 按指出的定向.

1.  $\mathbf{v} = (x_1 + 1)\mathbf{e}_1 - (2x_2 + 1)\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ ;  $S$ 是以  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  为顶点的三角形面 $\mathbf{n}$ 指向为背离原点.
2.  $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ ;  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = 2x_3, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1\}$ ,  $\mathbf{n}$ 按 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 > 0$ 定向.

$$3. \quad v = x_1^2 e_1 + x_2^2 e_2 + x_3^2 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2; 1 \leq x_3 \leq 2 \},$$

$$n \cdot e_3 > 0.$$

$$4. \quad v = x_1 x_2 e_1 + x_1 x_3 e_2 + x_2 x_3 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_2^2 = 2 - x_1; x_3^3 \leq x_2 \leq x_3^{\frac{1}{2}} \},$$

$$n \cdot e_1 > 0.$$

$$5. \quad v = x_2^2 e_1 + x_3 e_2 - x_1 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_2^2 = 1 - x_1, 0 \leq x_3 \leq x_1, x_1 \geq 0 \},$$

$$n \cdot e_1 > 0.$$

$$6. \quad v = 2x_1 e_1 - x_2 e_2 + 3x_3 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_3^2 = x_1; x_2^2 \leq 1 - x_1; x_2 \geq 0 \},$$

$$n \cdot e_1 > 0.$$

习题7—12, 验证斯托克斯定理.

$$7. \quad v = x_3 e_1 + x_1 e_2 + x_2 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2, x_3 \geq 0 \},$$

$$n \cdot e_3 > 0.$$

$$8. \quad v = x_2^2 e_1 + x_1 x_2 e_2 - 2x_1 x_3 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq 0 \},$$

$$n \cdot e_3 > 0.$$

$$9. \quad v = -x_2 x_3 e_3; \quad S = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4, x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \}, \quad n \text{ 指向球外侧.}$$

$$10. \quad v = -x_3 e_2 + x_2 e_3; \quad S \text{ 是柱面坐标系下的柱面, } r = \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 以平面 } x_3 = 0 \text{ 为下界面, 以锥面 } x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

$$\text{为上界面, 对 } \theta > 0, n \cdot e_3 > 0.$$

11.  $\mathbf{v} = x_2 \mathbf{e}_1 + x_3 \mathbf{e}_2 + x_1 \mathbf{e}_3$ ;  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3^2 = 4 - x_1, x_1 \geq x_2^2\}$ ,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 > 0.$$

12.  $\mathbf{v} = x_3 \mathbf{e}_1 - x_1 \mathbf{e}_3$ ;  $S$  以柱面坐标给出的柱面  $r = 2 + \cos \theta$  在平面  $x_3 = 0$  以上及锥  $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$  外部的曲面;  $\mathbf{n}$  从柱面指向外侧.

习题13—15, 运用斯托克斯定理计算  $\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ ,  $\partial S$  按  $S$  定向.

13.  $\mathbf{v} = r^{-3} \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $S$  是例2中的  $S_2$ .
14.  $\mathbf{v} = (e^{x_1} \sin x_2) \mathbf{e}_1 + (e^{x_1} \cos x_2 - x_3) \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3$ ;  $S$  是习题3中的曲面.
15.  $\mathbf{v} = (x_1^2 + x_3) \mathbf{e}_1 + (x_1 + x_2^2) \mathbf{e}_2 + (x_2 + x_3^2) \mathbf{e}_3$ ,  $S = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_3 \geq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}\}$ ,  $\mathbf{n}$  指向球面的外侧.
16. 设  $S$  由  $x_3 = f(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in D = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  给出,  $f$  是光滑的, 而  $\mathbf{v} = (1 - x_1^2 - x_2^2) \mathbf{W}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{W}$  是定义在含有  $S$  的开集  $G$  上光滑矢量场. 证明

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

17. 设  $\mathbf{v} = r^{-3} (x_2 \mathbf{e}_1 + x_3 \mathbf{e}_2 + x_1 \mathbf{e}_3)$ ,  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $S$  是球面  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ,  $\mathbf{n}$  指向球面外侧.

证明  $\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds = 0.$

18. 设光滑曲面 $S$ 有两不同参数表示:

$r(s, t), (s, t) \in D, r_1(s', t'), (s', t') \in D_1$ .  $S$ 上定义一光滑矢量场. 求 $(\operatorname{curl} v) \cdot n$ 对于两参数表示之间的关系.

\*19.  $M$ 为莫比乌斯带. 对这一曲面斯托克斯定理的证明何处将受到破坏?

## § 15.9 发散量定理

本节建立格林定理的另一推广——发散量定理. 这一定理确定 $\mathbf{R}_3$ 内的三维区域上函数导数的积分与在边界上积分间的关系.

设 $v = v_1(x_1, x_2, x_3)e_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)e_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)e_3$ 是定义在 $\mathbf{R}_3$ 内区域 $E$ 上的矢量场. 已经知道 $\operatorname{div} v$ 确定一数量场, 在坐标系下

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

发散量定理是证明公式

$$\iiint_E \operatorname{div} v dv = \iint_{\partial E} v \cdot n ds, \quad (15.73)$$

这里 $\partial E$ 按选取 $n$ 为由 $\partial E$ 指向 $E$ 外的定向. 先建立(15.73)的特殊情况, 然后证明一般情况下公式成立.

**引理15.8** 设 $D$ 是 $(x_1, x_2)$ 平面上具有光滑边界的区域,  $f: D \cup \partial D \rightarrow \mathbf{R}_1$ 是分段光滑函数. 定义

$$E = \{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in D, c < x_3 < f(x_1, x_2) \},$$

$c$  为常数.

假定

$$\mathbf{v} = u(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_3,$$

且  $\frac{\partial u}{\partial x_3}$  在  $\mathbf{R}_3$  内包含  $E \cup \partial E$  的某开集上都是连续的. 那么

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

$\mathbf{n}$  是由  $\partial E$  指向  $E$  外的  $\partial E$  的单位法矢.

**证明** 由  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x_3}$ , 因而

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV &= \iiint_E \frac{\partial u}{\partial x_3} dV \\ &= \iint_D \left( \int_c^{f(x_1, x_2)} \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 \right) dA_{x_1, x_2} \\ &= \iint_D \{ u[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] - u(x_1, x_2, c) \} dA_{x_1, x_2} \end{aligned} \quad (15 \cdot 74)$$

表示  $\partial E = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ , 其中  $S_1$  是在  $x_3 = c$  平面上与  $D$  全等的区域;  $S_2$  是  $\partial E$  的柱侧面; 而  $S_3$  是相应于  $x_3 = f(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2) \in D$  的曲面 (图 15·36). 下面证明 (15·74) 之左端等于

$$\iiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

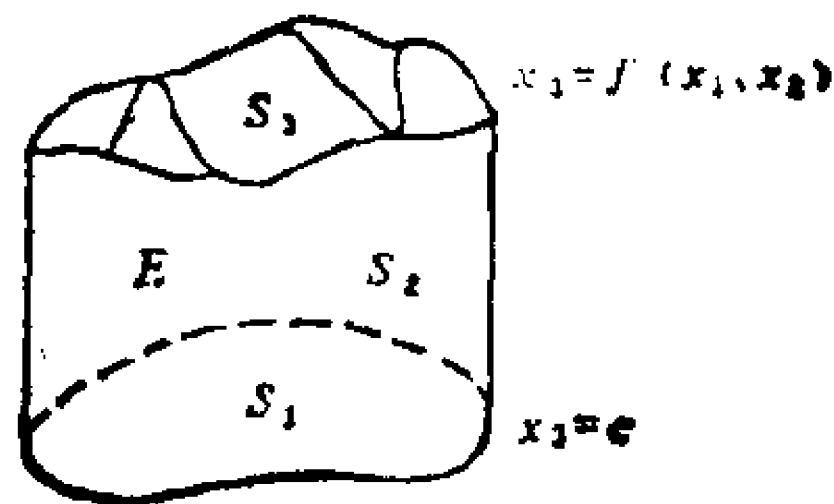


图 15·36



沿 $S_2$ ,  $\mathbf{n}$ 与 $(x_1, x_2)$ 平面相平行, 那么 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ 。在 $S_2$ 上有 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ 因而

$$\iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0. \quad (15 \cdot 75)$$

沿 $S_1$ 的外法矢显然是 $-\mathbf{e}_3$ , 所以

$$\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = - \iint_D u(x_1, x_2, c) dA_{x_1, x_2} \quad (15 \cdot 76)$$

对于 $S_3$ , 单位法矢函数为

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

因此

$$\iint_{S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D u[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dA_{x_1, x_2}. \quad (15 \cdot 77)$$

把(15·74)与(15·75), (15·76), (15·77)相对照, 便得

$$\begin{aligned} & \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV \\ &= \iint_D \{ u[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] - u(x_1, x_2, c) \} dA_{x_1, x_2} \\ &= \iint_{S_3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds + \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

$$= \iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

**引理15.9** 设  $\mathbf{v} = u_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2$ ,  $D, f, E$  的条件与引理15.8所设相同.  $u_1, u_2$  是包含  $E \cup \partial E$  的某开集上的光滑函数. 那么

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$$

这里  $\mathbf{n}$  是由  $\partial E$  指向  $E$  外的  $\partial E$  单位法矢.

**证明** 定义  $U_1(x_1, x_2, x_3), U_2(x_1, x_2, x_3)$ :

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = - \int_C^{x_1} u_1(x_1, x_2, t) dt,$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = \int_C^{x_1} u_2(x_1, x_2, t) dt.$$

此外, 定义

$$\mathbf{w} = U_2 \mathbf{e}_1 + U_1 \mathbf{e}_2, \quad U_3 = - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2},$$

$$\mathbf{u} = -U_3 \mathbf{e}_3.$$

显然  $\mathbf{w}$  是光滑矢场而  $U_3, \frac{\partial U_3}{\partial x_3}$  都是连续的. 因此

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mathbf{w} &= - \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \mathbf{e}_2 + \left( \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \\ &= u_1(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_1 + u_2(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_2 - U_3 \mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}, \end{aligned}$$

而

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (15.78)$$

因为 $\partial E$ 是分段光滑且没有边界的曲面，由斯托克斯定理的推论可知

$$\iint_{\partial E} (\operatorname{curl} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\partial E} (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

对 $\mathbf{u} = -U_3 \mathbf{e}_3$ 用引理15.8，有

$$\iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = -\iint_{\partial E} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = -\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{u} dV. \quad (15.79)$$

把(15.78)代入(15.79)，便得引理的结果。

下面对于相当广泛的一类区域，建立发散量定理。

**定义**  $R_3$ 内区域 $E$ 称为正规的 $\iff$  (i)  $\partial E$ 由有限个分段光滑的曲面组成，每个曲面没有边界；(ii) 在 $\partial E$ 的每个点 $p$ ，可引进以 $p$ 点为原点的笛卡尔坐标系，在这坐标系中有一柱形域 $\Gamma$ ， $\Gamma = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in D, -\infty < x_3 < +\infty\}$ ， $D$ 是 $x_3 = 0$ 的平面上含有原点的区域， $\Gamma$ 具有性质： $\Gamma \cap \partial E$ 可以表示成 $x_3 = f(x_1, x_2)$ ， $(x_1, x_2) \in D \cup \partial D$ 的曲面，且 $f$ 是分段光滑的(图15.37)；

(iii) 集 $\Gamma_1 = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in D, -C < x_3 < f(x_1, x_2)\}$ 对某一正数 $C$ （依赖于点 $p$ ），整个地包含在 $E$ 之内。

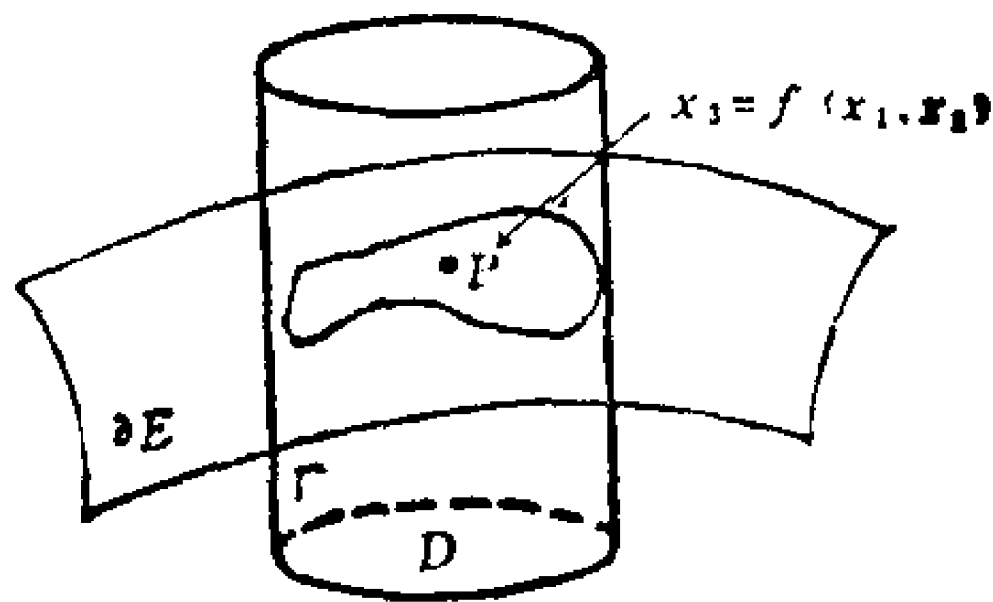


图 15.37

注 如果 $E$ 是正规区域,那么 $\partial E$ 上除去面积为零的有限多条弧上的点之外, $\partial E$ 的其他任一点 $p$ 是 $\partial E$ 的光滑曲面元素的内点.过这样的 $p$ 点作曲面的法线, $p$ 点在该法线上的邻域被 $p$ 点分为两个以 $p$ 点为共同端点的线段,两线段之一落在 $E$ 内,另一线段则在 $E$ 外.此外,当 $p$ 在 $\partial E$ 的光滑曲面元素内变动时, $n(p)$ 连续地变化.

**定理15·23(发散量定理)** 设 $E$ 是 $R_3$ 内的一闭的有界正规区域,而 $v$ 是在含有 $E \cup \partial E$ 的某开集 $G$ 上的连续可微的矢量场.那么

$$\iiint_E \operatorname{div} v dV = \iint_{\partial E} v \cdot n dS \quad (15 \cdot 80)$$

这里 $n$ 是由 $\partial E$ 指向 $E$ 外的单位法矢函数.

**证明** 按正规区域的定义,对每一点 $p \in \partial E$ 有相伴的坐标系及一柱形区域 $\Gamma$ .以 $\Gamma_i$ 表示 $\Gamma$ 的界于 $-c < x_3 < c$ 的部分(这里 $c$ 是正规区域定义中的依赖于 $p$ 的常数 $c$ ).对于 $E$ 的内点 $p$ ,引进以 $p$ 点为原点的坐标系及其棱平行于坐标轴的立方体 $\Gamma_i$ ,且 $\overline{\Gamma_i} \subset E$ .显然族 $\{\Gamma_i\}$ 是 $E \cup \partial E$ 的开覆盖,因为 $E \cup \partial E$ 是紧集,存在有限个 $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \dots, \Gamma_{i_n}$ 覆盖了 $E \cup \partial E$ .如同格林定理证明中所述的那样,据§13·3,  $\exists G$ 上的 $C^\infty$ 类的单位分解 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ,每一 $\varphi_i$ 在 $G - F_i$ 上为零,这里 $F_i$ 是 $\Gamma_{i_i}$ 内的一紧子集(参看§15·4.习题14).定义

$$v_i = \varphi_i v, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

每个 $v_i$ 是在 $G$ 上连续可微的矢量场.在 $G - F_i$ 上等于零,而

$v = \sum_{i=1}^n v_i$ , 因此只要对每一 $v_i$ 建立结果就够了.首先假定

$p_i$  是  $E$  的内点, 则  $\Gamma_{p_i}$  满足  $p_i \in \Gamma_{p_i} \subset \overline{\Gamma_{p_i}} \subset E$ , 而  $v_i$  在  $\partial \Gamma_{p_i}$  上成为零. 因此由引理 15.9

$$\iiint_E \operatorname{div} v_i dV = \iiint_{\Gamma_{p_i}} \operatorname{div} v_i dV = \iint_{\partial \Gamma_{p_i}} v_i \cdot n ds = 0.$$

而由于在  $\partial E$  上  $v_i = 0$ , 有

$$\iint_{\partial E} v_i \cdot n ds = 0, \text{ 即 } \iiint_E \operatorname{div} v_i dV = \iint_{\partial E} v_i \cdot n ds = 0.$$

于是对于这样的  $v_i$  (相应于  $E$  的内点  $p_i \in \Gamma_{p_i}$  的) 定理结论成立. 现在假定  $p_i \in \partial E$ . 定义  $E_i = \Gamma_{p_i} \cap E$ , 那么在下述三集上都有  $v_i = 0$ : (i)  $E - E_i$ ; (ii)  $\partial E - r_i$ , 这里  $r_i = \partial E \cap \Gamma_{p_i}$ ; (iii)  $\partial E_i - r_i$ . 由  $E_i$  是引理 15.8 那样的区域,  $v_i$  可看作引理 15.8、15.9 中那样的矢之和, 据引理 15.8 及引理 15.9, 有

$$\begin{aligned} \iiint_E \operatorname{div} v_i dV &= \iiint_{E_i} \operatorname{div} v_i dV = \iint_{\partial E_i} v_i \cdot n ds \\ &= \iint_{r_i} v_i \cdot n ds = \iint_{\partial E} v_i \cdot n ds. \end{aligned}$$

综合起来, 定理对所有  $v_i$  都成立, 于是

$$\iiint_E \operatorname{div} v dV = \iiint_E \left( \sum_{i=1}^n \operatorname{div} \cdot v_i \right) dV = \iint_{\partial E} \left( \sum_{i=1}^n v_i \cdot n \right) ds$$

$$= \iint_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

定理获证。

**例1** 设区域  $E = \{ (x_1, x_2, x_3) : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 9 \}$ ,  $\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$ , 而  $\mathbf{v} = r^{-3} \mathbf{r}$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ . 验证发散量定理:

**解** 设  $S_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \}$ ,

$$S_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \}$$

$S_1, S_2$  的  $\mathbf{n}$  都取由曲面背向原点的方向. 那么

$$\iint_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds.$$

容易算出  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , 因而  $\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV = 0$ . 在  $S_1$  及  $S_2$  上  $\mathbf{n} =$

$r^{-1} \mathbf{r}$ . 于是

$$\iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{9} A(S_2) - A(S_1) = 0.$$

**例2** 设  $E = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < x_1 + x_2 \}$ , 而  $\mathbf{v} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} (x_2^2 + x_3 x_1^2) \mathbf{e}_2 + \frac{1}{2} (x_3^2 + x_1^2 x_2) \mathbf{e}_3$ . 使用发散量定理计算  $\iint_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ .

**解** 算得  $\operatorname{div} \mathbf{v} = x_1 + x_2 + x_3$ . 以  $F$  表示单位圆盘区域.

据发散量定理

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \\
 &= \iiint_E (x_1 + x_2 + x_3) dV \\
 &= \iint_F \left[ (x_1 + x_2)x_3 + \frac{1}{2}x_3^2 \right]_0^{x_1+2} dA_{x_1, x_2} \\
 &= \frac{1}{2} \iint_F [2x_2(x_1 + 2) + 2x_1^2 + 4x_1 + (x_1^2 + 4x_1 + 4)] dA_{x_1, x_2} \\
 &= \frac{1}{2} \iint_F (3x_1^2 + 4) dA_{x_1, x_2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2-\pi} (3r^2 \cos^2 \theta + 4) r dr d\theta \\
 &= \frac{19}{8} \pi.
 \end{aligned}$$

## 习 题

习题1—8通过计算  $\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} dV$  及  $\iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$  验证发

散量定理.

1.  $\mathbf{v} = x_1 x_2 \mathbf{e}_1 + x_2 x_3 \mathbf{e}_2 + x_3 x_1 \mathbf{e}_3$ ;  $E$  为以  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  为顶点的四面体.
2.  $\mathbf{v} = x_1^2 \mathbf{e}_1 - x_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3^2 \mathbf{e}_3$ ;  $E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 4, 0 < x_3 < 2\}$ .

$$3. \quad \mathbf{v} = 2x_1 \mathbf{e}_1 + 3x_2 \mathbf{e}_2 + 4x_3 \mathbf{e}_3; \quad E = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \}.$$

$$4. \quad \mathbf{v} = x_1^2 \mathbf{e}_1 + x_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3^2 \mathbf{e}_3; \quad E = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_2^2 < 2 - x_1, \quad 0 < x_3 < x_1 \}.$$

$$5. \quad \mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3; \quad E = E_1 \cap E_2, \quad E_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 > 1 \}, \quad E_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \}.$$

$$6. \quad \mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 - 2x_2 \mathbf{e}_2 + 3x_3 \mathbf{e}_3; \quad E = E_1 \cap E_2, \quad E_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_2^2 < x_1 \}, \quad E_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_3^2 < 4 - x_1 \}.$$

$$7. \quad \mathbf{v} = r^{-3}(x_3 \mathbf{e}_1 + x_1 \mathbf{e}_2 + x_2 \mathbf{e}_3), \quad r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}, \\ E = \{ (x_1, x_2, x_3) : 1 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \}.$$

$$8. \quad \mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3; \quad E = E_1 \cap E_2, \quad E_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 4 \}, \quad E_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 1 \}.$$

用发散量定理计算习题9—11中的  $\iiint_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds$ .

$$9. \quad \mathbf{v} = x_2 e^{x_1} \mathbf{e}_1 + (x_2 - 2x_3 e^{x_1}) \mathbf{e}_2 + (x_1 e^{x_1} - x_3) \mathbf{e}_3; \\ E = \{ (x_1, x_2, x_3) : [(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} - 2]^2 + x_3^2 < 1 \}.$$



10.  $\mathbf{v} = x_1^3 \mathbf{e}_1 + x_2^3 \mathbf{e}_2 + x_3^3 \mathbf{e}_3$ ;  $E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ .

11.  $\mathbf{v} = x_1^3 \mathbf{e}_1 + x_2^2 \mathbf{e}_2 + x_3^2 \mathbf{e}_3$ ,  $E = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 < 1, 0 < x_3 < x_1 + 2\}$ .

\*12. 设  $E$  是  $\mathbf{R}_3$  内的正规区域.  $u, v$  分别是含有  $E \cup \partial E$  的开集  $G$  上的光滑的数量场、光滑矢量场.

证明

$$\iiint_E u \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \iint_{\partial E} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds - \iiint_E (\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{v} dV.$$

\*13. 设  $E$  及  $G$  同习题12所设.  $u, \operatorname{grad} u$  及  $v$  在  $G$  上光滑. 以

$\frac{\partial}{\partial n}$  表示在  $\partial E$  上沿法矢  $n$  的方向导数.  $\Delta$  表示拉普拉斯算

子:

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right).$$

证明

$$\iiint_E v \Delta u dV = \iint_{\partial E} u \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iiint_E (\operatorname{grad} u) \cdot (\operatorname{grad} v) dV.$$

如果  $u$  是  $\Delta u = 0$  在  $E$  内的解, 证明

$$\iint_{\partial E} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

## § 15·10 外微分与一般的斯托克斯定理

格林定理（定理15·20）建立了函数沿平面区域  $D$  的边界  $\partial D$  的线积分与函数的导数在  $D$  上的重积分的关系。斯托克斯定理（定理15·22）与发散量定理（定理15·23）是格林定理在  $\mathbf{R}_3$  中的推广。上述三个定理都可以看成是  $\mathbf{R}_1$  中微积分基本定理在  $\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$  中的推广。很自然，应当讨论这一在  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  与  $\mathbf{R}_3$  中的结果（函数在边界上的积分等于其导数在区域内的积分）是否对  $\mathbf{R}_N$  中的  $p$  维区域也成立的问题。

本节首先在  $\mathbf{R}_3$  中引进外积、微分形式及其外微分，把微积分基本定理及格林定理、斯托克斯定理、发散量定理概括为统一的形式，然后把这一统一形式的定理推广为  $\mathbf{R}_N$  中关于  $p$  维区域的一般的斯托克斯定理。

格林定理、斯托克斯定理和发散量定理所论及的平面、曲线、曲面、空间区域都是有定向的，为了概括出它们的统一的形式，要采用“有向长度”、“有向面积”、“有向体积”等代替无向的相应的量。“有向的长度”以矢来表示，“有向面积”、“有向体积”能用矢的外积恰当地表达出来。关于矢的外积运算及其基本性质，读者可参看本书附录3。

$\mathbf{R}_3$  中的有向线段微元  $d\mathbf{r}$  可表示成

$$d\mathbf{r} = dx_1 \mathbf{e}_1 + dx_2 \mathbf{e}_2 + dx_3 \mathbf{e}_3,$$

$d\mathbf{r}$  在正交基  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  之下的坐标为  $(dx_1, dx_2, dx_3)$ 。矢  $d\mathbf{r}^{(1)}$  与  $d\mathbf{r}^{(2)}$  所张成的平行四边形的“有向面积”可表示为

$$d\mathbf{r}^{(1)} \wedge d\mathbf{r}^{(2)} = \left( \sum_{i=1}^3 dx_i^{(1)} \mathbf{e}_i \right) \wedge \left( \sum_{i=1}^3 dx_i^{(2)} \mathbf{e}_i \right)$$

$$= \begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} \\ dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ + \begin{vmatrix} dx_3^{(1)} & dx_1^{(1)} \\ dx_3^{(2)} & dx_1^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1.$$

$dr^{(1)}, dr^{(2)}, dr^{(3)}$  三个矢所张成平行六面体的“有向体积”可表示成

$$dr^{(1)} \wedge dr^{(2)} \wedge dr^{(3)} \\ = \det(dr^{(1)}, dr^{(2)}, dr^{(3)}) \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

为了书写简明起见,省略  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , 及  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ , 简直地以  $dx_i$  来记  $dx_i \mathbf{e}_i, dx_1 \wedge dx_2$  来记  $dx_1 dx_2 \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  等.

**定义**  $dx_1 \wedge dx_2, dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1$  分别表示  $dx_1$  与  $dx_2, dx_2$  与  $dx_3, dx_3$  与  $dx_1$  张成平行四边形的“有向面积”;  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  表示  $dx_1, dx_2, dx_3$  张成平行六面体的“有向体积”, 并规定外积运算“ $\wedge$ ”服从以下运算律:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad dx_1 \wedge dx_2 &= -dx_2 \wedge dx_1 && \text{(斜对称律)} \\ \text{(ii)} \quad dx_1 \wedge (dx_2 + dx_3) &= dx_1 \wedge dx_2 \\ &\quad + dx_1 \wedge dx_3 && \text{(分配律)} \\ \text{(iii)} \quad (K dx_1) \wedge dx_2 &= K(dx_1 \wedge dx_2) && \text{(结合律)} \\ \text{(iv)} \quad (dx_1 \wedge dx_2) \wedge dx_3 &= dx_1 \\ &\quad \wedge (dx_2 \wedge dx_3) && \text{(结合律)} \end{aligned} \right\} \quad (15.81)$$

分别称  $dx_i$ ,  $dx_i \wedge dx_j$ ,  $dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) 为基本一次微分形式, 基本二次微分形式, 基本三次微分形式。

**引理15.9**  $R_3$  中的基本三次微分形式具有性质:

- (i) 连乘外积中若有两个相同因子, 则其值为零;
- (ii) 连乘外积不等于零, 则其值是  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$  或  $-(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3)$  两者之一。
- (iii) 四个以上的基本一次微分形式的连乘外积均等于零。

**证明** (i), (ii) 根据定义及外积运算律便得, 细节留给读者。(iii) 如  $(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) \wedge dx_3 = dx_1 \wedge (dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_3)$  由 (i) 即得。

设  $F, P, Q, R$  为三维空间  $R_3$  中的连续可微函数, 定义  $R_3$  中微分形式如下:

**定义**  $\overset{0}{\omega} = F$

$$\overset{1}{\omega} = Pdx_1 + Qdx_2 + Rdx_3,$$

$$\overset{2}{\omega} = Pdx_2 \wedge dx_3 + Qdx_3 \wedge dx_1 + Rdx_1 \wedge dx_2,$$

$$\overset{3}{\omega} = Fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

分别称为  $R_3$  中的零次、一次、二次、三次微分形式。  $P, Q, R, F$  等称为外微分形式的系数。

根据外积运算律及性质可对微分形式施行外积运算。

例如

$$\begin{aligned} \overset{1}{\omega}_1 \wedge \overset{1}{\omega}_2 &= (P_1 dx_1 + Q_1 dx_2 + R_1 dx_3) \wedge (P_2 dx_1 \\ &\quad + Q_2 dx_2 + R_2 dx_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (P_1 Q_2 - Q_1 P_2) dx_1 \wedge dx_2 + (Q_1 R_2 \\
&\quad - R_1 Q_2) dx_2 \wedge dx_3 + (R_1 P_2 \\
&\quad + P_1 R_2) dx_3 \wedge dx_1 \\
&= \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} dx_1 \wedge dx_2 + \begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + \begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} dx_3 \wedge dx_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2 &= (P_1 dx_1 + Q_1 dx_2 + R_1 dx_3) \wedge (P_2 dx_2 \wedge dx_3 \\
&\quad + Q_2 dx_3 \wedge dx_1 + R_2 dx_1 \wedge dx_2) \\
&= (P_1 P_2 + Q_1 Q_2 + R_1 R_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.
\end{aligned}$$

**引理15·10** 微分形式的外积有如下性质:

$$(i) \quad \overset{p}{\omega} \wedge (\overset{q}{\omega}_1 + \overset{q}{\omega}_2) = \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}_1 + \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}_2;$$

$$(ii) \quad \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega} = (-1)^{pq} \overset{q}{\omega} \wedge \overset{p}{\omega};$$

$$(iii) \quad \overset{p}{\omega} \wedge (\overset{q}{\omega} \wedge \overset{r}{\omega}) = (\overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\omega}) \wedge \overset{r}{\omega}$$

这里  $p, q, r$  可任取  $0, 1, 2, 3$  各数.

引理是外积运算律的直接结果, 证明留给读者.

下面定义外微分运算, 以便用微分形式及其外微分的积分关系统一描述格林定理、斯托克斯定理及发散量定理.

**定义** 设  $\omega^K$  ( $K = 0, 1, 2, 3$ ) 是  $\mathbf{R}_3$  中的微分形式, 定义其外

微分 $d\omega^K$ 如下:

$$\begin{aligned}
 d\omega^0 &= dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} dx_3; \\
 d\omega^1 &= dP \wedge dx_1 + dQ \wedge dx_2 + dR \wedge dx_3; \\
 d\omega^2 &= dP \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dQ dx_3 \wedge dx_1 + dR \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\
 d\omega^3 &= dF \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 d(\omega_1^p + \omega_2^p) &= d\omega_1^p + d\omega_2^p.
 \end{aligned} \tag{15.82}$$

由定义可见, 对于零次微分形式外微分运算就是微分运算.  $K$ 次微分形式的外微分是 $K+1$ 次微分形式. 运用外积运算律与性质上述 (15.82) 各式简化为

$$\begin{aligned}
 d\omega^1 &= \left( \frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\
 d\omega^2 &= \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\
 d\omega^3 &= 0
 \end{aligned} \tag{15.83}$$

**引理15.11** 外微分运算具有下列简便的性质.

$$(i) \quad d(C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2) = C_1 d\omega_1 + C_2 d\omega_2$$

$$(C_1, C_2 \text{ 为实数})$$

(ii) 设  $\omega_1$  是  $K$  次的, 则

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^K \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

(iii) 对任何  $K$  次的其系数具有二阶导数的外微分形式  $\omega$ , 都有

$$d(d\omega) = 0.$$

(iv) 若  $d\omega = 0$  则  $\exists p-1$  次微分形式  $\omega^{p-1}$ , 使得

$$\omega = d\omega^{p-1}.$$

性质 (i) 及 (ii) 是外微分运算定义及外积运算律的直接结论. 性质 (iii) 可根据 (i), (ii) 归成对  $\omega$  的情形,

在  $\omega$  的情况之下据  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}$  便得. 性质 (iii) 一

般情况下称为潘加莱引理. (iv) 是潘加莱引理的逆.

对  $R_3$  中的情况可就  $p = 1, 2, 3$  逐一验证. 如  $\omega = p dx_1 + Q dx_2 + R dx_3, d\omega = 0$  即

$$\left( \frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1$$

$$+ \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \equiv 0$$

据定理 15.17, 便得  $\exists u$ , 使  $du = \omega$ , 这里  $u = \omega$ . 至于定理 15.17 要求所论的区域是单连通区域的条件, 在这里的 (iv)

中省略了它的叙述.

对于  $R_3$  中  $K(\leq 3)$  次微分形式在  $R_3$  的  $K$  维区域  $\Delta$  上的积分, 记作

$$\int_{\Delta}^K \omega. \quad (15.84)$$

直观地说,  $R_3$  中的零维区域是指三维空间中的点, 一维区域是曲线, 二维区域是曲面, 三维区域则是空间中的立体.

(15.84) 式是按  $\Delta$  的维数确定积分的重数, 例如  $\int_{\Delta}^2 \omega$ , 即

$\omega = P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2$ ,  $\Delta$  是二维的, 即曲面:  $x_1 = x_1(u, v)$ ,  $x_2 = x_2(u, v)$ ,  $x_3 = x_3(u, v)$ ,  $(u, v) \in D$ . 相应的外积

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left( \frac{\partial x_2}{\partial u} du + \frac{\partial x_2}{\partial v} dv \right)$$

$$\wedge \left( \frac{\partial x_3}{\partial u} du + \frac{\partial x_3}{\partial v} dv \right)$$

$$= J \left( \frac{x_2, x_3}{u, v} \right) du \wedge dv.$$

同理  $dx_3 \wedge dx_1 = J \left( \frac{x_3, x_1}{u, v} \right) du \wedge dv$ ,  $dx_1 \wedge dx_2 = J \left( \frac{x_1, x_2}{u, v} \right)$

$du \wedge dv$ , 因此,

$$\int_{\Delta}^2 \omega = \iint_D (P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2)$$



$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left[ P \cdot J\left(\frac{x_2, x_3}{u, v}\right) + Q \cdot J\left(\frac{x_3, x_1}{u, v}\right) \right. \\
&\quad \left. + R \cdot J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right) \right] du \wedge dv. \quad (15 \cdot 85)
\end{aligned}$$

这里的  $du \wedge dv$  就是  $D$  的有向面积元素  $dA_{uv} = |du \wedge dv|$ .

同样,  $\mathbf{R}_2$  中二维区域  $D$  上的二次微分形式

$$\omega = F(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

的积分是

$$\begin{aligned}
\int_D \omega &= \iint_D F(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2 \\
&= \iint_{D'} F(x_1(u, v), x_2(u, v)) J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right) du \wedge dv. \quad (15 \cdot 86)
\end{aligned}$$

上面等式最后的等号实际上是二重积分的变量替换公式 (定理 8·15), 定理 8·15 的公式与 (15·86) 式的差别在于前者积分中面积元素恒取正, 因而雅可比要取绝对值, 现在有向曲面的面积元素有正有负, 雅可比也不必再取绝对值了.

有了以上的准备, 现在把牛顿—莱布尼兹公式, 格林定理、斯托克斯定理及发散量定理概括为统一的形式.

牛顿—莱布尼兹公式是在一维空间  $\mathbf{R}_1$  中的一维区域  $[a, b]$  上讨论的,  $[a, b]$  的边界是它的端点  $a$  与  $b$ . 由于

$$\omega = F(x), \quad d\omega = \frac{dF(x)}{dx} dx$$

因此牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_{[a; b]} \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

可写成

$$\int_{[a; b]} d\omega = \int_{a; b} \omega \quad (15.87)$$

格林定理 (定理15.20) 的 (15.41) 式

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dA_{x_1, x_2} = \int_{\partial D} (P dx_1 + Q dx_2),$$

可写成  $R_2$  中的.

$$\int_D d\omega^1 = \int_{\partial D} \omega^1, \quad (15.88)$$

其中  $\omega^1 = P dx_1 + Q dx_2$ ,  $d\omega^1 = \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2$ .

斯托克斯定理 (定理15.22) 的 (15.67) 式

$$\iint_S (\text{curl } v) \cdot n ds = \int_{\partial S} v \cdot dr,$$

可写成  $R_3$  中的

$$\int_S d\omega^1 = \int_{\partial S} \omega^1, \quad (15.89)$$

这里  $\omega^1 = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$ .

发散量定理 (定理15.23) 的 (15.80) 式

$$\iiint_E \text{div } v dv = \iint_{\partial E} v \cdot n dS,$$

可写成 $R_3$ 中的

$$\int_E d\omega^2 = \int_{\partial E} \omega^2, \quad (15.90)$$

其中  $\omega^2 = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$ .

综合 (15.87) 到 (15.90) 四个等式, 可把微积分基本定理及场论中三个定理统一叙述为:  $R_N (N \leq 3)$  中的  $K$  次微分形式  $\omega^K$  的外微分  $d\omega^K$ , 在  $K+1$  维区域  $\Delta$  上的积分  $\int_{\Delta} d\omega^K$ , 等于  $\omega^K$  在  $\partial\Delta$  上的积分  $\int_{\partial\Delta} \omega^K$ . 这一结论推广到  $R_N$  中就是一般的斯托克斯定理.

**定理15.24 (斯托克斯定理)** 设  $\omega^K$  为  $R_N$  中  $(K+1)$  维正规区域  $D$  上的  $K$  次微分形式 ( $(K+1) \leq N$ ),  $\partial D$  是  $D$  的边界 ( $K$  维区域), 那么

$$\int_D d\omega^K = \int_{\partial D} \omega^K \quad (15.91)$$

定理的证明涉及到  $R_N$  中的  $D$  及  $\partial D$  的参数表示, 原则上可将 § 15.5—§ 15.9 的论述推广到  $R_N$  来得到. 下面运用  $R_N$  中的微分形式及外微分运算扼要地叙述 (15.91) 的证明步骤. 完备的叙述读者可参阅 [美] M·斯皮瓦克著《流形上的微积分》中译本.

设  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in R_N$ , 称下述点集  $S$ :

$$\{x : f_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad m \leq N\}$$

为  $N-m$  维曲面. 这里  $f_j$  是  $R_N$  上的可微函数且  $N-1$  维曲面

$S_j = \{x : f_j(x) = 0\}$  在  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  点的切面的法矢  $\nabla f_j$  彼此线性无关, 也即矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

的秩等于  $m$ 。按隐函数存在定理对于  $K = N - m$  维曲面  $S$  的局部, 可用  $K$  个彼此独立的参数  $(u_1, u_2, \dots, u_K)$  表示出来,  $(u_1, u_2, \dots, u_K)$  叫作  $S$  的“局部坐标系”, 即

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_K), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

把外积概念推广到  $R_N$ ,  $K$ —维曲面的有向面积元素为

$$\{dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}; \quad i_1 < i_2 < \dots < i_K\},$$

是一  $K$  次基本微分形式。在  $R_N$  中适于求  $K$ —维曲面积分的  $K$  次微分形式是

$$\omega^K = \sum_{i_1 < \dots < i_K} a_{i_1, i_2, \dots, i_K}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_K}$$

假若把上述  $K$  次外微分形式局限于  $S$  已用参数  $(u_1, \dots, u_K)$  局部坐标化的“小片”  $U$  上, 可以把参数表示

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \dots, u_K), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

代入  $\omega^K$ , 即得

$$\omega = \left\{ \sum_{i_1 < \dots < i_K} a_{i_1, \dots, i_K} \cdot J \left( \frac{x_{i_1}, \dots, x_{i_K}}{u_1, \dots, u_K} \right) \right\} du_1 \wedge \dots \wedge du_K.$$

这样，可用 $K$ 重积分计算 $\omega$ 在 $U$ 上的积分，即

$$\int_U \omega = \int_{U_0} \dots \int \left\{ \sum_{i_1 < \dots < i_K} a_{i_1, \dots, i_K} J \left( \frac{x_{i_1}, \dots, x_{i_K}}{u_1, \dots, u_K} \right) \right\} du_1 \wedge \dots \wedge du_K,$$

这里 $U_0$ 是 $U$ 在 $(u_1, \dots, u_K)$ 空间中的原像。

设 $R_{K+1}$ 中的 $K$ 次外微分形式为：

$$\begin{aligned} \omega &= g_1(u) du_2 \wedge du_3 \wedge \dots \wedge du_{K+1} \\ &+ g_2(u) du_1 \wedge du_3 \wedge \dots \wedge du_{K+1} + \dots \\ &+ g_i(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_{K+1} \\ &+ \dots + g_{K+1}(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_K \end{aligned}$$

$u \in D_0 = \{(u_1, \dots, u_{K+1}) : a_i \leq u_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, K+1\}$ ,  
 $D_0$ 是 $(K+1)$ 维“长方体”。

逐一计算 $\omega$ 的每一项 $\omega_i = g_i(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_{K+1}$ 在 $\partial D_0$ 上的积分：

$$\int_{\partial D_0} \omega_i = \int_{\partial D_0} g_i(u) du_1 \wedge \dots \wedge du_{i-1} \wedge du_{i+1} \wedge \dots \wedge du_{K+1}.$$

自然地划分 $\partial D_0$ 为如下 $(K+1)$ 对 $K$ —维“长方面”，即

$$A_j = \{ (u, \dots, u_{K+1}) : u_j = a_j, a_l \leq u_l \leq b_l, l \neq j \}$$

$$B_j = \{ (u_1, \dots, u_{K+1}) : u_j = b_j, a_l \leq u_l \leq b_l, l \neq j \}$$

当 $j \neq i$ 时， $\omega_i^K$ 在 $A_j, B_j$ 上因 $u_i$ 取常数值，所以 $du_i$ 为零，因此 $\omega_i^K$ 也为零。于是

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_0} \omega_i^K &= (-1)^{i-1} \int_{B_i} g_i(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_{K+1}) du_1 \wedge \dots \wedge du_{K+1} \\ &\quad + (-1)^i \int_{A_i} g_i(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_{K+1}) du_1 \wedge \dots \wedge du_{K+1} \\ &= (-1)^{i-1} \int_{D_0} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} du_1 \wedge \dots \wedge du_i \wedge \dots \wedge du_{K+1} \end{aligned} \quad (15.92)$$

式中符号 $(-1)^{i-1}$ ， $(-1)^i$ 是 $\partial D_0$ 在 $B_i, A_i$ 上所取的方向，而后一等号是微积分基本定理的直接结果：

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} du_i = g_i(\dots, b_i, \dots) - g_i(\dots, a_i, \dots).$$

按外微分运算的定义：

$$d\omega^K = \left\{ \sum_{i=1}^{K+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} \right\} du_1 \wedge du_2 \wedge \dots \wedge du_{K+1}.$$

上述 (15.92) 式可以写成

$$\int_{\partial D_0} \omega^K = \int_{D_0} d\omega^K,$$

由此可见对于“长方体”这种特殊区域  $D_0$  斯托克斯定理就是微积分基本定理的直接推论。

对于  $\mathbf{R}_N$  中一般的  $K+1$  维区域 (正规的)，先用划分把定理证明归于已具有局部参数坐标化的子区域，利用发散量定理的证明中同样的单位分解，把定理证明归成  $\mathbf{R}_{K+1}$  中的

“长方体”  $D_0$  去验证，利用局部坐标系得出一般的斯托克斯定理——微积分基本定理的高维一般形式。

# 附 录

## 1 绝对值

绝对值的概念对于分析的发展起着重要作用。

**定义** 若 $a$ 是实数, 定义 $a$ 的绝对值 $|a|$ 为:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geq 0, \\ -a & \text{当 } a < 0. \end{cases}$$

绝对值的性质如下定理所述:

**定理 A.1**

(i)  $|a| \geq 0$ ,  $|-a| = |a|$  及  $|a|^2 = a^2$ ,

(ii)  $|a| = |b| \iff a = \pm b$ .

(iii)  $|a \cdot b| = |a| |b|$ , 当  $b \neq 0$ ,  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ .

(iv) 若  $b > 0$ , 那么

$$|a| < b \iff -b < a < b.$$

**证明** (i)与(iii)是定义的直接结果. 若 $|a| = |b|$ , 那么 $(|a|)^2 = (|b|)^2$  得 $a^2 = b^2$ , 即有 $a = \pm b$ , (ii)成立. 为了证(iv), 注意不等式 $|x| < b$ 的解集是 $S_1 = \{ x : |x| < b, x \geq 0 \}$ 与 $S_2 = \{ x : |x| < b, x \leq 0 \}$ 的并. 由 $|x|$ 定义,  $x \in S_1 \iff x \geq 0$ 且  $x < b \iff x \in [0, b)$ ;  $x \in S_2 \iff x \leq 0$ ,



$-x < b \iff x \in (-b, 0]$ . 因此  $S_1 \cup S_2 = (-b, b)$  故 (iv) 成立.

**例1** 求不等式  $|3x - 4| \leq 7$  的解集.

**解** 应用定理 A·1 的 (ii), (iv), 有

$$\begin{aligned} |3x - 4| \leq 7 &\iff -7 \leq 3x - 4 \leq 7 \iff -3 \leq 3x \leq 11 \\ &\iff -1 \leq x \leq \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

所求解集为区间  $[-1, \frac{11}{3}]$ .

**例2**  $\left| \frac{2x-5}{x-6} \right| < 3.$

**解** 如例 1 同样的步骤, 有

$$\left| \frac{2x-5}{x-6} \right| < 3 \iff -3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3 \quad (x \neq 6).$$

其解集为  $S_1 \cup S_2$ ,  $S_1 = \{x : -3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3 \text{ 且 } x-6 > 0\}$ ,

$S_2 = \{x : -3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3 \text{ 且 } x-6 < 0\}$ . 分别求

$S_1, S_2$ :

$$\begin{aligned} x \in S_1 &\iff -3(x-6) < 2x-5 < 3(x-6) \text{ 且 } x-6 > 0 \\ &\iff -3(x-6) < 2x-5 \text{ 且 } 2x-5 < 3(x-6) \text{ 且 } x > 6 \\ &\iff 23 < 5x, \text{ 且 } 13 < x, \text{ 且 } x > 6 \iff x > 13. \end{aligned}$$

即  $S_1 = (13, \infty)$ .

$$\begin{aligned} x \in S_2 &\iff -3(x-6) > 2x-5 > 3(x-6), \text{ 且 } x-6 < 0 \\ &\iff 23 > 5x \text{ 且 } 13 > x \text{ 且 } x < 6 \iff x < \frac{23}{5}. \end{aligned}$$

即  $S_2 = \left(-\infty, \frac{23}{5}\right)$  . 解集  $S_1 \cup S_2$  (如图) A·1.

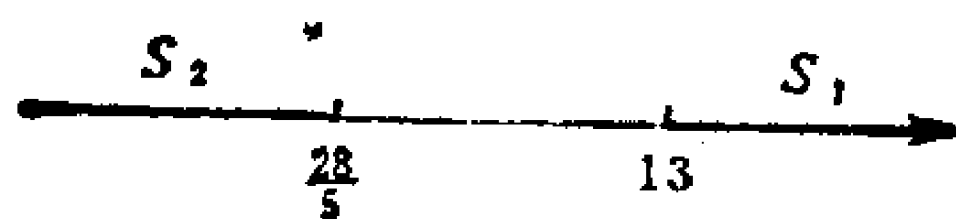


图 A·1

现在证明一个重要的不等式.

**定理A·2** 若 $a, b$ 是数, 那么

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

**证明** 因为  $|a| = a$  或  $-a$ , 有  $-|a| \leq a \leq |a|$ . 同样,  $-|b| \leq b \leq |b|$ . 把这两不等式相加, 得

$$-(|a| + |b|) \leq a+b \leq |a| + |b|.$$

由定理A·1之(iv), 得

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

**推论** 若 $a, b$ 是数, 那么

$$|a-b| \leq |a| + |b|.$$

**证明** 将 $a-b$ 记成 $a+(-b)$ 应用定理, 得

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|.$$

## 习 题

1—6 求解集.

1.  $|2x+1| = 3.$
2.  $|4x-5| = 3.$
3.  $|x-2| = |2x+4|.$
4.  $|2x-1| = |3x+5|.$
5.  $\left| \frac{2x-3}{3x-2} \right| = 2.$
6.  $\left| \frac{x+2}{3x-1} \right| = 3.$

7—12 求不等式解集

$$7. \quad |x-2| < 1. \quad 8. \quad |2x+1| < \frac{1}{3}.$$

$$9. \quad \left| \frac{3-2x}{2+x} \right| < 2. \quad 10. \quad \left| \frac{2x-5}{x-6} \right| < 3.$$

$$11. \quad |x+3| \leq |2x-6|. \quad 12. \quad |x-1| < |3x+5|.$$

13. 设  $a, b$  是数

$$|a| - |b| \leq |a-b|.$$

14. 设  $a, b$  为正数  $a > b$ ;  $c, d$  为负数,  $c > d$ . 证明

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

## 2 实数的 $p$ 进制小数表示

这里介绍实数的  $p$  进制表示,  $p$  为大于 1 的自然数. 日常所用的十进制表示是  $p$  等于 10 的特例.

**定理 A·3** 若  $x$  是一非负实数, 那么存在唯一的正整数  $n$ , 使  $n-1 \leq x < n$ .

**证明** 由定理 2·21 的 (a), 存在正整数  $k > x$ . 这样的  $k$  的集  $S$  非空. 由自然数集的良好性 (定理 1·30),  $S$  中有最小数  $n$ . 若  $n > 1$ , 那么正数  $n-1 \in S$ , 有  $n-1 \leq x < n$ . 若  $n = 1$ , 则  $0 \leq x < 1$ .

**定义** 设  $p$  是大于 1 的自然数, 称

$$\frac{d_1}{p}, \frac{d_2}{p^2}, \dots, \frac{d_n}{p^n}, \dots$$

为  $p$  进制小数展开, 其中  $0 \leq d_i \leq p-1$ ,  $d_i$  取非负整数值.

注  $p$  当 = 10,  $d_i$  取 0, 1,  $\dots$  9 中的数上述展开就是熟悉的十进制小数; 当  $p=2$ ,  $d_i$  取 0 或 1 是二进制小数

**定义** 若在 $p$ 进制小数展开中, 仅有有限多个 $d_i$ 不等于零, 称展开为 $p$ 进制有限小数, 否则称为 $p$ 进制无限小数. 若从某一 $i_0$ 起 $d_i = p - 1 (i \geq i_0)$ , 称无限小数是广义的. 十进制小数通常用,  $0.d_1d_2d_3\cdots$ , 表示.  $0.327999\cdots$ 是广义的.

**定理 A·4** 设 $p$ 进制小数展开 $\frac{d_1}{p}, \frac{d_2}{p^2}, \cdots, \frac{d_n}{p^n}, \cdots$ 定义 $s_n$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{p^i}, \quad n = 1, 2, \cdots, \text{ 那么}$$

(i) 当 $n \rightarrow \infty, S_n \rightarrow a$ , 这里 $0 \leq a \leq 1$ .

(ii)  $a = 1 \iff d_i = p - 1, i = 1, 2, \cdots$ .

(iii) 若展开是广义的, 那么存在自然数 $i_0$ 及 $q$ , 使,

$$a = \frac{q}{p^{i_0}}, \quad q \leq p^{i_0}.$$

**证明** (i) 因为 $d_i > 0, p > 1$ , 有 $S_{n+1} \geq S_n (n = 1, 2, \cdots)$ , 又因对每一 $i, d_i \leq p - 1$ , 有

$$S_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{p-1}{p^i} = \frac{1}{p} (p-1) \left[ 1 + \frac{1}{p} + \left(\frac{1}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{p}\right)^{n-1} \right].$$

令 $r = \frac{1}{p}$ , 求得:

$$S_n \leq r \left( \frac{1}{r} - 1 \right) \frac{1 - r^n}{1 - r} = 1 - r^n < 1,$$

因此序列 $\{S_n\}$ 满足连续性公理c, 所以 $S_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ , 且

$$0 \leq a \leq 1.$$

(ii) 当对每一  $i$ ,  $d_i = p - 1$ . 那么  $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{p-1}{p^i} = 1 - \frac{1}{p^n}$ ,

当  $n \rightarrow \infty$ ,  $S_n \rightarrow 1$ .

(iii) 设对  $i \geq i_0$   $d_i = p - 1$ , 那么当  $k > i_0$  时,

$$S_k = \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{d_i}{p^i} + \sum_{i=i_0}^k \frac{p-1}{p^i}.$$

当  $i_0 = 1$  时,  $a = 1$ . 当  $i_0 > 1$  时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{d_i}{p^i} + \frac{1}{p^{i_0-1}}.$$

$$\text{右端通分可知 } q = \sum_{i=1}^{i_0-2} d_i p^{i_0-1-i} + (d_{i_0-1} - 1 + 1) \leq p^{i_0-1}.$$

下一定理说明对任意自然数  $p > 1$ , 每一实数有唯一的常义的  $p$  进制展开.

**定理 A·5** 设  $p$  为自然数,  $p > 1$ ,  $a$  为满足  $0 \leq a < 1$  的实数, 那么存在唯一的  $p$  进制展开, 当  $n \rightarrow \infty$  时,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{p^i} \rightarrow a.$$

**证明** 由定理 A·3 存在非负整数,  $q_1$ , 使

$$q_1 \leq pa < q_1 + 1,$$

同理对每一 $i$ , 存在非负整数 $q_i$ , 使

$$q_i \leq p^i a < q_i + 1.$$

定义 $d_i$ :

$$d_1 = q_1, \quad d_i = q_i - p q_{i-1} \quad (i > 1).$$

应当证明对于所有 $i$ , 都是 $0 \leq d_i \leq p-1$ . 显然 $d_1 = q_1 \leq p a < p$ , 由 $q_1$ 是非负整数, $0 \leq d_1 \leq p-1$ . 对于 $i > 1$ , 由 $q_i$ 定义, $q_i \leq p^i a < q_i + 1$ ,  $q_{i-1} \leq p^{i-1} a < q_{i-1} + 1$ , 因此

$$p^{i-1} a - 1 < q_{i-1} \text{ 或 } p^i a - p < p q_{i-1}.$$

所以

$$d_i = q_i - p q_{i-1} < p^i a - (p^i a - p) = p,$$

$$d_i = q_i - p q_{i-1} > (p^i a - 1) - p(p^{i-1} a) = -1,$$

即 $d_i$ 是满足 $-1 < d_i < p$ 的整数, 于是断定 $0 \leq d_i \leq p-1$ .

运用归纳法, 由 $q_i = d_i + p q_{i-1}$ , 得

$$q_i = d_i + p d_{i-1} + p^2 d_{i-2} + \cdots + p^{i-1} d_1.$$

因此

$$q_i = \sum_{k=1}^i p^{i-k} d_k \leq p^i a < q_i + 1,$$

但 $\sum_{k=1}^i p^{i-k} d_k = p^i \sum_{k=1}^i p^{-k} d_k$ , 令 $S_i = \sum_{k=1}^i p^{-k} d_k$ , 有 $S_i$

$= p^{-i} q_i$  且  $S_i \leq a < S_i + p^{-i}$ . 因而当 $i \rightarrow \infty$ , 有 $S_i \rightarrow a$ .

以上证明了 $a$ 的 $p$ 进制小数展开的存在性, 下面证明这种展开是唯一的, 设 $a$ 的另一 $p$ 进制小数的展开(非广义的)

为:  $\frac{d_1'}{p}, \frac{d_2'}{p^2}, \dots, \frac{d_n'}{p^n} \dots$ , 即  $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i'}{p^i}$ . 可以写出

$$\begin{aligned}
 p^n a &= \sum_{i=1}^n p^{n-i} d_i' + \sum_{i=n+1}^{\infty} p^{n-i} d_i' \\
 &= \sum_{i=1}^n p^{n-i} d_i' + \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d_{n+k}'
 \end{aligned}$$

因为  $\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d_{n+k}'$  是某一数的展开, 由所设  $a$  的展开是非广

义的, 断定  $\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d_{n+k}' < 1$ . 因此

$$\sum_{i=1}^n p^{n-i} d_i' \leq p^n a < \sum_{i=1}^n p^{n-i} d_i' + 1.$$

定义  $q_n = \sum_{i=1}^n p^{n-i} d_i'$ , 使得  $q_n \leq p^n a < q_n + 1$ . 因而这

些  $q_n$  与在展开  $\frac{d_1}{p}, \frac{d_2}{p^2}, \dots, \frac{d_n}{p^n} \dots$  所用的  $q_n$  完全相同. 因此对

每一  $i$ ,  $d_i = d_i'$ , 即  $a$  的  $p$  进制小数表示是唯一的. 定理 A·5 获证.

下一结果, 在研究实数系的性质时常常用到.

**定理 A·6** 任意两实数之间存在一有理数.

**证明** 设  $a < b$ , 且不失一般性还设  $a \geq 0, b > 0$ , 否则于  $a, b$  加上一足够大的正整数, 使之成为非负数. 令  $q$  表示大于  $\frac{1}{b-a}$  的最小正整数,  $p$  是大于  $qa$  的最小正整数. 那么

$$p-1 \leq qa, \text{ 且 } qa < p \leq qa+1 \iff a < \frac{p}{q} \leq a + \frac{1}{q}.$$

而

$$q(b-a) > 1 \iff a + \frac{1}{q} < b.$$

于是

$$a < \frac{p}{q} < b.$$

**定理 A·6 推论** 任意两实数之间存在一无理数.

**证明** 设给定不相等实数  $a$  与  $b$ . 由定理 A·6. 存在一非零有理数  $r$ , 界于  $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{b}{\sqrt{2}}$  之间, 那么  $r\sqrt{2}$  界于  $a$ ,  $b$  之间, 而  $\sqrt{2}$  是无理数(定理 A·7),  $r$  是非零有理数, 因此  $r\sqrt{2}$  是无理数.

下一定理证明  $\sqrt{2}$  是无理数.

**定理 A·7** 不存在有理数其平方等于 2.

**证明** 设存在一有理数  $r$  使  $r^2 = 2$ . 由  $r$  是有理数, 所以存在整数  $p, q$ , 使  $r = \frac{p}{q}$ , 且  $p, q$  无公因子 (这一事实能由域公理系导出). 因为  $r^2 = 2$ , 有  $p^2 = 2q^2$ , 可见  $p^2$  是偶数. 因而  $p$  是偶数, 不然, 若  $p$  为奇数,  $p^2$  应是奇数 ( $p = 2l + 1$ ,  $p^2 = 4l^2 + 4l + 1$ ). 于是  $p = 2k$ ,  $q^2 = 2k^2$ , 如上同理, 可得  $q$  是偶数. 这样  $p, q$  有公因子 2, 与  $p, q$  无公因子的假设相矛盾.

## 习 题

1. 设  $p > 1$ , 称  $p$  进制小数  $\frac{d_1}{p}, \frac{d_2}{p^2}, \dots, \frac{d_n}{p^n} \dots$  是循环的, 当且仅当存在一正整数  $n$ , 使  $d_{i+n} = d_i, i = 1, 2, \dots$ .



证明每一循环小数表示一有理数。

2. 证明 $\sqrt{3}$ 是一个无理数。

3. 考察 $[0, 1]$ 的数的三进制小数展开, 将 $x \in [0, 1]$ 表示为 $0.d_1d_2\cdots d_i\cdots$ ,  $d_i = 0, 1, 2$ 中的数. 证明这种表示的存在唯一性 (在表示是非广义的条件之下的唯一性)。

### 3 $E_N$ 内的 矢

#### (1) 欧几里德空间 $E_N$

几何学在十七世纪初, 由于笛卡尔的创见, 再次获得重大进展。笛卡尔引进坐标系, 把空间性质数量化, 运用代数方法研究几何学。反过来使得代数、微积分的概念与法则, 获得了几何的解释。直线上的点与实数系的数建立起1—1对应, 平面上、三维空间中的点分别与 $R_2$ 中的 $(x_1, x_2)$ ,  $R_3$ 中的 $(x_1, x_2, x_3)$ 建立1—1对应。全体 $N$ 个有序实数 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 组成 $R_N$ 。更一般化地, 凡与 $R_N$ 这个距离空间同构的 $E_N$ 称都为 $N$ 维欧几里德空间。

设 $A \in E_N$ , 在 $E_N$ 到 $R_N$ 中的同构映象 $T$ 之下 $A$ 的象为 $x$ ,  $x = (x_1^A, x_2^A, \cdots, x_N^A)$ ,  $(x)$ 称为 $E_N$ 的一个坐标系,  $N$ 叫作空间的维数。

空间中最基本、最简单的事实是“位置”, 用点表示位置。其次是直线 $l$ , 直线是一维欧几里得空间。若 $A, B$ 是两个点, 以 $\overrightarrow{AB}$ 表示由 $A$ 到 $B$ 的有向线段。

**定理 A·8** 设 $(x)$ 是欧几里得空间 $E_N$ 的坐标系,  $l$ 是 $E_N$ 的

直线,  $(t)$  是  $l$  上的坐标系, 若  $l$  上坐标系之原点及单位点在  $E_N$  中的坐标分别是  $x^0$ ,  $x^0 + \lambda$ . 那么对于  $p \in l$ , 有  $x_i^p = x_i^0 +$

$\lambda_i t^p$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 其中  $\lambda_i$  是  $\lambda$  的第  $i$  个坐标,  $|\lambda| = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 = 1$ ,

$x_i^0$  是  $x^0$  的第  $i$  个坐标,  $t^p$  是  $p$  点在  $(t)$  之下的坐标.

**证明** 首先因为  $(x)$ ,  $(t)$  分别是  $E_N$  及  $l$  上的坐标系, 所以

$$1 = |1 - 0| = |x^0 + \lambda - x^0| = |\lambda|.$$

若  $p \in l$ ,  $p$  在  $(t)$  坐标系下的坐标是  $t^p$ . 以  $x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_N^p)$  表示在  $(x)$  之下的  $p$  点的坐标, 必定  $\exists N$  个数  $\xi_1^p, \dots, \xi_N^p$ , 使

$$x_i^p = x_i^0 + \lambda_i t^p + \xi_i^p, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (A.1)$$

由定理假设应有

$$|x^p - x^0|^2 = (t^p)^2, \quad \text{及} \quad |x^p - x^0 - \lambda|^2 = (t^p - 1)^2.$$

$$\text{而} \quad |x^p - x^0|^2 = \sum_{i=1}^N (\lambda_i t^p + \xi_i^p)^2$$

$$= (t^p)^2 |\lambda|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i^p t^p + |\xi^p|^2 = (t^p)^2$$

$$\begin{aligned} |x^p - x^0 - \lambda|^2 &= |\lambda|^2 (t^p - 1)^2 + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i^p (t^p - 1) + |\xi^p|^2 \\ &= (t^p - 1)^2. \end{aligned}$$

因为  $|\lambda| = 1$ , 也即

$$|\xi^p|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i^p t^p = 0; \quad |\xi^p|^2 + 2 \sum_{i=1}^N \lambda_i \xi_i^p (t^p - 1) = 0.$$

由此得出  $\xi_i^p = 0, (i=1, 2, \dots, N)$ , 即

$$x_i^p = x_i^0 + \lambda_i t^p, \quad i=1, 2, \dots, N. \quad (A \cdot 2)$$

上面定理说明  $E_N$  和 其一条直线  $l$ , 各自的坐标系  $(x)$  与  $(t)$  间的关系由  $(A \cdot 2)$  的映象相联系. 下面定理  $A \cdot 9$  是  $A \cdot 8$  的逆定理.

**定理  $A \cdot 9$**  设  $(x)$  是欧几里得空间  $E_N$  上的坐标系,  $l$  是映象

$$x_i^p = x_i^0 + \lambda_i t^p, \quad |\lambda| = 1, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad t \in R_1 \quad (A \cdot 3)$$

之下的值域. 那么  $l$  是一直线, 且方程  $(A \cdot 3)$  在  $l$  上建立以  $x_0$  为原点, 以  $x_0 + \lambda$  为单位点的一坐标系.

**证明** 设  $p, q$  是  $(A \cdot 3)$  值域里的点. 那么

$$x_i^p - x_i^q = \lambda_i (t^p - t^q), \quad i=1, 2, \dots, N,$$

且

$$|x^p - x^q| = |\lambda| |t^p - t^q| = |t^p - t^q|.$$

由此即得  $l$  是一直线, 且  $(A \cdot 3)$  于  $l$  上给出一原点在  $x^0 (t^0 = 0)$ , 单位点在  $x^0 + \lambda (t^1 = 1)$  的坐标系.

**定义** 定理  $A \cdot 8$ 、 $A \cdot 9$  中的  $\lambda$ , 称为直线  $l$  的方向余弦. 直线  $l_1$  与  $l_2$  相交于  $x^0$  点, 如果对于  $l_1$  上的点  $x^1$  和  $l_2$  上的点  $x^2$ , 有勾股定理:

$$|x^1 - x^2|^2 = |x^1 - x^0|^2 + |x^2 - x^0|^2$$

成立, 则称  $l_1$  与  $l_2$  相正交 (或垂直). 当两直线  $l_1, l_2$  的方向余弦满足  $\lambda_1 = (\pm 1)\lambda_2$  时, 称  $l_1$  与  $l_2$  互相平行.

**定理  $A \cdot 10$**  设  $(x)$  是  $E_N$  的坐标系, 且令  $l_1, l_2$  的方程 分别为

$$l_1: \quad x_i^p = x_i^0 + \lambda_i^1 t^p, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$l_2: \quad x_i^p = x_i^0 + \lambda_i^2 t^p,$$

$$\text{那么 } l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 互相垂直} \iff \sum_{i=1}^N \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0. \quad (A \cdot 4)$$

**证明** 设  $x^1 \in l_1$ ,  $x^2 \in l_2$ , 那么存在  $t^1, t^2$ , 使得  
 $x_i^1 = x_i^0 + \lambda_i^1 t^1, \quad x_i^2 = x_i^0 + \lambda_i^2 t^2, \quad i = 1, 2, \dots, N.$

因而

$$\begin{aligned} |x^1 - x^2|^2 &= \sum_{i=1}^N (\lambda_i^1 t^1 - \lambda_i^2 t^2)^2 = (t^1)^2 + (t^2)^2 \\ &\quad - 2t^1 \cdot t^2 \sum_{i=1}^N \lambda_i^1 \lambda_i^2 \end{aligned}$$

及

$$|x^1 - x^0|^2 + |x^2 - x^0|^2 = (t^1)^2 + (t^2)^2$$

因此

$$|x^1 - x^2|^2 = |x^1 - x^0|^2 + |x^2 - x^0|^2 \iff \sum_{i=1}^N \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0,$$

即  $l_1$  与  $l_2$  垂直的充要条件是  $\sum_{i=1}^N \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0$ .

**定义** 设  $A$  与  $B$  是  $E_N$  的点, 定义  $p$  点是从  $A$  到  $B$  方向上的  $h$  点 ( $h$  是一实数,  $|AB|$  表  $A, B$  间距离), 当且仅当

$$|AP| = |h| |AB| \quad |BP| = |1-h| |AB| \quad (A \cdot 5)$$

**定理A·11** (a) 设  $(x)$  是  $E_N$  的坐标系. 点  $p$  是  $A$  到  $B$  方向上的  $h$  点的充要条件是

$$x_i^p - x_i^A = h(x_i^B - x_i^A) \text{ 或 } x_i^p = (1-h)x_i^A + hx_i^B, \\ i = 1, \dots, N. \quad (A \cdot 6)$$

(b) 一从  $A$  到  $B$  方向上的  $h$  点与从  $B$  到  $A$  方向上的  $(1-h)$  点相重合.

**证明** (a) 设  $(x)$  是  $E_N$  的坐标系.  $p$  是  $E_N$  的点. 那么存在  $\xi^p = (\xi_1^p, \xi_2^p, \dots, \xi_N^p)$ , 满足

$$\left. \begin{aligned} x_i^p - x_i^A &= h(x_i^B - x_i^A) + \xi_i^p \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ x_i^p - x_i^B &= (h-1)(x_i^B - x_i^A) + \xi_i^p \end{aligned} \right\} (A \cdot 7)$$

即

将 (A·7) 代入 (A·5), 和定理 A·8 中同样计算, 得

$$|\xi^p|^2 + 2 \sum_{i=1}^N h \xi_i^p (x_i^B - x_i^A) = 0,$$

$$|\xi^p|^2 + 2 \sum_{i=1}^N (h-1) \xi_i^p (x_i^B - x_i^A) = 0$$

成立. 由此得出  $\xi_i^p = 0$ , 于是 (A·6) 成立.

反之, 当 (A·6) 成立, (A·5) 显然成立.

(b) 是 (a) 的直接结果.

**定理A·12** (a) 设  $A, B$  是  $E_N$  内不同的点, 那么  $E_N$  中从  $A$  到  $B$  方向上的所有  $h$  点组成一条直线, 这里  $h$  是实数.

(b)  $E_N$  内有唯一的直线通过它的不同的两点.

**证明** 设 $(x)$ 是 $E_N$ 的坐标系， $x^A, x^B, x^p$ 分别是 $A, B, P$ 点的坐标。若 $p$ 是从 $A$ 到 $B$ 方向上的 $h$ 点，那么

$$x_i^p = x_i^A + \lambda_i^{AB} t^p, \quad i=1, 2, \dots, N, \text{ 其中 } \lambda_i^{AB} = \frac{x_i^B - x_i^A}{|AB|}, \quad (A \cdot 8)$$

表示过 $A, B$ 的直线，由定理 $A \cdot 10$ ，取 $h = \frac{t^p}{|AB|}$ ，表明从

$A$ 到 $B$ 方向上的 $h$ 点在 $(A \cdot 8)$ 表示的直线上。另一方面，如果 $p$ 在 $(A \cdot 8)$ 所给直线上，那么 $p$ 点满足 $(A \cdot 6)$ ，且 $t^p = h|AB|$ 。

以上论证说明仅有唯一直线 $(A \cdot 8)$ 通过 $A, B$ 。

**定理 $A \cdot 13$**  设 $l$ 是 $E_N$ 中一条直线， $p_1$ 是 $E_N$ 中不在 $l$ 上的点。那么存在唯一的过 $p_1$ 与 $l$ 垂直的直线 $l_1$ 。若 $l$ 的方程为

$$x_i = x_i^0 + \lambda_i t, \quad i=1, 2, \dots, N, \quad (A \cdot 9)$$

$p_1$ 的坐标为 $(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_N)$ ，那么 $l$ 与 $l_1$ 的交点 $p_2$ 的 $(t)$ 坐标 $t^*$ 为：

$$t^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overline{x}_i - x_i^0) \quad (A \cdot 10)$$

**证明** 设 $l$ 与 $l_1$ 交点的 $(x)$ 坐标为 $(x_1^*, \dots, x_N^*)$ ，它满足 $(A \cdot 9)$ ： $x_i^* = x_i^0 + \lambda_i t^*$ ， $t^*$ 为某一数， $x^*, \overline{x}$ 均在 $l_1$ 上，因而 $x_i^* - \overline{x}_i$ 与 $l_1$ 的方向余弦成比例。由 $l$ 与 $l_1$ 正交的条件

$$(A \cdot 4) \text{ 导出 } \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^* - \overline{x}_i) = 0, \text{ 也即 } \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^0 + \lambda_i t^* - \overline{x}_i) = 0,$$

$$\text{由此可得 } t^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\overline{x}_i - x_i^0).$$

**定义** 设  $\vec{l}$  是  $E_N$  内的有向直线,  $\vec{AB}$  是一有向线段.  $A'$  是过  $A$  与  $\vec{l}$  垂直的直线与  $\vec{l}$  的交点,  $B'$  是过  $B$  与  $\vec{l}$  垂直的直线与  $\vec{l}$  的交点 (图 A·2), 称有向距离  $\overrightarrow{A'B'}$  为  $\vec{AB}$  在  $\vec{l}$  上的投影, 记作

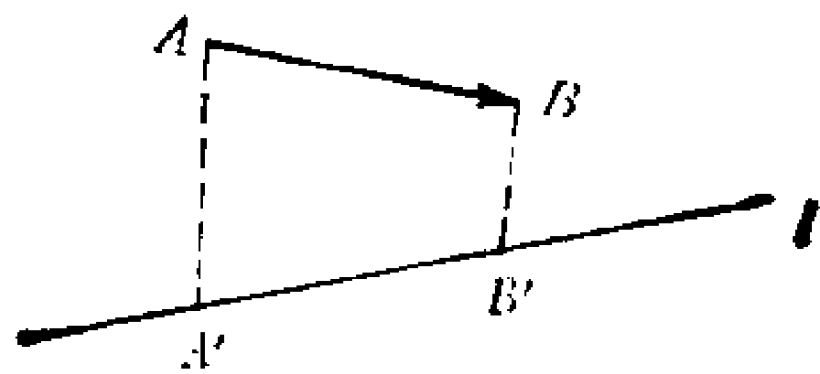


图 A·2

$$p_{\vec{l}, 0, \vec{l}} \vec{AB} = \overrightarrow{A'B'}.$$

**定理 A·14** 设  $(x)$  是  $E_N$  的坐标系,  $\vec{l}$  为有向直线, 其方向余弦  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ,  $\vec{AB}$  是一有向线段. 那么

$$p_{\vec{l}, 0, \vec{l}} \vec{AB} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^B - x_i^A).$$

**证明** 据定理 A·13 及投影的定义,  $A'$ ,  $B'$  的  $(t)$  坐标分

别是:  $t^{A'} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^A - x_i^0)$ ,  $t^{B'} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^B - x_i^0)$ . 因此

$$p_{\vec{l}, 0, \vec{l}} \vec{AB} = \overrightarrow{A'B'} = t^{B'} - t^{A'} = \sum_{i=1}^N \lambda_i (x_i^B - x_i^A)$$

## (2) $E_N$ 中的矢

如同二维、三维情况, 定义  $E_N$  内的矢为有向线段的等价类.

**定义** 有向线段  $\vec{AB}$  与  $\vec{CD}$  等价, 当且仅当对于  $E_N$  中的

每条直线 $\vec{l}$ 都有

$$p_{r_0 j_i} \vec{AB} = p_{r_0 j_i} \vec{CD}.$$

下面是关于等价有向线段基本性质的定理，它的证明留给读者。

**定理A·15** (a) 若 $(x)$ 是 $E_N$ 的坐标系，那么当且仅当 $x_i^B - x_i^A = x_i^D - x_i^C$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) 时， $\vec{AB}$ 与 $\vec{CD}$ 等价。

(b) 等价的有向线段记成 $\vec{AB} \approx \vec{CD}$ ，若 $\vec{AB} \approx \vec{CD}$ 那么 $\vec{CD} \approx \vec{AB}$ 。

(c) 若 $\vec{AB} \approx \vec{CD}$ ， $\vec{CD} \approx \vec{EF}$ ，那么 $\vec{AB} \approx \vec{EF}$ 。

(d) 设 $\vec{AB}$ 及 $p$ 点给定，那么存在唯一的点 $q$ ，使 $\vec{pq} \approx \vec{AB}$ 。

(e) 若 $\vec{AB} \approx \vec{DE}$ ， $\vec{BC} \approx \vec{EF}$ ，那么 $\vec{AC} \approx \vec{DF}$ 。

**定义**  $E_N$ 中有向线段的等价类称为矢，即 $E_N$ 中使 $\vec{AB}$ 彼此等价的点序偶 $(A, B)$ 的集是一个矢。矢的一个序偶 $(A, B)$ 称为矢的一个表示，以 $v(\vec{AB})$ 表示含有 $\vec{AB}$ 的等价类的矢。

直观地，矢 $v(\vec{AB})$ 是 $\vec{AB}$ 在空间中“平移”得到所有互相等价的有向线段的全体。

对于 $E_N$ 中的矢，如同三维矢那样定义矢的加法，数与矢相乘及两矢的数量积运算。

**定义** 设 $v, w$ 是矢，它们的表示分别为 $\vec{OA}, \vec{AB}$ 定义 $v + w$ 是以 $\vec{OB}$ 为表示的矢 $u$ ，即 $u(\vec{OB}) = v(\vec{OA}) + w(\vec{AB})$ 。



若 $h$ 是实数，是 $C$ 从 $A$ 到 $B$ 方向的 $h$ 点，定义 $hv = v(OC)$ 。  
 $v$ 的一切表示的共同长度记作 $|v|$ ，并称 $|v|$ 为 $v$ 的长度  
 (图A·3)。

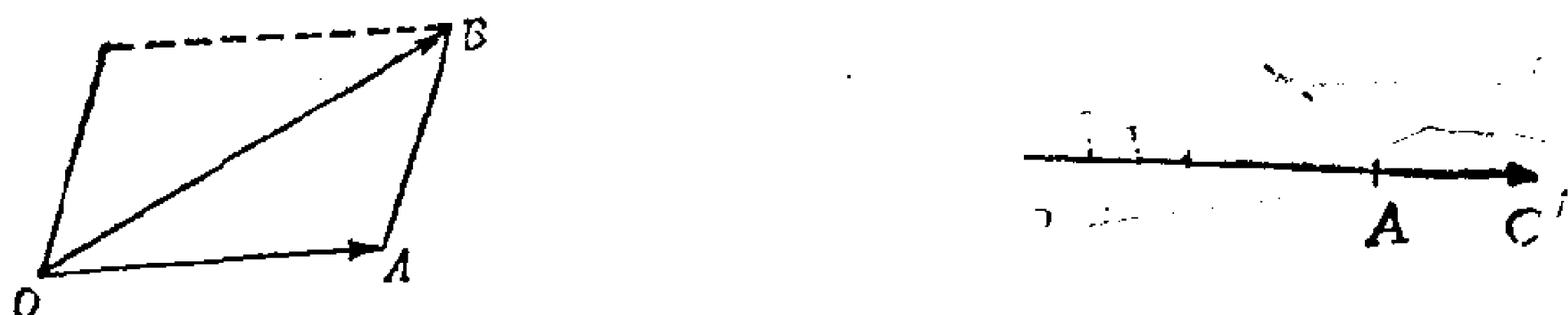


图 A·3

设 $(x)$ 是 $E_N$ 的坐标系。从原点 $0 = (0, 0, \dots, 0)$ 到 $I_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 点( $I_i$ 点除第 $i$ 个坐标为1之外，其他坐标均为零)，以 $\vec{OI_i}$ 为其表示的矢，记为 $e_i$ 。

**定理A·16** 设 $(x)$ 是 $E_N$ 的坐标系， $A, B$ 是 $E_N$ 的点，

$$\text{那么 } v(AB) = \sum_{i=1}^N (x_i^B - x_i^A) e_i. \quad (A \cdot 11)$$

**证明** 为了书写的简便，对 $N=3$ 证明定理。由定理A·15之(d)， $v(A, B)$ 有一表示 $\vec{op}$ ， $p$ 的坐标为 $(x_1^B - x_1^A, x_2^B - x_2^A, x_3^B - x_3^A)$ 。另设 $R_1, R_2, R_3, q_1, q_2, q_3$ 有坐标

$$R_1 = (x_1^B - x_1^A, 0, 0), \quad R_2 = (0, x_2^B - x_2^A, 0),$$

$$R_3 = (0, 0, x_3^B - x_3^A);$$

$$q_1 = R_1, \quad q_2 = (x_1^B - x_1^A, x_2^B - x_2^A, 0), \quad q_3 = p.$$

这样， $R_1$ 是从 $o$ 到 $I_1$ 方向上的 $(x_1^B - x_1^A)$ 点； $R_2$ 是从 $o$ 到 $I_2$ 方向上的 $(x_2^B - x_2^A)$ 点； $R_3$ 是从 $o$ 到 $I_3$ 方向上的 $(x_3^B - x_3^A)$ 点。  
 $v(q_1 q_2) = v(o R_2)$ ， $v(q_2 q_3) = v(o R_3)$ ， $v(o, R_1) = (x_1^B - x_1^A) e_1$ ， $v(o R_2) = (x_2^B - x_2^A) e_2$ ， $v(o R_3) = (x_3^B - x_3^A) e_3$ 。

于是有

$$v(op) = v(oq_1) + v(q_1q_2) + v(q_2q_3),$$

即

$$v(AB) = \sum_{i=1}^N (x_i^B - x_i^A) \mathbf{e}_i. \text{ 定理 A·16 获证.}$$

定理 A·16 中那样的  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  是互相垂直的单位矢组, 称作一组正交基.

**定理 A·17** 设  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  是  $E_N$  内一组正交单位矢,  $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_N \mathbf{e}_N, \mathbf{w} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_N \mathbf{e}_N$ . 那么

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^N (a_i + b_i) \mathbf{e}_i, \\ h\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^N ha_i \mathbf{e}_i \quad (h \text{ 为实数}), \\ |\mathbf{v}| &= \sqrt{a_1^2 + \dots + a_N^2}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A·12})$$

**证明** 于  $E_N$  中建立以  $v(o, I_i) = \mathbf{e}_i$  为基的坐标系  $(x)$ , 这里  $o$  是原点,  $I_i$  为第  $i$  个单位点. 那么由定理 A·16 设  $A, B, C$  坐标分别是  $(a_1, \dots, a_N), (a_1 + b_1, \dots, a_N + b_N), (ha_1, \dots, ha_N)$  的点, 那么

$$\mathbf{v} = v(oA), \mathbf{w} = v(AB), h\mathbf{v} = v(oC), \mathbf{v} + \mathbf{w} = v(oB)$$

根据 (A·11) 便得 (A·12) 成立.

下面关于矢的运算性质定理是运算定义的直接结果.

**定理 A·18** (a) 矢的加法运算满足域公理的  $A_1, \dots, A_5$ :  $A_1$  加法的封闭性;  $A_2$  交换律  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ;  $A_3$  结合律  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ ;  $A_4$  存在零矢  $\mathbf{o}$ , 满足  $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}$ ;  $A_5$  负矢的存在性, 即  $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{o}$  有解  $-\mathbf{a}$ .

(b) 设  $v, w$  是两个矢,  $c, d$  为实数, 那么

$$(c + d)v = cv + dv;$$

$$c(v + w) = cv + cw;$$

$$c(dv) = (cd)v;$$

$$1v = v;$$

$$0v = 0;$$

$$-v = (-1)v.$$

**定义** 设  $u, v$  是  $E_N$  的矢, 定义  $u, v$  的点乘积 (也称数量积) 为

$$u \cdot v = \frac{1}{2} [ |u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2 ].$$

点乘积不依赖于坐标系, 但能用坐标表示之.

**定理 A·19** 设  $u, v, w$  是  $E_N$  的矢,  $(x)$  是  $E_N$  的坐标系,  $e_1, e_2, \dots, e_N$  是正交单位矢组成的基. 若  $u = \sum_{i=1}^N a_i e_i$ ,

$v = \sum_{i=1}^N b_i e_i$ , 那么

$$(i) \quad u \cdot v = \sum_{i=1}^N a_i b_i;$$

$$(ii) \quad u \cdot v = v \cdot u;$$

$$(iii) \quad u \cdot u = |u|^2;$$

$$(iv) \quad u(cv + dw) = c(u \cdot v) + d(u \cdot w) \quad (c, d \text{ 是数}).$$

定理 A·19 是定理 A·16, A·17 及点乘积定义的直接结果, 细节留给读者.

### (3) 矢的外积

现在把面积、体积的这些几何量用有关矢的运算来表示，并将它推广为 $E_N$ 中矢的外积运算。

平面上两个矢 $a, b$ 如图A·4所示， $a, b$ 决定一平行四边形，它的面积是矢 $a \times b$ 的长度： $|a \times b| = |a| |b|$

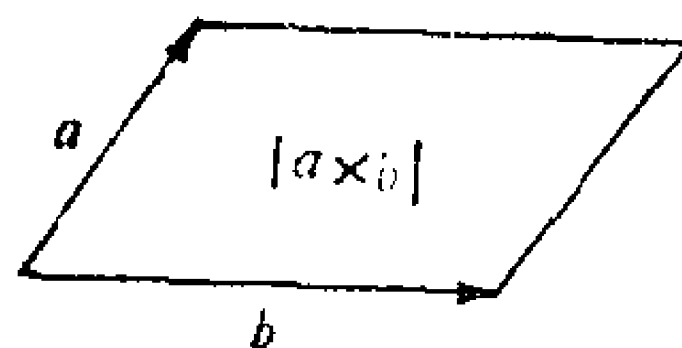


图 A·4

$|\sin(\widehat{ab})|$ 。 $a \times b$ 是 $a$ 与 $b$ 的叉积，

$\sin(\widehat{ab})$ 中 $(\widehat{ab})$ 表示 $a$ 与 $b$ 的夹角。如果把 $|a| \cdot |b| \sin(\widehat{ab})$ 定义为 $a, b$ 的一种表示 $a, b$ 张成的平行四边形“有向面积”的运算，能够把这种运算推广来表示高维空间中的“有向面积”、“有向体积”。

**定义** 称 $|a| |b| \sin(\widehat{ab})$ 为 $a$ 与 $b$ 的外积，记为 $a \wedge b$ 。即  
 $a \wedge b = |a| \cdot |b| \sin(\widehat{ab})$ 。 $a \wedge b$ 表示 $a, b$ 张成平行四边形的“有向面积”，其正负决定于 $\sin(\widehat{ab})$ 。

**定理A·20** 设 $a, b, c$ 是矢，外积具有性质

$$(i) \text{ (斜对称性) } a \wedge b = -b \wedge a;$$

$$(ii) \text{ (分配律) } a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c;$$

$$(iii) \text{ (结合律) } (ka) \wedge b = k(a \wedge b) = a \wedge (kb), k \text{ 是数.}$$

(A·13)

定理A·20容易按定义验证，还可借助 $R_2$ 中坐标系，将

$$a \wedge b \text{ 表示为 } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \text{ (行列式中 } (a_1, a_2) = a, (b_1, b_2) = b \text{) 逐}$$

条验证。

我们再分析三维空间中的长度、面积、体积。显然矢可表示“有向线段”，两个矢决定一“平行四边形”，三个矢决定一“平行六面体”。（图A·5）。

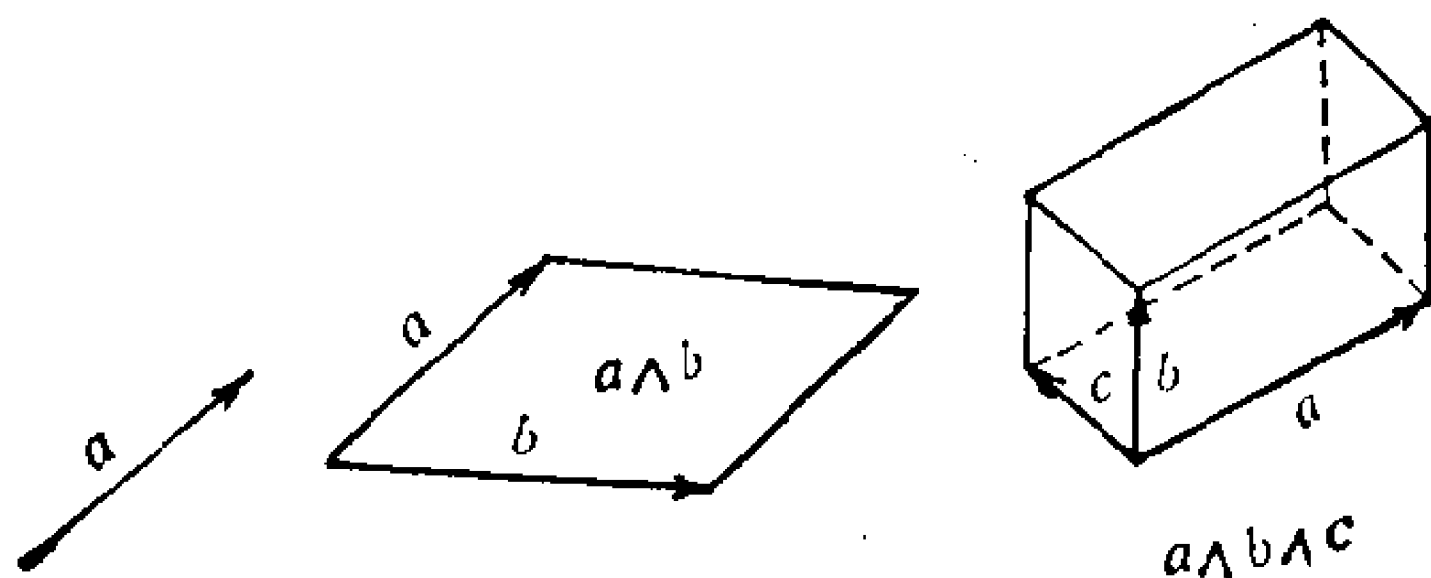


图 A·5

自然地，可以建立这样的体系：

- (i) 用矢 $\mathbf{a}$ 表示“有向长度”；
- (ii) 用 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 表示由 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所张成平行四边形的“有向面积”。
- (iii) 用 $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ 表 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 所张成的平行六面体的“有向体积”。
- (iv) 外积运算满足(A·13)式所列的性质。
- (v)  $|\mathbf{a}|, |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|, |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|$ 就是无向的“长度”、“面积”和“体积”。

能够在一坐标系下来说明这样的体系的存在性。于 $\mathbf{R}_3$ 中取一组正交基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ，分别表示 $x_1$ 轴， $x_2$ 轴， $x_3$ 轴方向上的单位矢，以

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$$

分别表示 $x_1 - x_2$ 平面， $x_2 - x_3$ 平面， $x_3 - x_1$ 平面上的“单位有向面积”。以

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

表示空间中的“单位有向体积”。这样规定的 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 间的外积运算显然有如下性质:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = 0; \\ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2), \\ \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 &= -(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3); \\ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &= -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = -(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= -(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

$$\text{设 } \mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{c} = \sum_{i=1}^3 c_i \mathbf{e}_i, \quad (\text{用 A} \cdot 13)$$

式的性质:外积结合律、斜对称性、分配律计算 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ , 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \\ &= \{ (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 \} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3.$$

由解析几何知道  $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}|$  就是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  混合积的绝对值, 即上式右端三阶行列式的绝对值, 它正是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  张成平行六面

体的无向的体积。通过直接计算可知  $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = \left( \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \right.$

$\left. + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$  恰好是  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  张成平行四边形的无

向面积。如果把  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  看成互相垂直的“有向面积”, 那么上面  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  之右端可视为在基  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  之下的一个“矢”。按这种观点能把三维空间中的讨论推广为  $N$  维空间中的有向体积。

设  $E_N$  中  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$  分别为  $x_1, x_2, \dots, x_N$  轴方向上单位矢的正交基。那么

(1) 任何一个矢  $\mathbf{a}$  表示一“有向长度”, 它可用  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$  的线性组合表示成  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + \dots + a_N \mathbf{e}_N$ 。

(2) 任给两个矢  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  决定一平行四边形,  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  表示它的“有向面积”, 想象它为一新矢; 它的正交基为  $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$

$1 \leq i < j \leq N\}$  (共  $\frac{n(n-1)}{2}$  个单位矢),  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  可唯一地表示成

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j.$$

外积运算具有 (A·13) 所列的运算性质, 而且  $|a \wedge b|$

$$= \left\{ \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ 就是通常的无向面积.}$$

(3) 仿 (2) 类推,  $E_N$  中  $l$  个矢  $a_1, a_2, \dots, a_l, l \leq N$ , 决定一“ $l$  维平行体”, 它的“有向  $l$ -维体积”可以用  $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_l$  表示. 把它想象为以  $\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_l}; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq N\}$  这样  $\frac{N!}{(n-l)!l!}$  个单位矢构成正交基之下的矢.

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_l$  唯一地表示成:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_l = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} D_{i_1, i_2, \dots, i_l} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_l}, \text{ 其系数 } D_{i_1, i_2, \dots, i_l} \text{ 是一个 } l \text{ 阶行列式. 且}$$

$$|a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_l| = \left\{ \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_l} D_{i_1, i_2, \dots, i_l}^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

就是  $a_1, \dots, a_l$  张成的  $l$ -维无向体积.

特别  $l = N$ , 上述正交基就只有  $e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N$  这一个元素, 此时

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_N = \det(a_1, a_2, \dots, a_N) e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_N.$$



[ General Information ]

□□ = □□□□□

□□ = □□□□□

□□ = 7 2 5

SS□ = 1 0 6 6 2 5 1 3

□□□□ = 1 9 8 5 □ 0 1 □□ 1 □

□ □ □  
□ □ □  
□ □ □  
□ □ □  
□ □ □  
□ □ □

□ □ □  
§ 1 □ 1    □ □ □ □ □  
§ 1 □ 2    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 1 □ 3    □ □ □ □ □ □ □  
§ 1 □ 4    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □

□ □ □ □ □ □  
§ 2 □ 1    □ □ □  
§ 2 □ 2    □ □ □ □  
§ 2 □ 3    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 2 □ 4    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 2 □ 5    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □

R 1 □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ 1    □ □ □ □  
§ 3 □ 2    □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ 3    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ 4    □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ 5    □ □ □ □ □  
§ 3 □ 6    □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 3 □ 7    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □  
§ 4 □ 1    R 1 □ □ □ □ □ □  
§ 4 □ 2    □ □ □

□ □ □

□ □ □ □ □ □ □ □  
§ 5 □ 1    □ □ □ □  
§ 5 □ 2    □ □ □ □  
§ 5 □ 3    □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 5 □ 4    □ □ □ □

□ □ □

□ □ □ □ □ □ □  
§ 6 □ 1    □  
§ 6 □ 2    □ □ □ □ □ □  
§ 6 □ 3    □ □ □  
§ 6 □ 4    □ □  
§ 6 □ 5    □ □ □ □ □ □  
§ 6 □ 6    □ □ □  
§ 6 □ 7    □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 6 □ 8    □ □ □ □ □ □

□ □ □

R N □ □ □ □  
§ 7 □ 1    □ □ □

	§ 7 □ 2	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 7 □ 3	□ □ □ □ □ □ □ □
	§ 7 □ 4	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 7 □ 5	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 7 □ 6	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □	R N □ □ □ □	
	§ 8 □ 1	R N □ □ □ □
	§ 8 □ 2	R N □ □ □ □ □ □
	§ 8 □ 3	R N □ □ □ □ □ □
	§ 8 □ 4	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	
	§ 9 □ 1	□ □ □ □ □
	§ 9 □ 2	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 9 □ 3	□ □ □ □ □
	§ 9 □ 4	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 9 □ 5	□ □ □
	§ 9 □ 6	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 9 □ 7	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □	□ □ □ □ □	
	§ 1 0 □ 1	□ □ □ □
	§ 1 0 □ 2	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 0 □ 3	□ □ □ □ □
□ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	
	§ 1 1 □ 1	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 1 □ 2	□ □ □ □
	§ 1 1 □ 3	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 1 □ 4	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	
	§ 1 2 □ 1	□ □ □ □ □ □
	§ 1 2 □ 2	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □	
	§ 1 3 □ 1	□ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 3 □ 2	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 3 □ 3	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
□ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □	
	§ 1 4 □ 1	□ □
	§ 1 4 □ 2	□ □ □
□ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □	
	§ 1 5 □ 1	R 1 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
	§ 1 5 □ 2	□ □ □ □ R N □ □ □
	§ 1 5 □ 3	□ □ □
	§ 1 5 □ 4	□ □ □ □
	§ 1 5 □ 5	R 3 □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

§ 1 5 □ 6    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □  
§ 1 5 □ 7    □ □ □ □ □  
§ 1 5 □ 8    □ □ □ □ □ □  
§ 1 5 □ 9    □ □ □ □ □  
§ 1 5 □ 1 0    □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □

- 1    □ □ □
- 2    □ □ □ P □ □ □ □ □ □
- 3    E N □ □ □

□ □ □